

TOTAL EDGE IRREGULARITY STRENGTH DARI GRAF $K_n - \{e\}$

Muardi^{1§}, Qurratul Aini², Irwansyah³

¹Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Mataram [Email: borilwakwaw@gmail.com]

²Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Mataram [Email: qurratulaini.aini@unram.ac.id]

³Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Mataram [Email: irw@unram.ac.id]

[§]Corresponding Author

ABSTRACT

In this paper we determine the total edge irregularity strength of $K_n - \{e\}$, that is a complete graph in which one of its edge has been removed. To do so, we make three cases. In two cases, the labelling of $K_n - \{e\}$ equals to the labelling of the complete graph K_n such that no re-labelling is necessary. Meanwhile, the third case could not happen. As a result, the total edge irregularity strength of $K_n - \{e\}$ equals to the total edge irregularity strength of K_n .

Keywords: Complete graph, labelling, total edge irregularity strength.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan didefinisikan sebagai suatu pemberian nilai (dengan bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif) pada titik, sisi, atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Pelabelan yang sering digunakan yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (pelabelan titik dan sisi). Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan yang bernama Sedlacek pada tahun 1964, pelabelan graf merupakan pemberian label yang berupa bilangan bulat positif pada elemen-elemen dalam graf yang berupa sisi dan titik.

Termotivasi oleh hal tersebut, Bača dkk (2001) memperkenalkan pelabelan total tak beraturan. Pelabelan total tak beraturan yaitu pelabelan graf dengan minimal mempunyai dua titik dan satu sisi yang melabeli setiap sisi dan titik pada graf dengan bilangan bulat positif. Pelabelan total tak beraturan ini terbagi dalam dua jenis, yaitu pelabelan total sisi (*total edge irregularity strength*) tak beraturan dan pelabelan total titik tak beraturan (*total vertex irregularity strength*). Pelabelan graf yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah pelabelan total sisi tak beraturan.

Definisi 2.1 (Ivanco dan Jendrol, 2010)

Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf sederhana. Pelabelan total tak beraturan $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow V(G) \cup E(G)$ merupakan pelabelan pada simpul dan verteks G sehingga berlaku

$$wt(xy) \neq wt(x'y')$$

dengan

$$wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$$

Nilai k terkecil yang mengakibatkan terdapat pelabelan total tak beraturan $f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow V(G) \cup E(G)$ disebut sebagai *total edge irregularity strength* dari G , dan dinotasikan dengan $tes(G)$ (Ivanco dan Jendrol, 2010).

Selanjutnya, hubungan antara $tes(G)$ dengan jumlah sisi dan derajat maksimal graf G diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1 (Bača dkk, 2007) Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan tidak kosong himpunan sisi $E(G)$, maka

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

Teorema 2.2 (Bača dkk, 2007) Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf dengan nilai derajat maksimal $\Delta = \Delta(G)$, maka

$$tes(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta + 1}{2} \right\rceil$$

Dari Teorema 2.1 dan Teorema 2.2 diperoleh bahwa :

$$tes(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta + 1}{2} \right\rceil \right\}$$

Selain itu, Bača, dkk. (2001), telah mendapatkan $tes(G)$ pada beberapa kelas graf seperti graf lintasan P_n , graf lingkaran C_n , graf bintang S_n , graf roda W_n , dan graf friendship Fn . Jendrol, dkk. (2010) juga telah mengkaji mengenai $tes(G)$ untuk graf lengkap K_n . Mengacu pada hasil tersebut, pada paper ini $tes(G)$ akan dikembangkan untuk graf $K_n - \{e\}$, yaitu graf lengkap lengkap K_n yang diambil salah satu sisinya.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Pelabelan Total Sisi Tak Beraturan Graf Lengkap K_n

Secara umum, langkah-langkah untuk mendapatkam *total edge irregularity strength* pada grap lengkap (K_n), adalah sebagai berikut:

1. Membagi *verteks* menjadi 3 himpunan A, B, C , dimana :

$$|A| = |B| = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \text{ dan } |C| = n - |A| - |B|$$

Contoh : $A = \{a, b\}$, $B = \{c, f\}$, $C = \{d, e\}$

2. Melabeli *verteks* yang ada di A dengan 1.
3. Melabeli *verteks* yang ada di C dengan

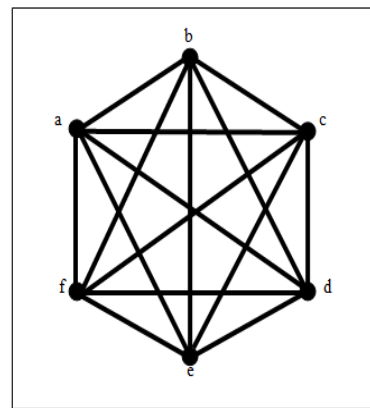
$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n^2 - n + 4}{6} \right\rceil. \end{aligned}$$

4. Melabeli sisi yang di $E(A, A)$ sehingga bobotnya ada di $[3, \binom{|A|}{2} + 2]$ dengan $E(A, A)$ merupakan himpunan semua sisi

yang menghubungkan verteks di A dengan verteks di A .

5. Melabeli sisi yang ada di $E(C, C)$ sehingga bobotnya ada di $[3\lambda - \binom{|C|}{2} + 1, 3\lambda]$
6. Melabeli sisi yang ada di $E(A, B)$ sehingga bobotnya ada di $[\binom{|A|}{2} + 3, \binom{|A|}{2} + 3 + |A||B| - 1]$.
7. Melabeli sisi yang ada di $E(C, B)$ sehingga bobotnya ada di $[3\lambda - \binom{|C|}{2} - |B||C| + 1, 3\lambda - \binom{|C|}{2}]$.
8. Melabeli sisi yang ada di $E(A, C)$ dan $E(B, B)$ sehingga bobotnya ada di $[\binom{|A|}{2} + 3 + |A||B|, 3\lambda - \binom{|C|}{2} - |B||C|]$.

Misalnya diberikan graf lengkap K_6 berikut.

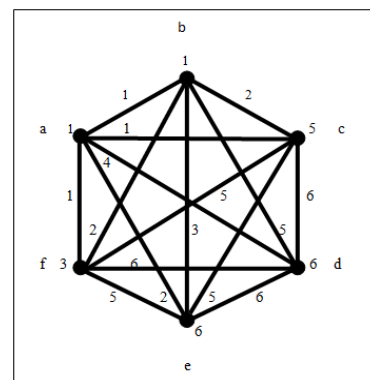


Gambar 1. Graf lengkap K_6

Jumlah total sisi diberikan oleh rumus

$$|EK_n| = \frac{n(n-1)}{2} \text{ untuk } K_n, n \neq 5$$

Dengan demikian *total edge irregularity strength* dari Gambar 1 disajikan dalam Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Graf lengkap K_6 dengan $tes(G) = 6$

Dalam melakukan pelabelan total sisi tak beraturan pada graf lengkap K_n ada beberapa hal yang harus diperhatikan :

1. Label terendah 1 dan tertinggi λ .
2. Bobot terendah 3 dan tertinggi 3λ .
3. Banyaknya bobot yang tersedia adalah $3\lambda - 3 + 1 = 3\lambda - 2$.
4. Ada 3 kasus untuk $|EK_n|$, yaitu
 - a. $|EK_n| = 3\lambda - 2$
 - b. $|EK_n| + 1 = 3\lambda - 2$
 - c. $|EK_n| + 2 = 3\lambda - 2$

2.2 Pelabelan Total Sisi Tak Beraturan Graf Lengkap $K_n - \{e\}$

Selanjutnya, untuk graf $K_n - \{e\}$, diasumsikan $tes(G) = \lambda$. Jadi,

$$\lambda \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{\Delta + 1}{2} \right\rceil \right\}$$

Tanpa mengurangi keumuman, dimisalkan :

$$\lambda = \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil$$

Dibagi 3 kasus untuk nilai $|E|$:

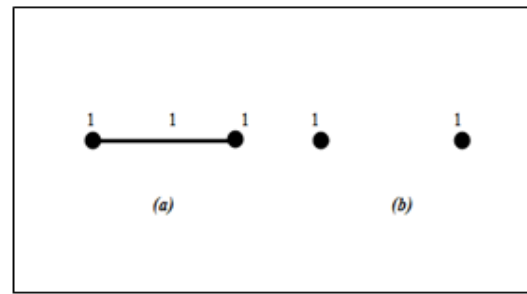
1. $|E| + 2 = 3\lambda \leftrightarrow |E| = 3\lambda - 2$
2. $|E| + 2 + 1 = 3\lambda \leftrightarrow |E| + 1 = 3\lambda - 2$
3. $|E| + 2 + 2 = 3\lambda \leftrightarrow |E| + 2 = 3\lambda - 2$

Dengan mengingat bahwa banyaknya bobot yang tersedia jika label maksimumnya λ adalah $3\lambda - 2$, maka dipunyai 3 kasus berikut.

- Kasus (1): banyaknya sisi = banyaknya bobot
- Kasus (2): banyaknya sisi = banyaknya bobot - 1
- Kasus (3): banyaknya sisi = banyaknya bobot - 2

2.2.1 Pelabelan Total Sisi Tak Beraturan Pada Kasus (1) dan (2)

Diambil beberapa sampel graf lengkap $K_n - \{e\}$ dengan $|EK_n|$ yang memenuhi kasus (1) dan kasus (2) berikut ini.



Gambar 3. (a) Graf lengkap K_2 dan (b) Graf lengkap $K_2 - \{e\}$

Pada Gambar 3, (a) adalah graf lengkap K_2 dengan label maksimal 1 dan (b) adalah graf lengkap $K_2 - \{e\}$ dengan label maksimal 1.

(a) Untuk $|EK_2| = 1$

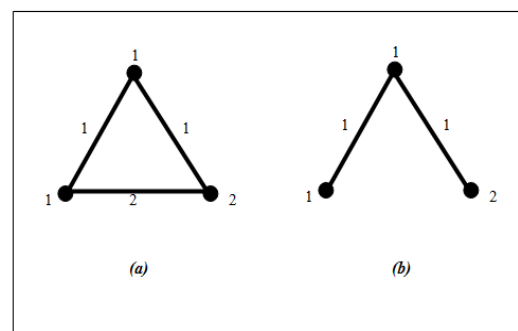
$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{|1| + 2}{3} \right\rceil \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

(b) Untuk $|EK_2 - \{e\}| = |EK_2| - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{|0| + 2}{3} \right\rceil \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pelabelan pada $K_2 - \{e\}$ adalah sama dengan pelabelan di K_2 .

Jadi, tidak perlu dilakukan pelabelan ulang.



Gambar 4. (a) Graf lengkap K_3 dan (b) Graf lengkap $K_3 - \{e\}$

Pada Gambar 4, (a) adalah graf lengkap K_3 dengan label maksimal 2 dan (b) adalah graf lengkap $K_3 - \{e\}$ dengan label maksimal 2.

(a) Untuk $|EK_3| = 3$

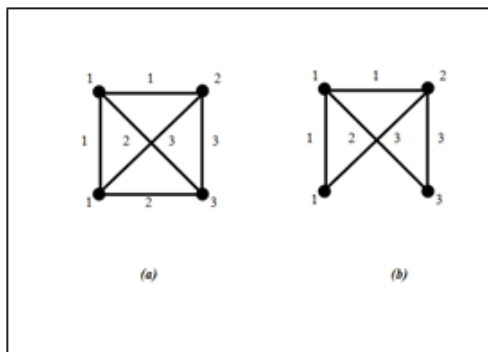
$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{|3| + 2}{3} \right\rceil \\ &= 2 \end{aligned}$$

(b) Untuk $|EK_3 - \{e\}| = |EK_2| - 1 = 2$

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \\ \lambda &= \left\lceil \frac{|2| + 2}{3} \right\rceil \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

Pelabelan pada $K_3 - \{e\}$ adalah sama dengan pelabelan di K_3 .

Jadi, tidak perlu dilakukan pelabelan ulang.



Gambar 5. (a) Graf lengkap K_4 dan (b) Graf lengkap $K_4 - \{e\}$

Pada Gambar di atas (a) adalah graf lengkap K_4 dengan label maksimal 3 dan (b) adalah graf lengkap $K_4 - \{e\}$ dengan label maksimal 3.

(a) Untuk $|EK_4| = 6$

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{|6| + 2}{3} \right\rceil \\ &= 3 \end{aligned}$$

(b) Untuk $|EK_4 - \{e\}| = |EK_4| - 1 = 5$

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{|5| + 2}{3} \right\rceil \\ &= 3 \end{aligned}$$

Pelabelan pada $K_4 - \{e\}$ adalah sama dengan pelabelan di K_4 . Jadi, tidak perlu dilakukan pelabelan ulang.

Teorema 2.1 Secara umum, untuk kasus (1) dan kasus (2) pelabelan terhadap $K_n - \{e\}$ adalah sama dengan pelabelan terhadap K_n .

Bukti :

Kasus (1) : $|E| = 3\lambda - 2$

$$\begin{aligned} \leftrightarrow \frac{|E| + 2}{3} &= \lambda \\ \leftrightarrow \left\lceil \frac{|E| - 1 + 2}{3} \right\rceil &= \lambda \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan Teorema 2.1, $tes(K_n - \{e\}) = \lambda = tes(K_n)$. ■

2.2.2 Pelabelan Total Sisi Tak Beraturan pada Kasus (3)

Kasus (3) tidak dapat terjadi. Sebagai contoh, diinterpretasikan kasus (1), kasus (2) dan kasus (3) dalam mod 3 seperti berikut :

- Kasus (1) : $|E| \equiv 1 \pmod 3$
- Kasus (2) : $|E| \equiv 0 \pmod 3$
- Kasus (3) : $|E| \equiv 2 \pmod 3$

Teorema 4.2 $|EK_n| = \frac{n(n-1)}{2} \pmod 3 = \begin{cases} 1 \pmod 3 \\ 0 \pmod 3 \end{cases}$

Bukti :

(i) Jika salah satu diantara n atau $n - 1$ habis dibagi 3, maka:

$$\frac{n(n-1)}{2} \pmod 3 = 0 \pmod 3$$

(ii) Jika salah satu diantara n atau $n - 1$ kongruen dengan $1 \pmod 3$, maka :

a. $n \equiv 1 \pmod 3$

Akibatnya $n - 1 \equiv 0 \pmod 3$

Kembali ke kasus (i).

b. $n - 1 \equiv 1 \pmod 3$

Akibatnya $n \equiv 2 \pmod 3$

Ditulis : $n = 3k + 2$

$$n - 1 = 3k + 2 - 1 = 3k + 1$$

$$n(n - 1) = (3k + 2)(3k + 1)$$

$$= 9k^2 + 3k + 6k + 2$$

Untuk k genap $\rightarrow k = 2l$

$$n(n-1) = 9 \times 4l^2 + 6 + 12l + 2$$

$$n(n-1) = 18l^2 + 3l + 6l + 1$$

$$\equiv (0 + 0 + 0 + 1) \pmod{3}$$

Untuk k ganjil $\rightarrow k = 2l + 1$

$$k^2 = 4l^2 + 4l + 1$$

$$n(n-1) = 9(4l^2 + 4l + 1) + 3(2l + 1) + 6(2l + 1) + 2$$

$$= 36l^2 + 36l + 9 + 6l + 3 + 12l + 6 + 2$$

$$= 36l^2 + 36l + 6l + 12l + 12l + 20$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 18l^2 + 18l + 3l + 6l + 10$$

$$\equiv (0 + 0 + 0 + 0 + 1) \pmod{3}$$

(iii) Jika salah satu dari n atau $n-1$ kongruen dengan $2 \pmod{3}$, maka :

a. $n \equiv 2 \pmod{3}$

$$n-1 \equiv 1 \pmod{3}$$

Kembali ke kasus (ii)

b. $n \equiv 0 \pmod{3}$

$$n-1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Kembali ke kasus (i).

Jadi, tidak ada kasus (3). ■

Bukti dari Teorema 2.2, menjelaskan bahwa tidak ditemukan kasus yang menyebabkan $\left\lfloor \frac{|EK_n|-1+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|EK_n|+2}{3} \right\rfloor - 1$ sehingga $tes(K_n - \{e\})$ selalu sama dengan $tes(K_n)$.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa secara umum, pelabelan terhadap $K_n - \{e\}$ adalah sama dengan pelabelan terhadap K_n . Selain itu, karena tidak ditemukan kasus yang menyebabkan $\left\lfloor \frac{|EK_n|-1+2}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|EK_n|+2}{3} \right\rfloor - 1$, maka $tes(K_n - \{e\})$ selalu sama dengan $tes(K_n)$.

4. SARAN

Kajian ini diharapkan dapat memperkaya keilmuan matematika, khususnya materi tentang pelabelan total sisi tak beraturan pada graf dan disarankan dapat dikembangkan untuk teori graf yang lebih lanjut.

Daftar Pustaka

- Bača, M., Jendrol, S., Mirka, M., dan Ryan, J.. 2007. *On Irregular Total Labellings. Discrete Mathematics*. Vol. 307, hal. 1378-1388.
- Jendrol, S., Mižkuf, J., dan Soták, R.. 2010. *Total Edge Irregularity Strength of Complete Graphs and Complete Bipartite Graphs. Discrete Mathematics*. Vol. 310, hal. 400-407.