

GRAF DUAL ANTIPRISMA DAN DIMENSI METRIKNYA

Fenny Fitriani^{1§}, Sari Cahyaningtias²

¹Universitas PGRI Adi Buana, Jl. Dukuh Menanggal XII No. 4, Surabaya [fenny_f@unipasby.ac.id]

²Universitas PGRI Adi Buana, Jl. Dukuh Menanggal XII No. 4, Surabaya [sari@unipasby.ac.id]

[§]Corresponding Author

ABSTRACT

Dual graph is one form of graph that can only be formed from graphs whose edges do not intersect each other. One of the graphs that can be converted into dual graphs is the antiprism graph A_m^n . Antiprism graph A_m^n is a graph that is formed from the absorption of vertices in the prism graph P_m^n . One of the operations performed on a graph is finding the metric dimension of the graph. These metric dimensions are used to find a minimum cardinality value of the graph. This article discusses of general form of the dual antiprism graph $A'_{m,n}$ and the metric dimensions of it. The metric dimensions of dual antiprism graph $A'_{m,n}$ is obtained in four conditions. The first condition of metric dimension is when $A'_{m,2}$. The second condition of metric dimension is when $A'_{3,n}$ with $n \geq 3$. The third condition of metric dimension is when $A'_{4,n}$ with $n \geq 3$. The last condition of metric dimension is when $A'_{m,n}$ with $m \geq 5$ and $n \geq 3$

Keywords: *antiprism graph, dual graph, metric dimension.*

1. PENDAHULUAN

Graf dual merupakan graf yang dibentuk dari mengubah *region* graf pembentuk menjadi simpul dari graf dual dan simpul-simpul yang terbentuk akan dihubungkan oleh suatu sisi apabila *region* yang direpresentasikan oleh simpul saling dipisahkan secara langsung dengan suatu sisi dari graf pembentuk (Bondy 1976). Dengan kata lain, graf dual hanya dapat dibentuk apabila sisi-sisi graf pembentuk graf dual tidak saling berpotongan. Graf antiprisma A_m^n merupakan salah satu bentuk graf yang dapat dibentuk ke dalam graf dual.

Graf antiprisma A_m^n sendiri merupakan graf yang dibentuk dari pelengkapan sisi graf prisma P_m^n dengan sisi $v_{i,j+1}v_{i+1,j}$ dengan nilai i dan j yang memenuhi berada pada rentang $1 \leq i \leq m-1$ dan $1 \leq j \leq n-1$ serta sisi $v_{m,j+1}v_{1,j}$ dengan nilai j yang memenuhi berada pada rentang $1 \leq j \leq n-1$ (Baca & Miller, 2008).

Beberapa penelitian dengan menggunakan subjek penelitian graf antiprisma telah beberapa kali dilakukan. Apriliani (2016) melakukan penelitian mengenai dimensi partisi pada graf antiprisma. Khoiriah dan Kusmayadi (2018) melakukan penelitian mengenai dimensi metrik lokal pada graf antiprisma dan graf *sun*.

Sholihah (2016) melakukan penelitian mengenai dimensi metrik pada beberapa graf khusus.

Dimensi metrik dari graf didapatkan apabila didapatkan nilai kardinilitas minimum dari himpunan pembeda dari graf pembentuk. Beberapa penelitian yang berhubungan dengan dimensi metrik antara lain penelitian mengenai analisis dimensi metrik dan himpunan pembeda jika dihubungkan keterampilan berpikir tingkat tinggi yang diteliti oleh Sulistio, Slamini, dan Dafik (2015), penelitian mengenai pencarian dimensi metrik dari famili graf tangga yang diteliti oleh Saifudin (2016), penelitian mengenai pencarian dimensi metrik dari graf $W_n + C_n$ dengan nilai $n \in \{3,4\}$ yang diteliti oleh Putra, Yulianti, dan SY (2018), penelitian mengenai pencarian dimensi metrik pada graf buku ganda yang diteliti oleh Ilmayasinta, (2019), penelitian mengenai pencarian dimensi metrik hasil operasi tertentu pada Petersen yang diperumum yang diteliti Aldino (2019), dan penelitian mengenai pencarian dimensi metrik pada penghapusan satu simpul dari graf dual prisma yang diteliti oleh Fitriani (2019).

Dari penjelasan di atas, maka dalam artikel ini dibahas bentuk umum dari graf dual

antiprisma yang terbentuk dari graf antiprisma serta pencarian dimensi metrik dari graf dual yang terbentuk.

2. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, graf yang digunakan dalam membentuk graf dual adalah graf antiprisma A_m^n . Langkah-langkah yang dilaksanakan dalam penelitian ini dapat dijabarkan sebagai berikut:

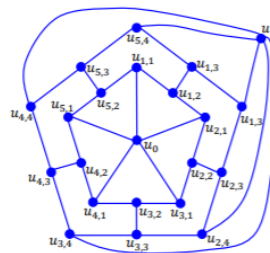
- Mengubah graf antiprisma A_m^n ke dalam bentuk graf dualnya.
- Menentukan batas bawah dan batas atas dari dimensi metrik graf dual
- Menentukan nilai dari dimensi metrik graf dual yang terbentuk dari graf antiprisma A_m^n

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, berikut diberikan definisi dari graf dual yang dibentuk dari graf antiprisma A_m^n

Definisi 3.1 Graf $A'_{m,n}$ merupakan graf dual yang terbentuk dari graf antiprisma A_m^n dimana region dari graf antiprisma merupakan simpul dari graf dual antiprisma dan sisi yang menghubungkan dua simpul dari graf dual antiprisma terbentuk jika region dari graf antiprisma yang direpresentasikan oleh simpul saling dipisahkan secara langsung dengan suatu sisi

Graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ yang didefinisikan tersebut memiliki himpunan simpul $V(A'_{m,n}) = \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq j \leq 2n - 2\} \cup \{u_0, u_n\}$ dengan himpunan sisi $E(A'_{m,n}) = \{u_{i,j}u_{i,j+1} | 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq j \leq 2n - 2\} \cup \{u_{i,2j}u_{i+1,2j-1} | 1 \leq i < m \text{ dan } 1 \leq j < n\} \cup \{u_0u_{i,1} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{m,2i}u_{1,2i-1} | 1 \leq i < n\} \cup \{u_nu_{i,2n-2} | 1 \leq i \leq m\}$. Dari himpunan sisi dan himpunan simpul graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ tersebut, didapatkan $|E(A'_{m,n})| = m(3n - 2)$ dan $|V(A'_{m,n})| = 2m(n - 1) + 2$.



Gambar 1. Graf dual antiprisma $A'_{5,3}$

Satu contoh dari graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ adalah graf dual antiprisma $A'_{5,3}$ yang ditunjukkan pada Gambar 1. Graf dual antiprisma pada Gambar 1 terbentuk dari graf antiprisma A_5^3 . Himpunan simpul dari graf $A'_{5,3}$ adalah $V(A'_{5,3}) = \{u_0, u_3\} \cup \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq 5 \text{ dan } 1 \leq j \leq 4\}$ dengan himpunan simpul $E(A'_{5,3}) = \{u_{i,j}u_{i,j+1} | 1 \leq i \leq 5 \text{ dan } 1 \leq j \leq 4\} \cup \{u_{i,2j}u_{i+1,2j-1} | 1 \leq i < 5 \text{ dan } 1 \leq j < 3\} \cup \{u_0u_{i,1} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{u_{5,2i}u_{1,2i-1} | 1 \leq i < 3\} \cup \{u_3u_{i,4} | 1 \leq i \leq 5\}$.

Dari definisi graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ yang didapatkan di atas, dimensi metrik dari graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ didapatkan dalam empat keadaan yaitu dimensi metrik dari $A'_{m,2}$, dimensi metrik dari $A'_{3,n}$ dengan $n \geq 3$, dimensi metrik dari $A'_{4,n}$ dengan $n \geq 3$, dimensi metrik dari $A'_{m,n}$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$.

Dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{m,2}$

Pada graf dual antiprisma $A'_{m,2}$, didapatkan himpunan simpul dari graf $V(A'_{m,2}) = \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 < j \leq 2\} \cup \{u_0, u_2\}$ dan himpunan sisi dari graf $E(A'_{m,2}) = \{u_{i,1}u_{i,2} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{i,2}u_{i+1,1} | 1 \leq i < m\} \cup \{u_2u_{i,2} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_0u_{i,1} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_{m,2}u_{1,1}\}$. Dari himpunan simpul dan himpunan sisi tersebut maka didapatkan $|V(A'_{m,2})| = 2m + 2$ dan $|E(A'_{m,2})| = 4m$.

Dimensi metrik dari graf dual antiprisma $A'_{m,2}$ didapatkan pada tiga keadaan, yaitu pada saat $m = 3, m = 4$, dan $m \geq 5$. Berikut merupakan teorema yang menunjukkan nilai dari dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{m,2}$

Teorema 3.2 Jika graf dual antiprisma graf $A'_{m,2}$ merupakan graf dual yang terbentuk dari graf antiprisma A_m^2 , maka

$$\dim(A'_{m,2}) = \begin{cases} m, & \text{untuk } m = 3 \text{ atau } m = 4 \\ m - 1, & \text{untuk } m \geq 5 \end{cases}$$

Bukti:

Dalam pembuktian $\dim(A'_{m,2}) = m$ untuk $m = 3$ atau $m = 4$ mudah untuk didapatkan himpunan W sehingga hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{m,2})$ terhadap himpunan W berbeda. Atau dengan kata lain mudah untuk didapatkan $\dim(A'_{m,2}) \leq m$. Dengan mengambil salah satu simpul yang ada pada himpunan W , maka hasil representasi dari simpul $u \in V(A'_{m,2})$ terhadap himpunan W terdapat hasil representasi yang sama. Sehingga $\dim(A'_{m,2}) \geq m$. Karena $m \leq \dim A'_{m,2} \leq m$, sehingga $\dim(A'_{m,2}) = m$ untuk $m = 3$ atau $m = 4$.

Untuk pembuktian $\dim(A'_{m,2}) = m - 1$ untuk $m \geq 5$, untuk mendapatkan batas atas dimensi metrik yaitu $\dim(A'_{m,2}) \leq m - 1$ maka pembuktian dilakukan pada dua keadaan yaitu jika m merupakan bilangan ganas dan jika m merupakan bilangan genap.

Jika m bilangan ganas

Untuk m merupakan bilangan ganas, jika dimisalkan himpunan pembeda W yang diambil adalah $W = \{u_{2i-1,1}, u_{2i-1,2} | 1 \leq i < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$ yang memuat $m - 1$ simpul maka didapatkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{m,2})$ berbeda. Atau dapat dituliskan $\dim(A'_{m,2}) \leq m - 1$.

Jika m bilangan genap

Untuk m merupakan bilangan genap, jika dimisalkan himpunan pembeda W yang diambil adalah $W = \{u_{2i-1,1}, u_{2i-1,2} | 1 \leq i < \frac{m}{2}\} \cup \{u_{m-2,2}\}$ yang memuat $m - 1$ simpul maka didapatkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{m,2})$ berbeda. Atau dapat dituliskan $\dim(A'_{m,2}) \leq m - 1$.

Untuk pembuktian batas bawah yaitu $\dim(A'_{m,2}) \geq m - 1$. Jika dimisalkan $\dim(A'_{m,2}) = m - 2$ maka: (i) jika himpunan pembeda W memiliki anggota himpunan adalah $u_{i,1}$ dengan $1 \leq i \leq m - 2$, maka dapat ditemukan hasil representasi yang sama dari simpul $u_{m-1,1}$ dan simpul $u_{m,1}$ terhadap himpunan pembeda W ; (ii) jika himpunan pembeda W memiliki anggota himpunan adalah $u_{i,2}$ dengan $1 \leq i \leq m - 2$, maka dapat ditemukan hasil representasi yang sama dari

simpul $u_{m-1,2}$ dan simpul $u_{m,2}$ terhadap himpunan pembeda W ; (iii) jika $m - 2$ yang diambil adalah genap dengan himpunan pembeda $W = \{u_{i,1}, u_{j,2} | i \neq j\}$, maka dapat ditemukan hasil representasi yang sama dari simpul $u_{a,1}$ dan simpul $u_{b,1}$ terhadap himpunan pembeda W dengan $a \neq b$; (iv) jika $m - 2$ yang diambil adalah genap dengan himpunan pembeda $W = \{u_{i,1}, u_{j,2} | i = j\}$, maka dapat ditemukan hasil representasi yang sama dari simpul $u_{a,1}$ dan simpul $u_{b,1}$ terhadap himpunan pembeda W dengan $a \neq b$. Dari beberapa himpunan W tersebut didapat kardinalitas dari $|W| \geq m - 1$, atau dengan kata lain $\dim(A'_{m,2}) \geq m - 1$.

Karena $m - 1 \leq \dim(A'_{m,2}) \leq m - 1$, maka didapatkan $\dim(A'_{m,2}) = m - 1$. ■

Dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{3,n}$ dengan $n \geq 3$

Berikut merupakan teorema yang menunjukkan nilai dari dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{3,n}$ dengan $n \geq 3$

Teorema 3.3 *Jika graf dual antiprisma graf $A'_{3,n}$ merupakan graf dual yang terbentuk dari graf antiprisma A_3^n dengan $n \geq 3$, maka*

$$\dim(A'_{3,n}) = 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$$

Bukti:

Misalkan himpunan bilangan pembeda yang diambil adalah $W = \{u_{1,6i-1}, u_{2,6i-1} | 1 \leq i < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \text{ untuk } \lfloor \frac{n}{3} \rfloor > 1\} \cup$

$\{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2n-3}, u_{2,2n-3}\}$. Jika n yang diambil adalah $n \bmod 3 \equiv 0$ atau $n \bmod 3 \equiv 1$, maka didapatkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{3,n})$ berbeda. Jika n yang diambil adalah $n \bmod 3 \equiv 2$, maka hasil representasi simpul untuk simpul-simpul sikel terluar dari graf memiliki hasil yang sama. Sehingga untuk $n \bmod 3 \equiv 2$, jika himpunan bilangan pembeda yang diambil adalah $W = \{u_{1,6i+1}, u_{2,6i+1} | 1 \leq i < \frac{n-2}{3} \text{ untuk } \frac{n-2}{3} > 1\} \cup$

$\{u_{1,3}, u_{2,3}, u_{1,2n-5}, u_{2,2n-5}\}$ menyebabkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{3,n})$ berbeda. Kardinalitas dari himpunan pembeda W tersebut adalah $2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$. Karena hasil representasi tiap simpul berbeda, maka

$$\dim(A'_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2.$$

Misalkan kardinalitas dari himpunan W terdiri atas $2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$, maka (i) jika himpunan W dibentuk dari satu simpul dari $2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ sikel yang berbeda pada graf dual, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W ; (ii) jika terdapat dua sampai tiga simpul dari himpunan W diambil dari sikel yang pertama, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W . Dari kondisi (i) dan (ii) tersebut, maka kardinalitas dari himpunan W harus lebih dari $2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ atau $|W| \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$. Sehingga didapatkan $\dim(A'_{3,n}) \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$.

Karena $2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 \leq \dim(A'_{3,n}) \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$, maka $\dim(A'_{3,n}) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$. ■

Dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{4,n}$ dengan $n \geq 3$

Berikut merupakan teorema yang menunjukkan nilai dari dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{4,n}$ dengan $n \geq 3$

Teorema 3.4 Jika graf dual antiprisma graf $A'_{4,n}$ merupakan graf dual yang terbentuk dari graf antiprisma A_4^n dengan $n \geq 3$, maka

$$\dim(A'_{4,n}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Bukti:

Misalkan himpunan bilangan pembeda yang diambil adalah $W = \{u_{1,2}, u_{4,2}\} \cup \{u_{4,6(2i-1)} | 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor\} \cup \{u_{2,6i+4} | i \text{ ganjil pada } 1 \leq i \leq k\} \cup \{u_{2,6i+2} | i \text{ genap pada } 1 \leq i \leq k\} \cup \{u_{1,2n-3} | n \bmod 3 \equiv 1 \text{ atau } n \bmod 3 \equiv 2 \text{ dan } n \text{ ganjil}\} \cup \{u_{3,2n-3} | n \bmod 3 \equiv 0 \text{ dan } n \text{ ganjil}\}$ dimana untuk $n \bmod 6 \equiv 0$ dan $n \bmod 6 \equiv 1$ nilai $k = 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 1$, sedangkan untuk $n \bmod 6 \equiv a$ dengan $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ nilai $k = 2 \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$. Kardinalitas dari himpunan pembeda W adalah $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Dengan menggunakan himpunan pembeda W tersebut, maka didapatkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{4,n})$ berbeda, sehingga $\dim(A'_{4,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Misalkan kardinalitas dari himpunan W terdiri

atas $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, maka (i) jika himpunan W dibentuk dari satu simpul dari $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sikel yang berbeda pada graf dual, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W ; (ii) jika $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq 4$ simpul dari himpunan W diambil dari sikel yang pertama, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W . Dari kondisi (i) dan (ii) tersebut, maka kardinalitas dari himpunan W harus lebih dari $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ atau $|W| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Sehingga didapatkan $\dim(A'_{4,n}) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Karena didapatkan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq \dim(A'_{4,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, maka $\dim(A'_{4,n}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. ■

Dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$

Dimensi metrik dari graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ didapatkan pada dua keadaan, yaitu pada saat $n = m + i$ dengan $1 \leq i < m$ dan $n \geq 2m$. Berikut merupakan teorema yang menunjukkan nilai dari dimensi metrik graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$

Teorema 3.5 Jika graf dual antiprisma graf $A'_{m,n}$ merupakan graf dual yang terbentuk dari graf antiprisma A_m^n dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$, maka

$$\dim(A'_{m,n}) = \begin{cases} 2m - 4, & \text{untuk } n = m + i \text{ dengan } 1 \leq i < m \\ n - 3, & \text{untuk } n \geq 2m \end{cases}$$

Bukti:

Pertama akan dibuktikan untuk $n = m + i$ dengan $1 \leq i < m$ maka $\dim(A'_{m,n}) = 2m - 4$. Misalkan himpunan bilangan pembeda yang diambil adalah $W = \{u_{i,2}, u_{i,2n-3} | 1 \leq i \leq m - 2\}$. Dengan menggunakan himpunan pembeda W tersebut, maka didapatkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{m,n})$ berbeda. Kardinalitas dari himpunan pembeda W tersebut adalah $2m - 4$. Karena hasil representasi tiap simpul berbeda, maka $\dim(A'_{m,n}) \leq 2m - 4$.

Misalkan kardinalitas dari himpunan W terdiri atas $2m - 3$ dan himpunan W terdiri atas simpul $u_{i,2}$ dengan $1 \leq i \leq m - 2$ dan $m - 1$

simpul yang lain yang terletak pada sikel yang berbeda. Dari himpunan W tersebut, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W yaitu terletak pada simpul yang berada pada sikel terluar. Sehingga menyebabkan kardinalitas dari himpunan W harus lebih dari $2m - 3$ atau $|W| \geq 2m - 4$. Dengan kata lain didapatkan $\dim(A'_{m,n}) \geq 2m - 4$. Karena $2m - 4 \leq \dim(A'_{m,n}) \leq 2m - 4$, maka didapatkan $\dim(A'_{m,n}) = 2m - 4$.

Selanjutnya, dilakukan pembuktian bahwa untuk $n \geq 2m$ maka $\dim(A'_{m,n}) = n - 3$. Misalkan himpunan bilangan pembeda yang diambil adalah $W = \{u_{i,2}, u_{i,2n-3} \mid 1 \leq i \leq m - 2\} \cup \{u_{1,2(m+i)} \mid 0 \leq i \leq 2m - n\}$. Dengan menggunakan himpunan pembeda W tersebut, maka didapatkan hasil representasi setiap simpul $u \in V(A'_{m,n})$ berbeda. Kardinalitas dari himpunan pembeda W tersebut adalah $n - 3$. Karena hasil representasi tiap simpul berbeda, maka $\dim(A'_{m,n}) \leq n - 3$.

Misalkan kardinalitas dari himpunan W terdiri atas $n - 4$, maka (i) jika $u_{i,1}$ atau $u_{i,2n-3}$ untuk $1 \leq i \leq m$ merupakan bagian dari himpunan W dan sisa simpul dari himpunan W berbeda pada sikel yang berbeda-beda, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W ; (ii) jika $n - 4$ simpul yang ada pada himpunan W diambil dari sikel yang berbeda, maka dapat ditemukan hasil representasi simpul yang sama terhadap himpunan W . Dari kondisi (i) dan (ii) tersebut menyebabkan kardinalitas dari himpunan W harus lebih dari $n - 4$ atau $|W| \geq n - 3$. Dengan kata lain didapatkan $\dim(A'_{m,n}) \geq n - 3$.

Karena $n - 3 \leq \dim(A'_{m,n}) \leq n - 3$, maka didapatkan $\dim(A'_{m,n}) = n - 3$. ■

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian pada pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

- Graf dual dari graf antiprisma A_m^n adalah graf dual antiprisma $A'_{m,n}$ dengan jumlah sisi dan simpul dari graf dual antiprisma secara berturut-turut adalah $m(3n - 2)$ dan $2m(n - 1) + 2$.
- Dimensi metrik dari graf dual antiprisma didapatkan dalam empat keadaan yaitu

dimensi metrik pada $A'_{m,2}$, dimensi metrik pada $A'_{3,n}$ dengan $n \geq 3$, dimensi metrik pada $A'_{4,n}$ dengan $n \geq 3$, dan dimensi metrik pada $A'_{m,n}$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$.

Dimensi metrik yang didapatkan pada empat keadaan tersebut antara lain: i) Dimensi metrik graf dual antiprisma pada $A'_{m,2}$ adalah $\dim(A'_{m,2}) = m$ untuk $m = 3$ atau $m = 4$ dan $\dim(A'_{m,2}) = m - 1$ untuk $m \geq 5$; ii) Dimensi metrik graf dual antiprisma pada $A'_{3,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah $\dim(A'_{3,n}) = 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2$; iii) Dimensi metrik graf dual antiprisma pada $A'_{4,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah $\dim(A'_{4,n}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$; dan iv) Dimensi metrik graf dual antiprisma pada $A'_{m,n}$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 3$ adalah $\dim(A'_{m,n}) = 2m - 4$ untuk $n = m + i$ dengan $1 \leq i < m$ dan $\dim(A'_{m,n}) = n - 3$ untuk $n \geq 2m$.

Dari pembahasan yang telah dijabarkan dan penelitian-penelitian terdahulu, diketahui bahwa masih kurangnya penelitian mengenai graf dual. Sehingga untuk penelitian lebih lanjut, peneliti dapat melakukan suatu penelitian dengan topik pembahasan mengenai graf dual. Salah satu contohnya adalah penelitian mengenai dimensi metrik dari graf dual yang terbentuk dari beberapa jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Aldino, A. A. (2019). *Dimensi Metrik Hasil Operasi Tertentu Graf Petersen Diperumum*. Bandar Lampung: Digilib UNILA.
- Apriliani, T. (2016). *Dimensi Partisi Pada Graf Antiprisma, Graf Mongolian Tent, dan Graf Stacked Book*. Surakarta: UPT Perpustakaan Universitas Sebelas Maret .
- Baca, M., & Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs, a Wealth of Problems and Some Solutions*. Boca Raton: BrownWalker Press.
- Fitriani, F. (2019, Juli). Dimensi Metrik Penghapusan Satu Simpul Graf Dual

- Prisma. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 4 (1), 108-113.
- Ilmayasinta, N. (2019). Dimensi Metrik pada Graf Buku Ganda. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 1 (01), 21-27.
- Khoiriah, S., & Kusmayadi, T. A. (2018). Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Antiprisma Dan Graf Sun. *Journal of Mathematics and Mathematics Education*, 8 (1), 9-15.
- Putra, R. N., Yulianti, L., & SY, S. (2018). Dimensi Metrik Dari Graf $W_n + C_n$, Untuk $n \geq 3, 4$. *Jurnal Matematika UNAND*, VII (2), 165 – 169.
- Saifudin, I. (2016, Agustus). Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga. *JUSTINDO, Jurnal Sistem & Teknologi Informasi Indonesia*, 1 (2), 105-112.
- Sholihah, W. N. (2016). *Dimensi Metrik Dan Non-Isolated Resolving Number Pada Beberapa Graf Khusus*. Jember: Digital Repository Universitas Jember.
- Sulistio, W., Slamini, & Dafik. (2015). Analisis Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung Pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Kadikma*, 6 (3), 26-35.