

## EVALUASI PREMI *JOINT LIFE* PASANGAN SUAMI ISTRI MENGGUNAKAN COPULA FRANK

I Nyoman Widana<sup>1§</sup> dan Ni Made Asih<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: [nwidana@yahoo.com](mailto:nwidana@yahoo.com)]

<sup>2</sup>Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: [madeasih@unud.ac.id](mailto:madeasih@unud.ac.id)]

§Corresponding Author

### ABSTRACT

*This paper introduces the joint life status for married couples with independent and dependent mortality models. Using Frank copula and Indonesia Life Tables 2011, we evaluate the impact of dependent future lifetimes on the net single and level premium. The results show premium rates are reduced if models of dependent future lifetime are used compared to the models using an assumption of independence.*

**Keywords:** *Copula, Dependent, Mortality, Premium.*

### 1. PENDAHULUAN

Masing-masing orang membuat rencana dan berharap perjalanan hidupnya mengikuti rencana yang telah dibuatnya. Tetapi pengalaman mengajarkan, rencana itu berkembang menjadi tak menentu. Kadang-kadang pembuat rencana menjadi frustrasi, sebab mereka membuat asumsi yang tidak realistis. Asuransi didesain untuk mengatasi masalah-masalah keuangan yang timbul akibat dari kejadian-kejadian acak yang mengganggu rencana yang telah dibuat. Misalkan meninggalnya kepala keluarga sebagai pencari nafkah bagi keluarganya [1].

Saat ini perusahaan asuransi tidak hanya menyediakan produk untuk status hidup perorangan, tetapi juga untuk status gabungan (*joint status*). Contohnya, asuransi untuk pasangan suami istri. Misalkan benefit dibayarkan jika keduanya meninggal (pada kematian yang kedua) maka disebut asuransi *last survivor*. Sedangkan untuk benefit yang diberikan jika ada yang pertama kali meninggal (pada kematian yang pertama) maka disebut asuransi *joint life*.

Matvejevs [5] telah menghitung nilai premi untuk asuransi *joint life* dan *last survivor* dengan menggunakan asumsi bahwa sisa usia dari pasangan suami istri adalah saling independen. Asumsi ini juga digunakan oleh [6] untuk

menentukan besar premi untuk polis asuransi bersama. Disisi lain [4] mengevaluasi premi *last survivor* pasangan suami istri dengan menggunakan Metode Copula Frank. Perlu diperhatikan bahwa, untuk asuransi *joint life* dengan pesertanya adalah pasangan suami istri, mereka cenderung mengalami resiko yang sama terhadap hal-hal berikut: Stress Cardiomyopathy untuk pasangan suami istri dengan usia 55 tahun ke atas, kecelakaan yang dialami bersama, dan penyakit menular [4]. Hal ini berarti bahwa sisa usia dari pasangan suami istri ini tidak lagi saling independen atau dengan kata lain sisa usianya saling dependen. Tetapi, perusahaan asuransi, dalam perhitungan preminya, untuk keperluan praktis, mengasumsikan sisa usia dari pasangan suami istri adalah independen. Hal ini mungkin kurang tepat. Sehingga, pada penelitian ini penulis ingin mengetahui bagaimana menentukan harga premi asuransi jiwa *joint life* dari pasangan suami istri yang kematiannya dependen. Selain itu ingin juga dilihat pengaruh keindependenan terhadap harga premi.

### 2. METODE PENELITIAN

#### 2.1 Status *Joint Life*

Status yang berlangsung sepanjang semua anggota masih tetap

hidup dan berakhir jika ada anggota meninggal, dikenal dengan nama status *joint life*. Status ini dinyatakan oleh  $(x_1 x_2 \dots x_m)$  dengan  $x_i$  menyatakan usia dari anggota grup yang ke  $i$  dan  $m$  menyatakan jumlah anggota grup. Selanjutnya nyatakan variabel random  $T$  sebagai waktu sampai status *joint life* berakhir (*time until failure of a status*). Sehingga

$$T = \min[T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_m)]$$

dengan  $T(x_i)$  menyatakan sisa usia dari  $(x_i)$  [1].

Untuk kasus  $x_1 = x$  dan  $x_2 = y$  maka

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr(T \leq t) = \Pr(\min[T(x), T(y)]) \\ &= 1 - \Pr(T(x) > t \text{ dan } T(y) > t) \end{aligned}$$

Jika sisa usia dari  $(x)$  dan  $(y)$  saling bebas maka

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \Pr(T(x) > t) \Pr(T(y) > t) \\ &= 1 - {}_t p_x \cdot {}_t p_y = 1 - {}_t p_{xy} \end{aligned}$$

dan peluang status joint life berakhir dalam selang waktu  $[k, k + 1]$  adalah

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr(k < T \leq k + 1) \\ &= \Pr(T \leq k + 1) - \Pr(T \leq k) \\ &= {}_k p_{xy} - {}_{k+1} p_{xy} \end{aligned}$$

## 2.2 Copula Frank

Perhatikan bentuk berikut ini

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$C$  disebut fungsi Copula [3]. Mengingat bahwa

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 \leq x_1, Y_1 \leq y_1) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x_1) \\ &\quad - \Pr(X_2 > x_2) \\ &\quad + \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) &= \Pr(X_1 > x_1) + \\ \Pr(X_2 > x_2) - 1 + C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned} \quad (1)$$

Selanjutnya, ada banyak bentuk fungsi Copula, salah satunya adalah

copula Frank yang mempunyai bentuk sebagai berikut [4]

$$C(u, v) = \frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 - \frac{(1-e^{\theta u})(1-e^{\theta v})}{1-e^{\theta}} \right] \quad (2)$$

dengan  $\theta$  merupakan parameter yang menyatakan besarnya penyimpangan dari asumsi saling bebas.

## 2.3 Anuitas Joint Life dan Asuransi Joint Live

Nilai sekarang dari rangkaian pembayaran diawal tahun, selama  $n$  tahun asalkan  $(x)$  dan  $(y)$  masih tetap hidup, disimbulkan dengan  $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$ , serta dapat dituliskan dalam bentuk [1]

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_{xy} \quad (3)$$

Serupa dengan ini, perhatikan asuransi jiwa dengan benefit sebesar 1 yang dibayarkan diakhir tahun terjadinya kematian asalkan terjadi kematian salah satu di antara  $(x)$  dan  $(y)$ . Nilai tunai dari asuransi ini adalah [2]

$$A^1_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} ({}_t p_{xy} - {}_{t+1} p_{xy}) \quad (4)$$

Besar premi ditentukan dengan menggunakan prinsip ekuivalensi dan mempunyai persamaan

$$E[L] = 0 \quad (5)$$

dengan besar kerugian pihak penanggung,  $L$ , sebagai variable random dari nilai tunai benefit dikurangi variabel random annuitas dari premi yang dibayarkan oleh pihak yang ditanggung [2].

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Model Copula Frank dari Joint Life

Berdasarkan (1) dan (2), peluang  $(x)$  dan  $(y)$   $n$  tahun kemudian masih tetap hidup, dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} {}_n p_{xy} &= {}_n p_x + {}_n p_y - 1 + \\ \frac{1}{\alpha} \ln \left[ 1 - \frac{(1-e^{\alpha n q_x})(1-e^{\alpha n q_y})}{(1-e^{\alpha})} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Dari (6) dan (3) diperoleh ekspektasi dari nilai tunai anuitasnya adalah

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \left[ k p_x + k p_y - 1 + \frac{1}{\alpha} \ln \left[ 1 - \frac{(1-e^{-\alpha k q_x})(1-e^{-\alpha k q_y})}{(1-e^{-\alpha})} \right] \right] \quad (7)$$

dan dari (6) dan (4) diperoleh ekspektasi nilai tunai benefitnya (besar premi tunggalnya) adalah

$$A_{xy:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \left[ k p_x - k + 1 p_x + k p_y - k + 1 p_y + \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{(1-e^{-\alpha}) - (1-e^{-\alpha k q_x})(1-e^{-\alpha k q_y})}{(1-e^{-\alpha}) - (1-e^{-\alpha k+1 q_x})(1-e^{-\alpha k+1 q_y})} \right] \right] \quad (8)$$

### 3.2 Model Copula untuk Premi Joint Life

Premi netto tahunan,  $P$ , dihitung dengan menggunakan (5)

$$E[L] = 0$$

dengan

$$L = Z - PY$$

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n - 1 \\ 0, & K_x \geq n, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & K_x < n - 1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K_x \geq n \end{cases}$$

atau

$$P = \frac{E[Z]}{E[Y]} = \frac{A_{xy:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}}$$

Selanjutnya dengan mengingat (7) dan (8) maka diperoleh

$$P = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \left[ k p_x - k + 1 p_x + k p_y - k + 1 p_y + \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{(1-e^{-\alpha}) - (1-e^{-\alpha k q_x})(1-e^{-\alpha k q_y})}{(1-e^{-\alpha}) - (1-e^{-\alpha k+1 q_x})(1-e^{-\alpha k+1 q_y})} \right] \right]}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \left[ k p_x + k p_y - 1 + \frac{1}{\alpha} \ln \left[ 1 - \frac{(1-e^{-\alpha k q_x})(1-e^{-\alpha k q_y})}{(1-e^{-\alpha})} \right] \right]}$$

### Contoh Perhitungan

Nilai tunai premi dari kontrak asuransi *Joint life* selama 10 tahun, dengan uang pertanggungan sebesar 100 juta rupiah untuk pasangan suami istri berusia berturut-turut 60 tahun dan 55 tahun, dapat dilihat pada Tabel 1. dengan nilai parameter  $\alpha = -3,367, -3, -2, -1, 0.00001$  dan suku bunga 6% per tahun.

Tabel 1. Nilai Tunai Premi

$\alpha$	$\ddot{a}_{60\ 55:\overline{10} }$	$A_{60\ 55:\overline{10} }^1$	Premi, P
-3,367	7,040026	0,18826	2674136
-3	7,033505	0,190437	2707574
-2,5	7,024497	0,193496	2754588
-2	7,015456	0,196627	2802767
-1,5	7,00653	0,199782	2851368
-1	6,997888	0,202903	2899482
-0,001	6,982165	0,208774	2990105

Dari Tabel 1. Terlihat bahwa jika  $\alpha \rightarrow 0$  maka harga preminya akan mendekati harga premi dari pasangan suami istri dengan mortalitas saling independen.

Sedangkan, jika diasumsikan sisa usia dari pasangan suami istri saling independen maka harga preminya adalah

$$P = \frac{10^6 A_{60\ 55:\overline{10}|}^1}{\ddot{a}_{60\ 55:\overline{10}|}} = \frac{10^6 A_{60\ 55:\overline{10}|}^1 \sum_{t=0}^9 v^{t+1} ( {}_t p_{60\ 55} - {}_{t+1} p_{60\ 55} )}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{60\ 55}} = 2990190$$

### 4. SIMPULAN DAN SARAN

Dalam penelitian ini, harga premi, untuk pasangan suami istri dengan asumsi sisa usianya saling dependen, lebih murah dibandingkan dengan harga preminya yang dihitung menggunakan asumsi independen.

Semakin kecil penyimpangannya dari asumsi saling bebas, maka harga preminya akan mendekati harga premi dari pasangan suami istri dengan sisa usia yang independen.

Pada penelitian ini digunakan suku bunga konstan, untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk menggunakan suku bunga yang berubah secara stokastik

### Daftar Pustaka

[1] N.L.Bowers, H.U. Gerber., J.C. Hickman, D.A. Jones, dan C.J. Nesbitt, *Actuarial Mathematics*. Schaumburg (DE): The Society of Actuaries, 1997.

- [2] D.C.M Dickson, M.R Hardy, dan H.R Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- [3] P. Embrechts, *Copulas: a Personal View*. Ed ke-2, Zurich Switzerland,ETH 2009
- [4] I. Fauziah. "Evaluasi Premi Polis *last Survivor* Pasangan Suami Istri Menggunakan Metode Copula Frank " *Jurnal Cuchy* Vol. 3 Nomor 1, 2013
- [5] A. Matvejevs "Insurance Models for Joint Life and Last Survivor Benefit" *Jurnal Informatica* Vol. 12 Nomor 4, 2001
- [6] L. E. Putra, "Penentuan Premi Untuk Polis Asuransi Bersama. " *Jurnal Matematika UNAND* Vol. 3 Nomor 1.