E-Jurnal Matematika Vol. 12(3), Agustus 2023, pp. 177-181 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2023.v12.i03.p416

GRAPH TANGGA DAN SIFAT-SIFATNYA

Mareta Sekar Larasati[1§], Luh Putu Ida Harini[2], I Wayan Sumarjaya[3]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: laraslala36@gmail.com]
[2]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: ballidah@unud.ac.id]
[3]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: sumarjaya@unud.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

ABSTRACT

Ladder Graph is one type of connected and simple graph that has its own uniqueness. The aim of this research is to find the k-deficiency of points in the spanning tree in the ladder graph. Calculation of k-deficiency is carried out for each additional step, starting from the second ladder (L_2), up to the n^{th} Ladder (L_n). Calculations are based on a representative spanning tree on each ladder. In the end, we get a number pattern from the second ladder onwards which is then proven by mathematical induction, for the calculation of each step up the ladder. In this study, the pattern of k-deficiency points on the ladder graph was obtained.

Keywords: *Ladder Graph, k-defisiensi, Mathematical Induction*

1. PENDAHULUAN

Matematika dapat diaplikasikan ke dalam berbagai bidang ilmu, di antaranya bidang biologi, kimia, teknologi, dan komunikasi. Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat diaplikasikan pada bidang-bidang tersebut adalah teori *graph*. Salah satu materi yang dibahas dalam teori *graph* adalah *k-defisiensi* titik. Menghitung total *k-defisiensi* titik dari pohon merentang pernah diterapkan pada *graph* terhubung (Anggraini, 2011).

Graph telah dikembangkan melalui beberapa riset pada tahun 1960-an. Aplikasi *graph* pada kehidupan manusia antara lain: komputer, rangkaian pada listrik, peta, penggambaran jaringan komunikasi, dan lainnya. Salah satu bagian yang dipelajari dari teori *graph* adalah tentang pohon, pohon merentang pada *graph* serta *k-defisiensi* titik. Dalam berbagai bidang ilmu, konsep pohon merupakan salah satu konsep yang dapat mendukung pada penerapan *graph*. Kirchoff (1824—1887) mengembangkan teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik.

Terdapat berbagai macam jenis *graph*, salah satunya adalah *graph* tangga (*ladder graph*). *Graph* Tangga ini adalah salah satu *graph* yang memiliki pola dalam jumlah *edge* dan titiknya di setiap pertambahan anak tangganya. Kurniawan (2009) juga melakukan penelitian terhadap *graph* tangga yaitu tentang pelabelan harmonis gabungan *graph* tangga segitiga LS_n, dengan *graph* tangga variasi X_n.

Beberapa penelitian lainnya mengenai *graph* tangga antara lain sebagai berikut. Hanani (2014) menilai ketakteraturan total *edge* dari *graph* tangga permata. Pada penelitian tersebut mendapatkan hasil bahwa bobot *edge* dari *graph* tangga memiliki nilai yang berbeda.

Slamin (2014) menilai ketakteraturan total *edge* dari *graph* tangga (*stair graph*). Lebih lanjut Slamin (2014) mendapatkan bahwa dari formulasi bobot *edge* pada *graph* tangga, terlihat bahwa bobot berbeda pada tiap *edge* sederhana yang memiliki keunikan tersendiri, yaitu memiliki suatu pola pada jumlah titik dan *edge*nya. (Aprilia, 2011) suatu *graph* sederhana yang dinotasikan dengan L_n dengan n adalah banyak anak tangga dapat disebut dengan *graph* tangga. *Graph* tangga dapat diilustrasikan seperti bentuk tangga pada suatu bangunan.

Pada *graph* tangga L_n, banyak titiknya $2n$, dan banyak *edge*nya adalah $3n-2$, berlaku untuk setiap pertambahan anak tangganya. Berdasarkan keunikan *graph* tangga pada pola banyak titik dan *edge*nya, penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut penentuan nilai *k-defisiensi* titik dari pohon merentang pada *graph* tangga di setiap anak tangga *graph*.

2. METODE PENELITIAN

Kajian pustaka merupakan metode penelitian pada penelitian ini yaitu dengan mengumpulkan dan mengkaji referensi berupa skripsi, buku, jurnal maupun tulisan dari perpustakaan dan internet. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar *graph* yang akan digunakan untuk mencari *k-defisensi* titik.
2. Mencari setiap kemungkinan pohon merentang yang terdapat pada *graph* tersebut. Pohon merentang merupakan *graph* yang tidak memiliki cycle dalam suatu graph.
3. Setelah didapatkan setiap kemungkinan pohon merentang lalu menentukan derajat *titik*.
4. Menentukan *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga di setiap pertambahan anak tangganya dengan rumus:
   $deg_G(v_i) - deg_T(v_i) = k$ (1)
   dengan deg_G merupakan jumlah derajat titik pada *graph* tangga dan deg_T adalah derajat titik pada pohon merentangnya.
5. Kemudian menemukan pola rumusnya.
6. Membuktikan pola rumus *k-defisiensi* titik yang telah ditentukan.

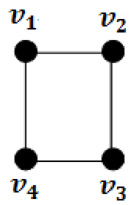
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini mengambil sample untuk *graph* tangga L_2 sampai L_4. Berikut merupakan perhitungannya:

3.1 Pohon Merentang dan k-defisiensi Titik pada *Graph* Tangga L_2

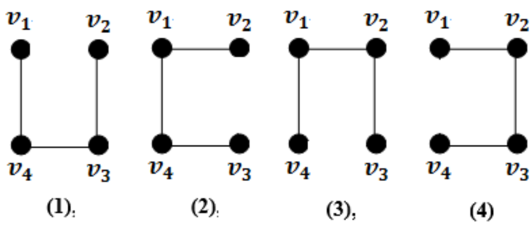
Pada subbab ini untuk mengawalinya dicari pohon merentang pada *graph* tangga. (Chartrand dan Zhang, 2005) *Graph* H dikatakan *subgraph* dari *graph* G, dapat dituliskan $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ *dan* $E(H) \subseteq E(G)$.

Selanjutnya dengan mencari *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga, dan yang terakhir yaitu membuktikan secara umum menggunakan induksi matematika. *Graph* tangga L_2 dapat digambarkan seperti pada gambar 2.1 sebagai berikut:



Gambar 1. *Graph* Tangga L_2

Anak tangga dari graph tangga L_2 adalah (v_1, v_2) dan (v_2, v_3). Pada *graph* tangga L_2, dicari terlebih dahulu pohon merentangnya, dapat diilustrasikan pada gambar 2:



Gambar 2. Pohon Merentang *Graph* Tangga L_2 (1), (2), (3), dan (4)

Graph tangga L_2 banyak kemungkinan pohon merentang yang dapat dicari dengan menggunakan rumus kombinasi, dengan jumlah *edge graph* tangga L_2 yaitu 4 dikurangi satu *edge* agar membentuk pohon merentang. Sehingga rumusnya adalah $C_1^4 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4.3!}{1!3!} = 4$.

Selanjutnya dicari *k-defisiensi* titik. yang pertama menentukan banyak derajat masing-masing titiknya dengan melihat pada *graph* berapa jumlah *edge* pada titiknya. Banyak kemungkinan pohon merentang pada L_2 adalah 4 pohon. Diambil 1 pohon untuk contoh perhitungan, yaitu Pohon Merentang $L_2(1)$:

1. Titik v_1 memiliki derajat 1
2. Titik v_2 memiliki derajat 1
3. Titik v_3 memiliki derajat 2
4. Titik v_4 memiliki derajat 2

Nilai k dari *k-defisiensi* titik ditentukan menggunakan persamaan rumus (1):

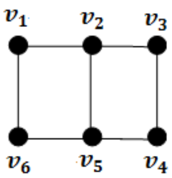
1. Titik v_1 nilai $k = 2 - 1 = 1$
2. Titik v_2 nilai $k = 2 - 1 = 1$
3. Titik v_3 nilai $k = 2 - 2 = 0$
4. Titik v_4 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Dengan demikian *k-defisiensi* titik dari *graph* tangga L_2 adalah $1 + 1 + 0 + 0 = 2$.

E-Jurnal Matematika Vol. 12(3), Agustus 2023, pp. 177-181 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2023.v12.i03.p416

3.2 Pohon Merentang dan k-defisiensi Titik *Graph* Tangga L_3

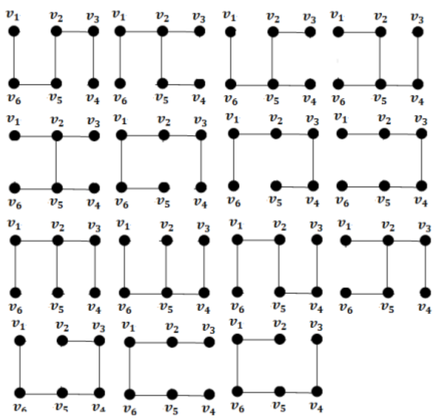
Graph tangga L_3 dapat ditunjukkan dengan gambar 3.



Gambar 3. *Graph* Tangga L_3

Titik yang terdapat di L_3 berjumlah 6, dengan anak tangganya adalah (v_1, v_6);(v_2, v_5) dan (v_3, v_4). Terdapat 4 titik dengan banyak *edge* yang terhubung sebanyak 2 dan 2 titik dengan 3 *edge* terhubung.

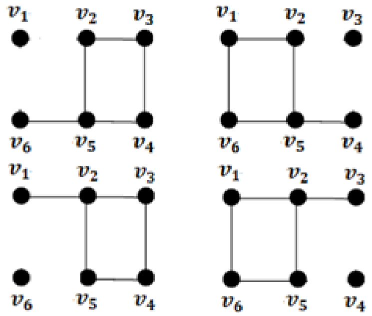
Salah satu rumus yang dapat mengetahui jumlah pohon merentang pada *graph* tangga L_3 dengan menggunakan rumus kombinasi. Untuk mendapatkan pohon merentang di *graph* tangga L_3 yaitu dengan menghilangkan dua *edge*nya dari total *edge*nya, dan didapat rumusnya $C_2^7 = \frac{7.6.5!}{5!2!} = 21$. *Graph* tangga L_3 memiliki pohon merentang pada gambar 4 yaitu:



Gambar 4. Pohon Merentang *Graph* Tangga L_3

Jika diperhatikan dari rumusnya, didapatkan $C_2^7 = \frac{7.6.5!}{5!2!} = 21$. Tetapi untuk di *graph* tangga L_3 terdapat pengambilan dua *edge* yang tidak dapat membentuk pohon merentang, antara lain:

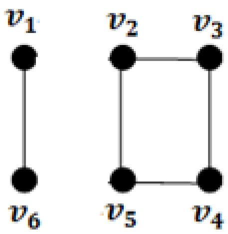
a. Dua *edge* yang terhubung di titik berderajat dua (ada 4 kali).



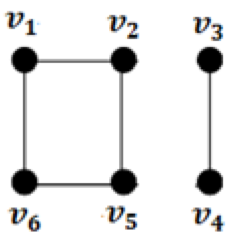
Gambar 5. Bukan Pohon Merentang dari L_3

Kemudian terlihat pada Gambar 5. merupakan bukan pohon merentang karena terdapat titik terasing dan adanya *cycle*.

b. Sepasang *edge* yang berhadapan dan bukan merupakan anak tangga (ada 2 pasang).

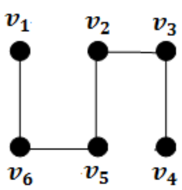


Gambar 6. Bukan Pohon Merentang dari L_3 bagian a



Gambar 7. Bukan Pohon Merentang dari L_3 bagian b

Kemudian terlihat pada Gambar 6 dan 7 merupakan bukan pohon merentang karena terdapat *edge* yang tidak terhubung dan masih mengandung *cycle*. Jadi pohon merentang yang bisa dibentuk dari *graph* L_3 adalah $21 - 4 - 2 = 15$ pohon dan bentuk geometrisnya dapat dilihat pada Gambar 4. Terdapat beberapa jenis pohon merentang pada *graph* tangga L_3, salah satunya pada gambar 8 yaitu:



Gambar 8. Perwakilan pohon merentang *graph* tangga L_3

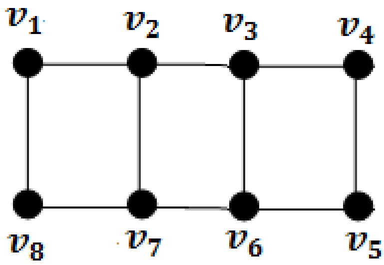
Nilai k dari *k-defisiensi* titik ditentukan menggunakan persamaan rumus (1) dan didapatkan untuk perhitungan *k-defisiensi* titik:

1. Untuk titik v_1, $k = 2 - 1 = 1$
2. Untuk titik v_2, $k = 3 - 2 = 1$
3. Untuk titik v_3, $k = 2 - 2 = 0$
4. Untuk titik v_4, $k = 2 - 1 = 1$
5. Untuk titik v_4, $k = 3 - 2 = 1$
6. Untuk titik v_4, $k = 2 - 2 = 0$

Dengan demikian *k-defisiensi* titik dari *graph* tangga L_3 adalah $1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4$

3.3 Pohon Merentang dan k-defisiensi Titik *Graph* Tangga L_4

Graph tangga L_4 dapat ditunjukkan dengan gambar berikut:

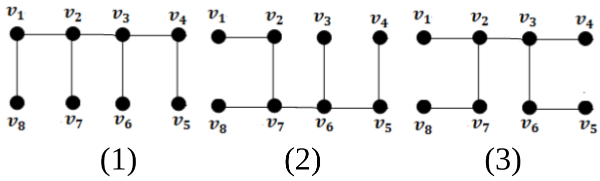


Gambar 9. *Graph* Tangga L_4

Untuk mendapatkan pohon merentang di *graph* tangga L_4 yaitu dengan menghilangkan tiga *edge*nya, dan didapatkan $C_7^{10} = \frac{10.9.8.7!}{7!3!} = 120$. Tetapi untuk di *graph* tangga L_3 terdapat pengambilan dua *edge* yang tidak dapat membentuk pohon merentang, antara lain:

a. Dua *edge* yang terhubung di titik paling ujung dan masing-masing satu *edge* selain di tengah dan bukan anak tangga (ada 8 bentuk)
b. Satu anak tangga, dan sepasang selain anak tangga yang saling sehadap (ada 12 bentuk)
c. Ketiga *edge* yang terhubung dalam satu titik (ada 4 bentuk)
d. Dua anak tangga, dan satu *edge* yang terhubung dalam dua titik (ada 4 bentuk selain tengah)
e. Satu pasang *edge* yang sehadap bukan anak tangga dan satu *edge* selain anak tangga lainnya (ada 12 bentuk)
f. *Edge* yang berada di titik berderajat dua dan satu anak tangga yang tidak berdekatan dengan dua *edge* tadi (ada 8 bentuk)

Berdasarkan alibi-alibi yang didapat, dengan demikian jumlah pohon merentangnya adalah $120 - 8 - 12 - 4 - 4 - 12 - 8 = 72$. *Graph* tangga L_4 memiliki pohon merentang yaitu:



Gambar 10. Beberapa Perwakilan Pohon Merentang *Graph* Tangga L_4

Nilai k dari *k-defisiensi* titik ditentukan menggunakan persamaan rumus (1) dan didapatkan untuk perhitungan *k-defisiensi* titik:

1. Untuk titik v_1 nilai $k = 2 - 2 = 0$
2. Untuk titik v_2 nilai $k = 3 - 3 = 0$
3. Untuk titik v_3 nilai $k = 3 - 3 = 0$
4. Untuk titik v_4 nilai $k = 2 - 2 = 0$
5. Untuk titik v_5 nilai $k = 2 - 1 = 1$
6. Untuk titik v_6 nilai $k = 3 - 1 = 2$
7. Untuk titik v_7 nilai $k = 3 - 1 = 2$
8. Untuk titik v_8 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Dengan demikian *k-defisiensi* titik dari *graph* tangga L_4 adalah $0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 + 2 + 1 = 6$.

Selanjutnya dari hasil perhitungan didapat bahwa:

1. Untuk *k-defisiensi* titik *graph* tangga L_2 adalah 2
2. Untuk *k-defisiensi* titik *graph* tangga L_3 adalah 4
3. Untuk *k-defisiensi* titik *graph* tangga L_4 adalah 6

Dengan demikian diperoleh konjektur:
Untuk *graph* tangga L_n didapat pola $2(n-1)$ dengan $n \geq 2, n \in N$. Untuk membuktikan pola tersebut berlaku setiap $n \geq 2, n \in N$ dibuktikan dengan induksi matematika.

1. Basis Induksi
   Untuk $n = 2$ diperoleh *k-defisiensi* titik tangga $L_2 \equiv 2(n-1) = 2$
2. Langkah induksi
   Diasumsikan benar *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga untuk k anak tangga, yaitu $L_k \equiv 2(k-1)$. Dibuktikan bahwa *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga untuk $k+1$ anak tangga adalah $L_{k+1} \equiv 2k$.
   Perhatikan bahwa $L_n \equiv 2(n-1)$ untuk $n = k+1$ diperoleh

$$\begin{aligned} L_{k+1} &\equiv 2(k+1-1) \\ &\equiv 2k+2-2 \\ &\equiv 2k-2+2 \\ &= 2k \end{aligned}$$

Dengan demikian *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga, untuk n anak tangga (L_n) adalah $2(n-1)$ dengan $n \geq 2, n \in N$ terbukti benar.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan dari penelitian ini, diperoleh kesimpulan bahwa *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga, untuk n anak tangga (L_n) adalah $2(n-1)$ dengan $n \geq 2, n \in N$. Sehingga jika *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga untuk k anak tangga, yaitu $L_k \equiv 2(k-1)$, maka untuk $k+1$ anak tangga diperoleh $L_{k+1} \equiv 2k$. Untuk *k-defisiensi* pada setiap anak tangganya ialah:

1. *Graph* tangga L_2 memiliki *k-defisiensi* titik $2(2-1) = 2$.
2. *Graph* tangga L_3 memiliki *k-defisiensi* titik $2(3-1) = 4$.
3. *Graph* tangga L_4 memiliki *k-defisiensi* titik $2(4-1) = 6$.
   ⋮

Berlaku hingga *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga L_n.

Penulis menyarankan untuk perhitungan *k-defisiensi* titik pada *graph* tangga, bisa mencoba perhitungan pada jumlah *edge* nya. Mungkin akan ditemukan pola seperti yang dilakukan pada perhitungan terhadap titik di penelitian ini.

Pada penulisan ini hanya menghitung *k-defisiensi* titik untuk jenis *graph* tangga saja. Jika ingin melanjutkan penelitian, dapat menambahkan *graph* jenis lain. Apakah dalam *graph* jenis lain terdapat pola pada perhitungan *k-defisiensi* titik pada *graph* tersebut atau tidak.

DAFTAR PUSTAKA

Anggraini, Puspita. 2011. *Total k-defisiensi Titik dari Pohon Merentang Suatu Graph Terhubung.* Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

Aprilia, Ira. 2011. *Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic Pada Graph Tangga.*Tidakdipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Chartrand, G., Zhang, P. 2005. *A First Course in Graph Theory*. *Dover Publication*: New York

Hanani, Hilmiyah. 2014. *Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graph Tangga* Permata. Jember: Universitas Jember

Kurniawan, Haris. 2009. *Spectrum Graph Komplit (Kn),* $n \geq 2$ dan $n \in N$. UIN Malang: Malang

Slamin. 2014. *Total Vertex Irregularity Strength of Ladder Related Graphs.* Jember: Universitas Negeri Jember.