E-Jurnal Matematika Vol. 8(4), November 2019, pp.277-284 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2019.v08.i04.p265

PERBANDINGAN METODE *SEPARABLE PROGRAMMING* DAN *QUADRATIC PROGRAMMING* DALAM PEMECAHAN MASALAH PEMROGRAMAN NONLINIER

I Gede Wikan Adiwiguna[1§], G.K. Gandhiadi[2], Ni Made Asih[3]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: wikanadiwiguna@gmail.com]
[2]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: gandhiadi@unud.ac.id]
[3]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Udayana [Email: madeasih@unud.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

ABSTRACT

The Separable programming method solves nonlinear programming problems by transforming a nonlinear shape that consists of a single variable into a linear function and resolved by the simplex method. Meanwhile, the quadratic programming method accomplishes the two degrees nonlinear model by transforming the nonlinear shape into linear function with the Kuhn Tucker Conditions and resolved by the simplex Wolfe method. Both of these methods are applied to the Markowitz's portfolio model, which is to find the proportion of stock funds to obtain maximum profits by combination of three shares, such as BMRI, GGRM, and ICBP. The completion using the quadratic programming method is more effective and efficient with the same optimum value.

Keywords: *Markowitz's portfolio, nonlinear programming, quadratic programming, separable programming*

1. PENDAHULUAN

Pemecahan masalah optimasi dapat diselesaikan dengan pemrograman linier dan nonlinier. Semakin kompleksnya permasalahan yang ada di kehidupan nyata membuat pemecahan masalah optimasi seringkali merupakan masalah nonlinier, salah satunya seperti penelitian yang dilakukan oleh Insani (2017) yang membahas tentang optimasi tanaman pangan di kota Magelang dimana fungsi tujuan yang dibentuk merupakan fungsi nonlinier, sehingga diperlukan metode penyelesaian permasalahan pemrograman nonliner untuk memperoleh solusi optimumnya.

Metode untuk memperoleh solusi dari masalah nonlinier secara umum yaitu dengan pemecahan langsung (*direct*) atau tidak langsung (*indirect algorithms*) (Taha, 2007). Salah satu contoh metode langsung adalah metode pencarian langsung dan metode gradien. Pada metode pemecahan langsung letak titik optimum ditentukan dengan menyelidiki nilai fungsinya, titik yang memiliki nilai fungsi terbesar atau terkecil dibandingkan dengan nilai fungsi pada titik-titik yang lain maka itulah titik optimumnya. Sedangkan dalam metode tidak langsung, masalah asli digantikan dengan suatu alat bantu atau asumsi tambahan dalam menentukan nilai optimumnya, contohnya *separable programming*, *quadratic programming*, *Karush Kuhn Tucker*, *chance constrained programming* dan lainnya.

Separable programming merupakan metode yang dikembangkan oleh C.E Miller pada tahun 1963 yang memiliki asumsi bahwa semua fungsi tujuan dan kendalanya merupakan fungsi yang tiap sukunya hanya melibatkan variabel tunggal, sehingga fungsi tersebut dapat dipisahkan menjadi sejumlah fungsi yang hanya memuat satu variabel (Hillier & Lieberman, 2005). Sedangkan, metode pemrograman kuadratik yaitu permasalahan pemrograman nonlinier dengan fungsi tujuan berupa fungsi kuadratik dan kendala berupa fungsi linier, sehingga perbedaan satu-satunya dengan pemrograman linier adalah fungsi tujuannya melibatkan pangkat dua dari variabel atau perkalian dari dua variabel.

Persamaan ide dari kedua metode ini adalah mentransformasikan fungsi tujuan yang merupakan fungsi nonlinier menjadi fungsi linier lalu diselesaikan dengan metode simpleks. Selain itu, solusi dari kedua metode ini bersifat taksiran (*aproximation*) karena sampai saat ini belum ada metode standar yang dapat menyelesaikan permasalahan nonlinier yang memiliki beragam bentuk dan teknik penyelesaian tersendiri, berbeda halnya dengan metode simpleks yang telah menjadi metode standar yang dapat memecahkan berbagai permasalahan pemrograman linier (Mulyono, 1989).

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah membandingan metode *separable programming* dan *quadratic programming* dalam pemecahan masalah pemrograman nonlinier dari aspek proses dan hasilnya untuk mengetahui bagaimana karakteristik dari kedua metode ini dalam menyelesaikan suatu permasalahan yang sama. Penerapan kedua metode ini menggunakan portofolio saham sebagai objek penelitian, yaitu mencari proporsi dana untuk memperoleh keuntungan maksimum dari kombinasi proporsi tiga saham menggunakan model portofolio Markowitz.

2. METODE PENELITIAN

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu data yang diperoleh tidak secara langsung dari objek penelitian melainkan diperoleh dari website *www.investing.com*. Data yang digunakan adalah data kuantitatif, yaitu data historis penutupan harga saham (*closing price*) mingguan perusahaan yang terdaftar di indeks LQ45 dengan teknik pengumpulan data untuk memilih ketiga saham tersebut menggunakan teknik studi dokumen.

Tahapan analisis data dengan metode *separable programming* dan *quadratic programming* sebagai berikut

1. Menghitung *return* dari masing-masing data historis harga saham (*closing price*) dengan persamaan berikut:

$$R_{it} = \ln\left(\frac{P_{it}}{P_{i(t-1)}}\right) \tag{1}$$

R_{it} = *Return* saham ke-i pada periode ke-t
P_{it} = Harga saham ke-i pada periode ke-t
$P_{i(t-1)}$ = Harga saham ke-i pada periode ke-$(t-1)$

2. Menghitung *expected return*, varians dan kovarian dengan persamaan berikut:

$$E(R_i) = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_{it}}{N} \tag{2}$$

dengan,
$E(R_i)$ = *Expected return* saham ke-i
R_{it} = *Return* saham ke-i pada periode t
N = Banyaknya *return*

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{it} - E(R_i))^2}{N} \tag{3}$$

dengan,
σ_i^2 = Risiko saham ke-i
$E(R_i)$ = *Expected return* saham ke-i
N = Banyaknya *return*

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{it}-E(R_i))(R_{jt}-E(R_j))}{N} \tag{4}$$

σ_{ij} = Kovarian antara *return* saham i dan j
R_{it} = *Return* saham ke-i pada periode t
$E(R_i)$ = *Expected return* saham ke-i
R_{jt} = *Return* saham ke-j pada periode t
$E(R_j)$ = *Expected return* saham ke-j

3. Membentuk model fungsi tujuan dan kendala berdasarkan model portofolio markowitz.
4. Menyelesaikan model fungsi tujuan dan kendala yang telah dibentuk dengan metode *separable programming* dan *quadratic programming* menjadi fungsi linier.
Langkah penyelesaian menggunakan metode *separable programming* sebagai berikut,
   a. Membentuk fungsi *separable.*
   Maksimumkan atau minimumkan
   $$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$
   dengan kendala,
   $$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j)\ (\leq, =, \geq) b_i,$$
   $$i = 1,2,\dots,m$$
   $$x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n$$
   b. Menentukan banyaknya *gridpoint* (x_{vj}).
   c. Membentuk nilai fungsi *gridpoint* $f_j(x_{vj})$ dan $g_{ij}(x_{vj})$.
   d. Membentuk fungsi tujuan dan kendala linier.
   Maksimumkan atau minimumkan
   $$z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{v} \lambda_{kj} f_j(x_{kj})$$

E-Jurnal Matematika Vol. 8(4), November 2019, pp.277-284 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2019.v08.i04.p265

dengan kendala,
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{v} g_{ij}(x_{kj})\lambda_{kj}\ (\leq,\geq) b_i,$
$i = 1,2,\dots,m$
$\sum_{k=1}^{v}\lambda_{kj} = 1\,, j = 1,2,\dots,n$
$\lambda_{kj} \geq 0,$
$k = 1,2,\dots,v\ dan\ j = 1,2,\dots,n$

e. Menyelesaikan bentuk linier dengan metode simpleks.

Langkah penyelesaian menggunakan metode kuadratik sebagai berikut

a. Mengidentifikasi fungsi tujuan dan kendala ke dalam bentuk umum dari masalah pemrograman kuadratik.
Maksimumkan $\mathbf{z} = \mathbf{CX} + \mathbf{X^TDX}$
dengan kendala,

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$
$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

b. Membentuk model linier fungsi tujuan dan kendala menggunakan syarat *Kuhn Tucker*.
Aplikasi syarat *Kuhn Tucker* berdasarkan permasalahan kuadratik tersebut yaitu

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{U} \geq \mathbf{0}$$
$$\nabla\mathbf{z} - \left(\boldsymbol{\lambda^T}, \mathbf{U^T}\right)\nabla\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$
$$\lambda_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = 0,$$
$$i = 1,2,\dots,m$$
$$\mu_j x_j = 0, j = 1,2,\dots,n$$
$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$
$$-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$$

c. Mencari solusi optimal dengan melakukan proses iterasi simpleks metode *wolfe*.
Dalam perhitungan simpleks *wolfe* terdapat kondisi tambahan yang disebut dengan *complementary slackness*, yaitu
$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$, untuk setiap i dan j

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Objek penelitian pada studi kasus ini adalah data harga penutupan saham mingguan Bank Mandiri Tbk (BMRI) yang dinotasikan dengan x_1, Gudang Garam Tbk (GGRM) yang dinotasikan dengan x_2 dan Indofood CBP Sukses Makmur Tbk (ICBP) dinotasikan dengan x_3 periode 1 januari 2017 sampai 23 Desember 2018 yang diperoleh dari website *www.investing.com*. Sebelum melakukan perhitungan menggunakan metode *separable programming* dan *quadratic programming* terlebih dahulu dibentuk model nonlinier berdasarkan model portofolio markowitz dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menghitung *return* masing-masing saham menggunakan persamaan (1).
2. Menghitung *expected return* masing-masing saham menggunakan persamaan (2).
3. Menghitung risiko menggunakan persamaan (3) dan kovarian menggunakan persamaan (4).

Hasil perhitungan total *return*, *expected return*, varian dan kovarian disajikan dalam Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Total *return*, *expected return* dan varian.

i	Saham	Total *Return*	*Expected return* ($E(R_i)$)	Varian (σ_i^2)
1	BMRI	0,2590	0,00257	0,00146
2	GGRM	0,2608	0,00258	0,00141
3	ICBP	0,2036	0,00202	0,00077

Tabel 2. Kovarian (σ_{ij})

No.	Saham	Kovarian (σ_{ij})
1	BMRI/GGRM	0,000625
2	BMRI/ICBP	0,000364
3	GGRM/ICBP	0,000396

Membentuk Model Nonlinier dari Kombinasi Proporsi Tiga Saham Berdasarkan Model Portofolio Markowitz.

Expected return, varian dan kovarian yang diperoleh dari perhitungan sebelumnya disubstitusikan kedalam model portofolio Markowitz, yaitu
Maksimumkan,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i E(R_i) - (\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i\, x_j\, \sigma_{ij}),\ i \neq j$$

dengan kendala,

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \leq 1$$

$$x_j \geq 0, \text{untuk } j = 1,2,3.$$

Sehingga diperoleh model portofolio untuk mendapatkan keuntungan maksimum dengan cara memaksimalkan *expected return* pada tingkat risiko tertentu yaitu
Maksimumkan,

$$z = 0{,}00257x_1 + 0{,}00258x_2 + 0{,}00202x_3 - (0{,}00146x_1^2 + 0{,}00141x_2^2 + 0{,}00077x_3^2 + 0{,}00125x_1x_2 + 0{,}000792x_1x_3 + 0{,}000728x_2x_3) \quad (5)$$

dengan kendala,

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \leq 1, \quad x_j \geq 0, \text{untuk } j = 1,2,3. \quad (6)$$

Penyelesaian Model Menggunakan Metode *Separable programming*

Model yang telah diperoleh akan diselesaikan menggunakan metode *separable programming* dengan langkah-langkah sebagai berikut

1. Membentuk fungsi *separable*.

   Model fungsi tujuan yang terbentuk pada persamaan (5) memiliki perkalian dua variabel sehingga perlu diubah kedalam bentuk fungsi yang hanya terdiri dari satu variabel dengan menggunakan manipulasi aljabar yaitu,

   $$x_1x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$$

   Misalkan $x_1 + x_2 = x_4$ diperoleh,

   $$x_1x_2 = \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$$

   Dengan cara yang sama, maka

   $x_1x_3 = \frac{1}{2}x_5^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2$,

   dengan $x_5 = x_1 + x_3$

   dan $x_2x_3 = \frac{1}{2}x_6^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2$,

   dengan $x_6 = x_2 + x_3$.

   Oleh karena itu, persamaan (5) dapat dituliskan sebagai berikut

   $$z = 0{,}00257x_1 + 0{,}00258x_2 + 0{,}00202x_3 - [0{,}000439x_1^2 + 0{,}000421x_2^2 + 0{,}00001x_3^2 + 0{,}000625x_4^2 + 0{,}000396x_5^2 + 0{,}000364x_6^2] \quad (7)$$

   Nilai $x_1 + x_2 = x_4$, $x_1 + x_3 = x_5$ dan $x_2 + x_3 = x_6$ yang diperoleh dari memanipulasi aljabar selanjutnya menjadi kendala baru, yaitu

   $$\begin{aligned} g_1(X) &= x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ g_2(X) &= x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ g_3(X) &= x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ g_4(X) &= x_2 + x_3 - x_6 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

   Sehingga fungsi *separable* yang dapat dibentuk berdasarkan fungsi tujuan dan kendala diatas adalah

   $$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 0{,}00257x_1 - 0{,}00044x_1^2, \\ f_2(x_2) &= 0{,}00258x_2 - 0{,}0004x_2^2, \\ f_3(x_3) &= 0{,}002x_3 - 0{,}00001x_3^2, \\ f_4(x_4) &= -0{,}000625x_4^2, \\ f_5(x_5) &= -0{,}000396x_5^2, \\ f_6(x_6) &= -0{,}000364x_6^2, \end{aligned} \quad (9)$$

   dengan kendala,

   $$\begin{aligned} & g_{11}(x_1) = x_1,\ \ g_{12}(x_2) = x_2,\ \ g_{13}(x_3) = x_3, \\ & g_{21}(x_1) = x_1,\ \ g_{22}(x_2) = x_2,\ \ g_{24}(x_4) = -x_4, \\ & g_{31}(x_1) = x_1,\ \ g_{33}(x_3) = x_3,\ \ g_{35}(x_5) = -x_5, \\ & g_{42}(x_2) = x_2,\ \ g_{43}(x_3) = x_3,\ \ g_{46}(x_6) = -x_6 \end{aligned} \quad (10)$$

   $$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

2. Menentukan banyaknya *grid point*.

   Pada perhitungan ini akan digunakan 11 partisi ($v = 1,2,\ldots,11$) pada interval [0,1], yaitu 0;0,1;0,2;0,3;0,4;0,5;0,6;0,7;0,8;0,9;1. Diperoleh nilai x_{vj} untuk 11 partisi yaitu

Tabel 3. Titik Partisi Masing-Masing Variabel

E-Jurnal Matematika Vol. 8(4), November 2019, pp.277-284 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2019.v08.i04.p265

j	x_v										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
3	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
4	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
5	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
6	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Titik partisi ini selanjutnya disubstitusikan ke persamaan (9) dan (10) untuk memperoleh konstanta baru dari fungsi linier yang akan dibentuk.

3. Membentuk nilai fungsi *grid point*

   Titik-titik partisi x_{vj} yang telah dibentuk selanjutnya disubstitusikan ke persamaan (9) dan (10) untuk memperoleh nilai $f_j(x_{vj})$ dan $g_{ij}(x_{vj})$ yang merupakan konstanta baru untuk fungsi liniernya.

4. Membentuk fungsi tujuan linier

   Nilai $f_j(x_{vj})$ dan $g_{ij}(x_{vj})$ yang telah diperoleh selanjutnya disubstitusikan ke persamaan berikut

$$z = \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{11} \lambda_{kj} f_j(x_{kj})$$

dengan kendala,

$$\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{11} g_{ij}(x_{kj})\lambda_{kj}\,(\leq,\geq) b_i,$$
$$i = 1,2,3,4.$$

Sehingga diperoleh fungsi tujuan dan kendala yang baru sebagai berikut

$$z = [0\lambda_{11} + 0{,}00025\lambda_{21} + 0{,}00050\lambda_{31} + 0{,}00074\lambda_{41} + 0{,}00097\lambda_{51} + 0{,}0012\lambda_{61} + 0{,}00142\lambda_{71} + 0{,}00163\lambda_{81} + 0{,}00183\lambda_{91} + 0{,}00203\lambda_{101} + 0{,}00222\lambda_{111}] + [0\lambda_{12} + 0{,}00025\lambda_{22} + 0{,}0005\lambda_{32} + 0{,}00074\lambda_{42} + 0{,}00096\lambda_{52} + 0{,}00118\lambda_{62} + 0{,}0014\lambda_{72} + 0{,}0016\lambda_{82} + 0{,}00179\lambda_{92} + 0{,}00198\lambda_{102} + 0{,}00216\lambda_{112}] + [0\lambda_{13} + 0{,}0002\lambda_{23} + 0{,}0004\lambda_{33} + 0{,}00061\lambda_{43} + 0{,}00081\lambda_{53} + 0{,}00101\lambda_{63} + 0{,}00121\lambda_{73} + 0{,}00141\lambda_{83} + 0{,}00161\lambda_{93} + 0{,}00181\lambda_{103} + 0{,}00201\lambda_{113}] + [0\lambda_{14} - 0{,}00001\lambda_{24} - 0{,}00003\lambda_{34} - 0{,}00006\lambda_{44} - 0{,}0001\lambda_{54} - 0{,}00016\lambda_{64} - 0{,}00023\lambda_{74} - 0{,}00031\lambda_{84} - 0{,}0004\lambda_{94} - 0{,}00051\lambda_{104} - 0{,}00063\lambda_{114}] + [0\lambda_{15} + 0\lambda_{25} - 0{,}00002\lambda_{35} - 0{,}00004\lambda_{45} - 0{,}00006\lambda_{55} - 0{,}0001\lambda_{65} - 0{,}00014\lambda_{75} - 0{,}00019\lambda_{85} - 0{,}00025\lambda_{95} - 0{,}00032\lambda_{105} - 0{,}0004\lambda_{115}] + [0\lambda_{16} + 0\lambda_{26} - 0{,}00001\lambda_{36} - 0{,}00003\lambda_{46} - 0{,}00006\lambda_{56} - 0{,}00009\lambda_{66} - 0{,}00013\lambda_{76} - 0{,}00018\lambda_{86} - 0{,}00023\lambda_{96} - 0{,}00029\lambda_{106} - 0{,}00036\lambda_{116}$$

dengan kendala,

$$g_{1j}(x_{kj})\lambda_{kj} = [0\lambda_{11} + 0{,}1\lambda_{21} + 0{,}2\lambda_{31} + 0{,}3\lambda_{41} + 0{,}4\lambda_{51} + 0{,}5\lambda_{61} + 0{,}6\lambda_{71} + 0{,}7\lambda_{81} + 0{,}8\lambda_{91} + 0{,}9\lambda_{101} + 1\lambda_{111}] + [0\lambda_{12} + 0{,}1\lambda_{22} + 0{,}2\lambda_{32} + 0{,}3\lambda_{42} + 0{,}4\lambda_{52} + 0{,}5\lambda_{62} + 0{,}6\lambda_{72} + 0{,}7\lambda_{82} + 0{,}8\lambda_{92} + 0{,}9\lambda_{102} + 1\lambda_{112}] + [0\lambda_{13} + 0{,}1\lambda_{23} + 0{,}2\lambda_{33} + 0{,}3\lambda_{43} + 0{,}4\lambda_{53} + 0{,}5\lambda_{63} + 0{,}6\lambda_{73} + 0{,}7\lambda_{83} + 0{,}8\lambda_{93} + 0{,}9\lambda_{103} + 1\lambda_{113}] \leq 1$$

$$g_{1j}(x_{kj})\lambda_{kj} = [0\lambda_{11} + 0{,}1\lambda_{21} + 0{,}2\lambda_{31} + 0{,}3\lambda_{41} + 0{,}4\lambda_{51} + 0{,}5\lambda_{61} + 0{,}6\lambda_{71} + 0{,}7\lambda_{81} + 0{,}8\lambda_{91} + 0{,}9\lambda_{101} + 1\lambda_{111}] + [0\lambda_{12} + 0{,}1\lambda_{22} + 0{,}2\lambda_{32} + 0{,}3\lambda_{42} + 0{,}4\lambda_{52} + 0{,}5\lambda_{62} + 0{,}6\lambda_{72} + 0{,}7\lambda_{82} + 0{,}8\lambda_{92} + 0{,}9\lambda_{102} + 1\lambda_{112}] + [0\lambda_{13} + 0{,}1\lambda_{23} + 0{,}2\lambda_{33} + 0{,}3\lambda_{43} + 0{,}4\lambda_{53} + 0{,}5\lambda_{63} + 0{,}6\lambda_{73} + 0{,}7\lambda_{83} + 0{,}8\lambda_{93} + 0{,}9\lambda_{103} + 1\lambda_{113}] \leq 1$$

$$g_{2j}(x_{kj})\lambda_{kj} = [0\lambda_{11} + 0{,}1\lambda_{21} + 0{,}2\lambda_{31} + 0{,}3\lambda_{41} + 0{,}4\lambda_{51} + 0{,}5\lambda_{61} + 0{,}6\lambda_{71} + 0{,}7\lambda_{81} + 0{,}8\lambda_{91} + 0{,}9\lambda_{101} + 1\lambda_{111}] + [0\lambda_{12} + 0{,}1\lambda_{22} + 0{,}2\lambda_{32} + 0{,}3\lambda_{42} + 0{,}4\lambda_{52} + 0{,}5\lambda_{62} + 0{,}6\lambda_{72} + 0{,}7\lambda_{82} + 0{,}8\lambda_{92} + 0{,}9\lambda_{102} + 1\lambda_{112}] + [-0\lambda_{14} - 0{,}1\lambda_{24} - 0{,}2\lambda_{34} - 0{,}3\lambda_{44} - 0{,}4\lambda_{54} - 0{,}5\lambda_{64} - 0{,}6\lambda_{74} - 0{,}7\lambda_{84} - 0{,}8\lambda_{94} - 0{,}9\lambda_{104} - 1\lambda_{114}] = 0$$

$$g_{3j}(x_{kj})\lambda_{kj} = [0\lambda_{11} + 0{,}1\lambda_{21} + 0{,}2\lambda_{31} + 0{,}3\lambda_{41} + 0{,}4\lambda_{51} + 0{,}5\lambda_{61} + 0{,}6\lambda_{71} + 0{,}7\lambda_{81} + 0{,}8\lambda_{91} + 0{,}9\lambda_{101} + 1\lambda_{111}] + 0\lambda_{13} + 0{,}1\lambda_{23} + 0{,}2\lambda_{33} + 0{,}3\lambda_{43} + 0{,}4\lambda_{53} + 0{,}5\lambda_{63} + 0{,}6\lambda_{73} + 0{,}7\lambda_{83} + 0{,}8\lambda_{93} + 0{,}9\lambda_{103} + 1\lambda_{113}] + [-0\lambda_{15} -$$

$0{,}1\lambda_{25} - 0{,}2\lambda_{35} - 0{,}3\lambda_{45} - 0{,}4\lambda_{55} - 0{,}5\lambda_{65} - 0{,}6\lambda_{75} - 0{,}7\lambda_{85} - 0{,}8\lambda_{95} - 0{,}9\lambda_{105} - 1\lambda_{115}] = 0$

$g_{4j}(x_{kj})\lambda_{kj} = [0\lambda_{12} + 0{,}1\lambda_{22} + 0{,}2\lambda_{32} + 0{,}3\lambda_{42} + 0{,}4\lambda_{52} + 0{,}5\lambda_{62} + 0{,}6\lambda_{72} + 0{,}7\lambda_{82} + 0{,}8\lambda_{92} + 0{,}9\lambda_{102} + 1\lambda_{112}] + [0\lambda_{13} + 0{,}1\lambda_{23} + 0{,}2\lambda_{33} + 0{,}3\lambda_{43} + 0{,}4\lambda_{53} + 0{,}5\lambda_{63} + 0{,}6\lambda_{73} + 0{,}7\lambda_{83} + 0{,}8\lambda_{93} + 0{,}9\lambda_{103} + 1\lambda_{113}] + [-0\lambda_{16} - 0{,}1\lambda_{26} - 0{,}2\lambda_{36} - 0{,}3\lambda_{46} - 0{,}4\lambda_{56} - 0{,}5\lambda_{66} - 0{,}6\lambda_{76} - 0{,}7\lambda_{86} - 0{,}8\lambda_{96} - 0{,}9\lambda_{106} - 1\lambda_{116}] = 0$

$\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} + \lambda_{91} + \lambda_{101} + \lambda_{111} = 1,$

$\lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} + \lambda_{52} + \lambda_{62} + \lambda_{72} + \lambda_{82} + \lambda_{92} + \lambda_{102} + \lambda_{112} = 1,$

$\lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{33} + \lambda_{43} + \lambda_{53} + \lambda_{63} + \lambda_{73} + \lambda_{83} + \lambda_{93} + \lambda_{103} + \lambda_{113} = 1,$

$\lambda_{14} + \lambda_{24} + \lambda_{34} + \lambda_{44} + \lambda_{54} + \lambda_{64} + \lambda_{74} + \lambda_{84} + \lambda_{94} + \lambda_{104} + \lambda_{114} = 1,$

$\lambda_{15} + \lambda_{25} + \lambda_{35} + \lambda_{45} + \lambda_{55} + \lambda_{65} + \lambda_{75} + \lambda_{85} + \lambda_{95} + \lambda_{105} + \lambda_{115} = 1,$

$\lambda_{16} + \lambda_{26} + \lambda_{36} + \lambda_{46} + \lambda_{56} + \lambda_{66} + \lambda_{76} + \lambda_{86} + \lambda_{96} + \lambda_{106} + \lambda_{116} = 1,$

$$\lambda_{v1}, \lambda_{v2}, \lambda_{v3}, \lambda_{v4}, \lambda_{v6}, \lambda_{v6} \geq 0, untuk$$
$$v = 1,2, \dots, 11$$

5. Penyelesaian dengan metode simpleks

   Fungsi linier yang terbentuk selanjutnya diselesaikan dengan metode simpleks untuk memperoleh masing-masing nilai λ_{vj} dengan bantuan aplikasi POM for windows 3, yaitu

   $\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = \lambda_{51} = \lambda_{61} = \lambda_{71} = \lambda_{81} = \lambda_{91} = \lambda_{101} = \lambda_{111} = 0,\ \lambda_{41} = 1,$
   $\lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_{32} = 0,\ \lambda_{42} = 1, \lambda_{52} = \lambda_{62} = \lambda_{72} = \lambda_{82} = \lambda_{92} = \lambda_{102} = \lambda_{112} = 0,$
   $\lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda_{33} = 0, \lambda_{43} = 0{,}86, \lambda_{53} = \lambda_{63} = \lambda_{73} = \lambda_{83} = \lambda_{93} = \lambda_{103} = \lambda_{113} = 0{,}14,$
   $\lambda_{14} = \lambda_{24} = \lambda_{34} = \lambda_{44} = \lambda_{54} = \lambda_{64} = 0, \lambda_{74} = 1, \lambda_{84} = \lambda_{94} = \lambda_{104} = \lambda_{114} = 0,$
   $\lambda_{15} = \lambda_{25} = \lambda_{35} = \lambda_{45} = \lambda_{55} = \lambda_{65} = \lambda_{75} = 0, \lambda_{85} = 1, \lambda_{95} = \lambda_{105} = \lambda_{115} = 0,$
   $\lambda_{16} = \lambda_{26} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = \lambda_{66} = 0, \lambda_{76} = 0{,}5, \lambda_{86} = 0, \lambda_{96} = 0{,}5, \lambda_{106} = \lambda_{116} = 0.$

   Setiap nilai λ_{vj} selanjutnya disubstitusikan ke persamaan berikut

   $x_1 = 0\lambda_{11} + 0{,}1\lambda_{21} + 0{,}2\lambda_{31} + 0{,}3\lambda_{41} + 0{,}4\lambda_{51} + 0{,}5\lambda_{61} + 0{,}6\lambda_{71} + 0{,}7\lambda_{81} + 0{,}8\lambda_{91} + 0{,}9\lambda_{101} + 1\lambda_{111},$

   $x_2 = 0\lambda_{12} + 0{,}1\lambda_{22} + 0{,}2\lambda_{32} + 0{,}3\lambda_{42} + 0{,}4\lambda_{52} + 0{,}5\lambda_{62} + 0{,}6\lambda_{72} + 0{,}7\lambda_{82} + 0{,}8\lambda_{92} + 0{,}9\lambda_{102} + 1\lambda_{112},$

   $x_3 = 0\lambda_{13} + 0{,}1\lambda_{23} + 0{,}2\lambda_{33} + 0{,}3\lambda_{43} + 0{,}4\lambda_{53} + 0{,}5\lambda_{63} + 0{,}6\lambda_{73} + 0{,}7\lambda_{83} + 0{,}8\lambda_{93} + 0{,}9\lambda_{103} + 1\lambda_{113},$

   $x_4 = 0\lambda_{14} + 0{,}1\lambda_{24} + 0{,}2\lambda_{34} + 0{,}3\lambda_{44} + 0{,}4\lambda_{54} + 0{,}5\lambda_{64} + 0{,}6\lambda_{74} + 0{,}7\lambda_{84} + 0{,}8\lambda_{94} + 0{,}9\lambda_{104} + 1\lambda_{114},$

   $x_5 = 0\lambda_{15} + 0{,}1\lambda_{25} + 0{,}2\lambda_{35} + 0{,}3\lambda_{45} + 0{,}4\lambda_{55} + 0{,}5\lambda_{65} + 0{,}6\lambda_{75} + 0{,}7\lambda_{85} + 0{,}8\lambda_{95} + 0{,}9\lambda_{105} + 1\lambda_{115},$

   $x_6 = 0\lambda_{16} + 0{,}1\lambda_{26} + 0{,}2\lambda_{36} + 0{,}3\lambda_{46} + 0{,}4\lambda_{56} + 0{,}5\lambda_{66} + 0{,}6\lambda_{76} + 0{,}7\lambda_{86} + 0{,}8\lambda_{96} + 0{,}9\lambda_{106} + 1\lambda_{11}.$

   Diperoleh proporsi dana, yaitu

   $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0{,}3$, $x_3 = 0{,}4$, $x_4 = 0{,}6$, $x_5 = 0{,}7$, dan $x_6 = 0{,}7$.

   Selanjutnya nilai x_j tersebut disubstitusikan ke persamaan (5), sehingga diperoleh keuntungan maksimum berdasarkan perhitungan menggunakan *separable programming* yaitu 0,001677.

Penyelesaian Model Menggunakan Metode *Quadratic programming*

Langkah-langkah penyelesaian pemrograman kuadratik metode *wolfe* sebagai berikut

1. Mengidentifikasi permasalahan kuadratik

   Fungsi tujuan dan kendala dalam bentuk permasalahan kuadratik yaitu

   $$\mathbf{z} = \mathbf{CX} + \mathbf{X^T DX} \tag{11}$$

   dengan,

   $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$,

   $\mathbf{C} = [0{,}00257 \quad 0{,}00258 \quad 0{,}00202]$

   $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0{,}0015 & -0{,}00063 & -0{,}0004 \\ -0{,}0006 & -0{,}0014 & -0{,}00036 \\ -0{,}0004 & -0{,}00036 & -0{,}0008 \end{bmatrix}$$

   $\mathbf{A} = [1 \quad 1 \quad 1]$,

   $\mathbf{b} = [1]$

   dengan kendala,

   $$\boldsymbol{G(X)} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - [1] \leq \mathbf{0}$$

E-Jurnal Matematika Vol. 8(4), November 2019, pp.277-284 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2019.v08.i04.p265

$$-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

2. Membentuk model linier dengan syarat *Kuhn Tucker*

   Setelah diperoleh bentuk umum dari permasalahan kuadratik, maka selanjutnya adalah mentransformasikan bentuk kuadratik tersebut menjadi fungsi linier menggunakan syarat *Kuhn Tucker*.

   Berdasarkan penerapan syarat *Kuhn Tucker* pada model (5) dan (6), maka diperoleh fungsi linier dan kendala baru sebagai berikut

$$z = 0{,}00496x_1 + 0{,}0048x_2 + 0{,}0031x_3 + 3\lambda_1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - 0{,}0072 \quad (12)$$

dengan kendala,

$$\begin{aligned} &0{,}00292x_1 + 0{,}00125x_2 + 0{,}000792x_3 + \lambda_1 - \mu_1 = 0{,}00257 \\ &0{,}00125x_1 + 0{,}00282x_2 + 0{,}000728x_3 + \lambda_1 - \mu_2 = 0{,}00258 \\ &0{,}000792x_1 + 0{,}000728x_2 + 0{,}00154x_3 + \lambda_1 - \mu_3 = 0{,}00202 \\ &x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

3. Mencari solusi optimal dengan simpleks *wolfe*

   Setelah diperoleh fungsi tujuan dan kendala yang baru, yaitu persamaan (12) dan (13) selanjutnya dilakukan perhitungan untuk memperoleh solusi optimalnya.

   Diperoleh tabel optimum simpleks metode *wolfe* sebagai berikut

Tabel 4. Nilai Optimum Simpleks Metode *Wolfe*

Basic	x_1	x_2	x_3	λ_1	μ_1	μ_2	μ_3	R_1	R_2	R_3	S_1	Solusi
r	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	0
x_1	1	0	0	0	-430,9	188,5	242,5	0	430,9	-188,5	-242,3	0,30
λ_1	0	0	0	1	-0,17	-0,2	-0,6	0	0,2	0,2	0,6	0
x_3	0	0	1	0	242,5	238,3	-480,8	0	-242,5	-238,3	481,4	0,36
x_2	0	1	0	0	188,5	-426,8	238,3	0	-188,5	426,8	-238	0,34

Berdasarkan Tabel 4, diperoleh bahwa nilai $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0{,}34$ dan $x_3 = 0{,}36$. Selanjutnya, untuk memperoleh nilai optimum maka nilai x_1, x_2 dan x_3 disubstitusikan ke persamaan (5) sehingga diperoleh keuntungan maksimum berdasarkan perhitungan menggunakan metode *quadratic programming* adalah 0,001679, dengan proporsi dana yang diinvestasikan ke saham BMRI sebesar 30%, GGRM sebesar 34% dan ICBP sebesar 36%.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

1. Perhitungan menggunakan metode *separable programming* dan *quadratic programming* memiliki nilai optimum yang relatif sama.
2. Penyelesaian model nonlinier portofolio Markowitz dari kombinasi proporsi tiga saham menggunakan metode *quadratic programming* lebih efektif dan efisien.

Saran

Bagi pembaca yang ingin menyelesaikan permasalahan pemrograman nonlinier yang memiliki model fungsi tujuan dan kendala seperti model portofolio Markowitz dapat menggunakan metode *quadratic programming* untuk memperoleh solusi optimalnya, karena penyelesaian menggunakan metode ini memiliki langkah penyelesaian yang lebih singkat dibandingkan dengan metode *separable* dengan hasil optimal dan dapat dilakukan tanpa bantuan aplikasi tambahan. Bagi pembaca atau peneliti yang tertarik untuk mengakaji lebih dalam tentang perbandingan penyelesaian pemrograman nonlinier dapat mengkaji metode lainnya seperti *Karush Kuhn Tucker*, *chance-constrained programming*, *linier combination method* dan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2005). *Introduction To Operation Research, Eighth Edition.* New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Insani, S. N. (2017). Optimasi Tanaman Pangan di Kota Magelang dengan Pemrograman Kuadratik dan Metode Pinalti Eksterior.

Jurnal Matematika Vol. 6 No 2.

Mulyono, S. (1989). Program Non Linier. *Ekonomi dan Keuangan Indonesia*, Vol 37, no 2, 219 - 244.

Taha, H. A. (2007). *Operations Research An Introduction.* New Jersey: Pearson Pentrice Hall.