Kajian Numerik Penyelesaian Persamaan Van der Pol Dengan Metode Beda Hingga

[1] P.V. Swastika
[1]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana*
Bali, Indonesia
veriswastika@unud.ac.id

[2] I D.A.P.P. Tentriajaya, [3] L.E. Theodora, [4] L.B. Kumaro, [5] N P.D. Agustina, [6] H.S. Siden, [7] M.O.G. Sibannang, [8] P.S.A. Yanti, [9] R.F. Rochim, [10] I K.G. Sukarsa, [11] K. Dharmawan,
[234567891011]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana*
Bali, Indonesia
veri4putu@gmail.com

Abstract— Persamaan Van der Pol merupakan persamaan penting yang penggunaan praktisnya mencakup beberapa disiplin ilmu mulai dari matematika, fisika, teknik dan komputasi. Persamaan ini memuat suku nonlinear yang menjadi tantangan tersendiri bagi para peneliti untuk menentukan formulasi solusi eksaknya yang sampai saat ini masih menjadi masalah penelitian tersendiri. Untuk itu pada artikel ini, skema numerik digunakan untuk menentukan solusi hampiran. Skema yang dikaji adalah metode Euler Eksplisit dan Runge-Kutta orde 2. Konstruksi kedua metode menghasilkan skema yang eksplisit sehingga mudah diimplementasikan, cepat dan tidak rumit. Berdasarkan hasil simulasi, dengan parameter tertentu dan pada rentang keberlakuan yang diberikan, kedua metode dapat menangkap fenomena osilasi pada solusi yang dihasilkan. Hal ini menunjukkan performa kedua metode secara baik.

Kata Kunci— Euler Eksplisit, Runge-Kutta, Van der Pol.

I. PENDAHULUAN

Pada proses osilasi dan dinamika sistem, diperlukan model matematis yang dapat menangkap perilaku non-linear, fenomena periodik, dan kestabilan model. Salah satu model yang dapat digunakan adalah Persamaan Van der Pol. Persamaan ini memiliki banyak relevansi salah satunya aplikasi praktis di berbagai bidang disiplin ilmu, yakni; matematika, fisika, teknik, komputasi dan sebagianya. Persamaan Van der Pol merupakan salah satu model yang dapat menangkap perilaku nonlinier yang tidak dapat ditangkap oleh model linier sederhana. Pada mulanya, persamaan ini dikembangkan untuk menganalisis osilator elektronik yang memiliki karakteristik nonlinier [5]. Penelitian yang dilakukan oleh Balthazar Van Der Pol pada 1920 yang mengganti sirkuit listrik RLC resistor pasif dengan elemen aktif yang dibentuk dari tabung tertutup triode (Semikonduktor) membawa Balthazar pada suatu rumusan yang dikenal sebagai Persamaan Van der Pol , yaitu :

$$u'' + u = \mu\,(1 - u^2)\,u' \tag{1}$$

Persamaan Van der Pol menggambarkan interaksi antara arus listrik dan resistansi dalam rangkaian, di mana kuat arus listrik dan waktu direpresentasikan sebagai variabel dinamik $u(t)$ dan variabel bebas t secara berturut-turut. Karakteristik persamaan ini antara lain memiliki komponen non-linear yang membuat perilaku osilasi menjadi lebih kompleks dibandingkan dengan osilator harmonik sederhana [4]. Ketika $\mu = 0$, persamaan ini menjadi linear dan memiliki solusi harmonik. Selain itu, persamaan Van der Pol memiliki kemampuan untuk menghasilkan solusi periodik yang stabil, dikenal sebagai *limit cycle* [5]. Pada konteks ini, sistem akan berosilasi secara stabil di sekitar orbit tertentu terlepas dari kondisi awalnya. Analisis perilaku dinamik dari persamaan ini sering dilakukan dengan menggunakan metode numerik seperti runge kutta atau metode analitik seperti metode skala ganda untuk memahami solusi periodik dan kestabilan sistem. Ketika memecahkan solusi dari persamaan diferensial orde dua atau dalam bentuk yang lebih kompleks, tidak semua dapat menggunakan metode analitik. Aproksimasi numerik diperlukan untuk menentukan solusi secara hampiran.

Penelitian yang dilakukan oleh [1] mengkaji penggunaan metode polynomial dan metode Runge Kutta untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan orde turunan tingkat tinggi. Hasil yang didapat kedua metode memiliki performa bagus dalam mencari solusi hampiran. Selain itu, terdapat juga penelitian yang dilakukan oleh [2] yang menyelidiki penggunaan metode Euler Implisit dan Crank-Nicholson untuk penyelesaian kasus harga opsi. Performa metode Crank-Nicholson diketahui lebih baik dari Euler Implisit pada kasus opsi. Namun penggunaan metode Crank-Nicholson memiliki kesulitan sendiri karena melibatkan penyelesaian berupa matriks. Pada artikel ini, penulis tertarik untuk menentukan hampiran solusi persamaan Van der Pol (1) dengan mengkaji penggunaan beberapa metode numerik sekaligus yakni metode Euler Eksplisit dan Runge Kutta orde 2.

II. METODE DAN PROSEDUR

Sesuai dengan uraian latar belakang, pada bab ini dijelaskan metode numerik Euler Eksplisit dan Runge Kutta orde dua untuk menentukan solusi hampiran dari persamaan Van der Pol.

2.1. Diskritisasi Persamaan Van Der Pol

Pertama-tama, persamaan (1) dengan parameter damping $\mu = 6$ dan nilai awal $u(0) = 1$ dan $u'(0) = 0$ didiskritisasi pada domain komputasi waktu $t \in [0,40]$. Penyelesaian persamaan (1) bisa ditentukan dengan cara transformasi atau mengubah persamaan orde dua pada (1) menjadi sistem persamaan differensial orde satu sebagai berikut.

Misalkan $v = u'$, maka persamaan (1) dapat dituliskan menjadi sistem persamaan diferensial biasa

$$u' = v \tag{2}$$

$$v' = 6(1 - u^2)v - u \tag{3}$$

dengan nilai awal hasil transformasi $u(0) = 1$ dan $v(0) = 0$. Untuk selanjutnya persamaan (2)-(3) akan digunakan untuk menentukan hampiran dari solusi persamaan (1).

2.1. Metode Euler Eksplisit

Tinjau sistem persamaan (2) dan (3), dengan melakukan diskritisasi beda maju

$$u' = \frac{du}{dt} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

$$v' = \frac{dv}{dt} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}$$

maka persamaan (2) dan (3) dapat dibentuk sebagai berikut

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\, v_i \tag{4}$$

$$v_{i+1} = \Delta t\,(6(1 - (u_i)^2)v_i - u_i) + v_i \tag{5}$$

dengan $\Delta t = t_{i+1} - t_i = h$ dimana h atau Δt adalah panjang langkah waktu. Persamaan (4) dan (5) merupakan skema Euler Eksplisit yang bermakna bahwa nilai variabel pada langkah selanjutnya dapat di tentukan dengan nilai pada langkah sebelumnya.

2.3. Metode Runge-Kutta orde 2

Pada persamaan (4) dan (5) telah dikonstruksi skema numerik Euler Eksplisit. Berikutnya, pada subbab ini dikonstruksi metode Runge-Kutta orde 2 atau RK2. Metode Runge-Kutta pertama kali diperkenalkan oleh Carl Runge (1856-1927) bersama rekannya Martin Kutte (1867-1944). Pada metode Runge-Kutta Orde 2, metode ini menggunakan dua titik evaluasi fungsi, yaitu $k_1$dan $k_2$dalam interval kecil untuk menghitung solusi, sehingga dapat menghasilkan tingkat akurasi yang lebih tinggi dibanding metode Euler. Metode ini juga sering disebut sebagai metode trapesium, karena melakukan pendekatan menggunakan dua titik.

Pada metode RK2 ini, dihitung beberapa nilai perantara (disebut k-value) agar solusi hampiran dapat mendekati solusi persamaan Van der Pol (1) dengan lebih baik. Tinjau persamaan (2) dan (3) dan misalkan ruas kanan nya sebagai fungsi secara umum

$$u' \coloneqq f_1(u_i, v_i)$$

$$v' \coloneqq f_2(u_i, v_i)$$

Nilai k_1 dihitung berdasarkan nilai fungsi awal dari $f(u_i, v_i)$, yakni

$$k_{1u} = \Delta t\ f_1(u_i, v_i) \tag{6}$$

$$k_{1v} = \Delta t\ f_2(u_i, v_i) \tag{7}$$

sementara itu, nilai k_2 dihitung sebagai berikut:

$$k_{2u} = \Delta t\ f_1(u_i + \Delta t, v_i + k_{1u}) \tag{8}$$

$$k_{2v} = \Delta t\ f_2(u_i + \Delta t, v_i + k_{1v}) \tag{9}$$

sehingga skema Runge-Kutta orde 2 dapat dituliskan

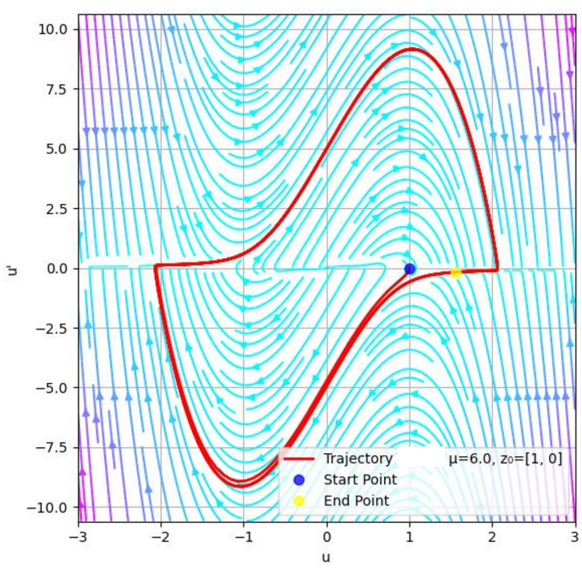
$$u_{i+1} = u_i + \frac{k_{1u} + k_{2u}}{2} \tag{10}$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{k_{1v} + k_{2v}}{2} \tag{11}$$

dengan k_{1u}, k_{2u} masing-masing didefinisikan pada persamaan (6) dan (8) dan k_{1v}, k_{2v} masing-masing didefinisikan pada persamaan (7) dan (9).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada subbab ini disajikan hasil numerik persamaan Van der Pol yang dihasilkan dari skema numerik Euler Eksplisit (4)-(5) dan skema RK2 (10)-(11).

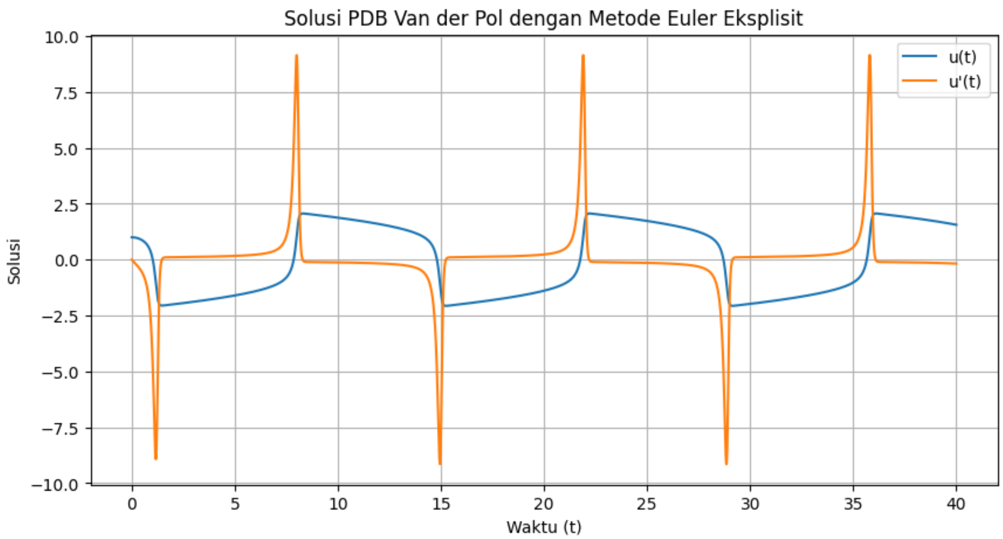


GAMBAR 1. POTRET FASA SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN VAN DER POL. SOLUSI BERGERAK BERLAWANAN ARAH JARUM JAM DARI TITIK AWAL MENUJU TITIK AKHIR.

Pada GAMBAR 1 disajikan plot potret fasa solusi numerik dari metode Euler Eksplisit. Plot potret fasa dapat dihasilkan dengan dengan menggambar grafik fungsi $u(t)$ terhadap $v(t)$ pada saat $t = 40$ (waktu final). Terlihat bahwa solusi bergerak dengan trajektori dari titik awal $z_0 = (u(0), v(0)) = (1,0)$ yang berlabel biru menuju titik akhir yang berlabel kuning dengan lintasan seperti pada kurva merah. Kurva panah menunjukkan lintasan nya yang berlawanan aruh jarum jam.

Seperti yang kita tahu bahwa pada relasi (2) maka perilaku potret fase menunjukkan keterkaitan antara solusi persamaan (1) yakni variabel kuat arus dengan $u(t)$ dengan turunan pertamanya yakni $v(t) = u'(t)$. Lebih jauh timbul pertanyaan, yang manakah solusi persamaan van der pol (1)? Apakah $u(t)$ atau $v(t)$?.

Pada sistem persamaan (2)-(3), variabel awal dari persamaan Van der Pol (1) adalah kuat arus atau $u(t)$ sehingga solusi persamaan Van der Pol (1) adalah plot kurva u terhadap t, lihat GAMBAR 2. Terlihat bahwa baik solusi numerik (1) maupun turunannya menghasilkan solusi yang periodik walupun tidak berbentuk seperti fungsi-fungsi harmonik.



GAMBAR 2. SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN VAN DER POL. LABEL BIRU MENUNJUKKAN SOLUSI PERSAMAAN VAN DER POL (1) YAKNI $u(t)$ SEMENTARA LABEL ORANGE ADALAH SOLUSI DARI TURUNAN NYA YAKNI $v(t)$.

Lebih jauh, solusi dengan metode RK2 juga menghasilkan visual yang sama dengan GAMBAR 1 untuk potret fasa dan GAMBAR 2 untuk solusi numerik. Karena keterbatasan jumlah halaman, disini penulis hanya menampilkan solusi untuk metode Euler Eksplisit.

Untuk parameter damping $\mu = 6 \gg 1$ terbentuk osilasi dengan amplitudo $u(t):\ -2{,}5 < u(t) < 2{,}5$ dan dengan amplitudo untuk $u'(t):\ -10 < u'(t) < 10$. Dari osilasi tersebut terlihat bahwa terdapat perubahan tajam dari kecepatan gelombang, karakteristik ini merupakan ciri khas osilator non-linear. Lalu, berdasarkan protret fase dari $u(t)$ (posisi) terhadap u' (laju perubahan $u(t)$ atau kecepatan) , didapatkan sebuah siklus batas (*limit cycle*) berupa kurva tertutup yang mengindikasikan sistem mencapai osilasi stabil, yaitu setelah gangguan sistem akan tetap kembali ke siklus ini tanpa henti. Bentuk unik dari siklus ini mencerminkan sifat non-linear dari persamaan Van der Pol, yang diakibatkan oleh faktor peredaman. Kurva ini disebut "osilasi relaksasi" karena terdapat fase gerak cepat diikuti oleh fase gerak lambat. Ini dapat dilihat dari bentuk kurva yang lebih melengkung dan melandai di beberapa bagian.

IV. KESIMPULAN

Skema numerik telah berhasil dikonstruksi untuk menentukan solusi hampiran dari persamaan Van der Pol. Konstruksi skema baik untuk metode Euler maupun metode RK2 memanfaatkan diskritisasi beda maju untuk turunan terhadap waktu. Skema yang dihasilkan eksplisit yakni langsung menghitung nilai variabel pada langkah waktu berikutnya dengan nilai pada waktu sebelumnya sehingga implementasinya dikategorikan mudah, cepat dan tidak rumit karena tidak memerlukan matriks. Hasil simulasi yang diperoleh dari kedua skema menujukkan solusi hampiran yang stabil dengan osilasi sesuai dengan tingkat parameter μ. Sifat nonlinearitas dari persamaan dapat secara jelas ditangkap oleh skema numerik dan menghasilkan simulasi yang koheren. Lebih jauh, variasi parameter dan metode numerik lain dapat dipergunakan pada penelitian selanjutnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kami ucapkan kepada LPPM Universitas Udayana yang telah mendanai penelitian ini melalui DIPA PNPB Universitas Udayana TA-2024 skim PUPS Nomor: B/255.245/UN14.4.A/PT.01.03/2024.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. H. Sitompul and E. W. B. Siahaan, “Solusi Persamaan Diferensial Biasa Orde Tinggi Dengan Metode Polinomial Dan Runge Kutta,” *Jurnal Penelitian Fisikawan*, pp. 32-40, 2024

[2] G. Saputra and Fajar, “Analisis Perbandingan Untuk Masalah Perhitungan Harga Opsi Asia Dengan Metode Euler Implisit Dan Crank-Nicholson,”, *Universitas Lampung*, 2024.

[3] L. N. Putri, “Persamaan Van Der Pol Dan Penyelesaiannya,” *Jurnal Ilmiah Matematika*, 2019.

[4] N. Azizah, “Penyelesaian Persamaan Van Der Pol Menggunakan Metode Adams Bashfort Moulton Orde Empat”, *Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim*, 2013.

[5] Y. Yulida and M. A. Karin, “Analisa Kestabilan Dan Solusi Pendekatan Pada Persamaan Van Der Pol,” *Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika*, vol. 3, pp. 156-161, 2019.