

PERBANDINGAN KEEFISIENAN METODE *NEWTON-RAPHSON*, METODE *SECANT*, DAN METODE *BISECTION* DALAM MENGESTIMASI *IMPLIED VOLATILITIES* SAHAM

Ida Ayu Ega Rahayuni^{§1}, Komang Dharmawan², Luh Putu Ida Harini³

¹Jurusan Matematika, Fakultas MIPA - Universitas Udayana [Email: egaidaayu@gmail.com]

²Jurusan Matematika, Fakultas MIPA - Universitas Udayana [Email: dharmawan.komang@gmail.com]

³Jurusan Matematika, Fakultas MIPA - Universitas Udayana [Email: ballidah@gmail.com]

[§]Corresponding Author

ABSTRACT

Black-Scholes model suggests that volatility is constant or fixed during the life time of the option certainly known. However, this does not fit with what happen in the real market. Therefore, the volatility has to be estimated. Implied Volatility is the estimated volatility from a market mechanism that is considered as a reasonable way to assess the volatility's value. This study was aimed to compare the Newton-Raphson, Secant, and Bisection method, in estimating the stock volatility value of PT Telkom Indonesia Tbk (TLK). It found that the three methods have the same Implied Volatilities, where Newton-Raphson method gained roots more rapidly than the two others, and it has the smallest relative error greater than Secant and Bisection methods.

Keywords: Black-Scholes, Implied Volatility, Newton-Raphson Method, Secant Method, Bisection Method

1. PENDAHULUAN

Salah satu alternatif instrumen investasi yang dapat ditawarkan kepada investor didalam pasar modal adalah opsi (*option*). Pada tahun 1973, model *Black-Scholes* dikembangkan oleh Myron Scholes dan Fischer Black. Model ini memberikan solusi untuk penilaian *call option* dan *put option* yang tidak memberikan *dividen*. Pada model *Black-Scholes*, volatilitas bersifat konstan atau tetap selama usia opsi diketahui pasti. Namun, hal ini tidak sesuai dengan apa yang terjadi pada pasar sebenarnya. Oleh karena volatilitas bergerak secara *random* dan tidak dapat diobservasi secara langsung, maka harus dilakukan penaksiran nilai volatilitas (Dharmawan & Widana [2]). Nilai volatilitas dapat ditaksir menggunakan *Implied Volatility*. *Implied Volatility* adalah volatilitas yang diestimasi dari mekanisme pasar dengan memilih kontrak opsi dengan *expiration date* yang sama. Berdasarkan keadaan persaingan pasar, *Black* dan *Scholes* menunjukkan bahwa harga saham

mengikuti gerak *Brown* geometrik pada suku bunga dan volatilitas tertentu. Pergerakan harga saham tersebut dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

dengan

dS_t : perubahan harga saham yang mengikuti gerak *Brown geometric*

μ : rata-rata dari pengembalian saham

dt : perubahan waktu

σ : nilai volatilitas

W_t : gerak *Brownian*

Menurut Lee [3], keadaan pasar yang demikian dikatakan tidak ada arbitrase. Dengan kata lain, pelaku pasar modal mengasumsikan bahwa harga opsi di pasar modal sama dengan harga teoritis yang dihitung menggunakan formula *Black-Scholes*, atau dapat ditulis sebagai

$$C_{obs} = C_{BS}(\sigma) \quad (2)$$

dengan C_{obs} menyatakan harga opsi observasi yang diperoleh dari harga pasar sebenarnya,

dimana *strike price* (K) dan masa jatuh tempo opsi (T) sama dengan K dan T saham induk. Dalam hal ini, C_{BS} menyatakan harga opsi teoritis dari formula *Black-Scholes* yang didefinisikan oleh:

$$C_{BS} = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3)$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (5)$$

dengan $N(d_i)$ adalah fungsi distribusi normal kumulatif standar.

Nilai volatilitas selalu positif karena C_{BS} adalah konstan dan C_{obs} monoton naik pada $[0, \infty)$ (Dharmawan & Widana [2]).

Pada penelitian ini, solusi dari volatilitas akan diselesaikan menggunakan metode *Newton-Raphson*, metode *Secant* dan metode Bagi Dua (*Bisection*). Penurunan rumus metode *Newton Raphson* dapat dilakukan secara geometris dan dengan bantuan deret *Taylor*. Jika x_{i-1} adalah hampiran saat ini, maka hampiran selanjutnya adalah x_i yang dapat ditulis sebagai berikut.

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, f'(x_{i-1}) \neq 0 \quad (6)$$

sampai $|e_r| < e_{tol}$, dengan

$$|e_r| = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right|, x_i \neq 0 \quad (7)$$

dan $e_{tol} = 10^{-5}$.

Metode *Secant* merupakan modifikasi dari metode *Newton-Raphson*, yaitu dengan mengganti fungsi turunan yang digunakan pada metode *Newton-Raphson* menjadi bentuk lain yang ekuivalen. Metode ini dimulai dengan hampiran awal x_{i-1} dan x_i untuk solusi x . Selanjutnya dihitung x_{i+1} sebagai hampiran baru untuk σ , yaitu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad (8)$$

sampai $|e_r| < e_{tol}$.

Metode Bagi Dua (*Bisection*) dimulai dengan sebuah interval $[x_{i-1}, x_i]$, dimana $f(x_{i-1})$ dan $f(x_i)$ berbeda tanda (Mathews [4]). Secara sistematis metode *Bisection* adalah metode pencarian akar dengan mengurangi separuh interval pertama untuk memilih titik

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (9)$$

dan kemudian menganalisa kemungkinan yang akan timbul:

- (i) Jika $f(x_{i-1})$ dan $f(x_{i+1})$ berbeda tanda, akar terletak di $[x_{i-1}, x_{i+1}]$
- (ii) Jika $f(x_{i+1})$ dan $f(x_i)$ berbeda tanda, akar terletak di $[x_{i+1}, x_i]$
- (iii) Jika $f(x_{i+1}) = 0$, diperoleh bahwa akar pada $x = x_{i+1}$

Jika salah satu dari kasus (i) atau kasus (ii) terjadi, diperoleh interval yang merupakan setengah bagian dari interval pertama yang mengurung akar dan mengurangi separuh interval tersebut dengan proses yang sama. Pada proses selanjutnya, separuh interval baru tersebut dinamai $[x_{i-1}, x_i]$ dan proses diulang sampai $|e_r| < e_{tol}$. Jika kasus (iii) terjadi, maka akar adalah x_{i+1} .

Selanjutnya membandingkan perhitungan antara metode *Newton-Raphson*, metode *Secant*, dan metode *Bisection* dalam mengestimasi nilai volatilitas saham.

2. METODE PENELITIAN

A. Jenis dan Sumber Data

Jenis data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang berupa data numerik. Adapun data yang digunakan terdiri dari *strike price*, dan harga saham sekarang (15 Mei 2015) dari saham PT Telekomunikasi Indonesia Tbk (TLK) dengan masa jatuh tempo opsi selama tiga bulan yang diperoleh dari <http://finance.yahoo.com>, data harga observasi *call option* diperoleh dari <http://optiondata.net>.

B. Algoritma untuk Menaksir *Implied Volatility*

Tahapan-tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari harga observasi *call option* (C_{obs}) yang memiliki masa jatuh tempo dan *strike price* yang sama dengan saham induk, serta mencari harga saham sekarang dari *underlying asset*.
2. Menentukan fungsi volatilitas dan mencari turunan pertamanya.
3. Menyelesaikan persamaan dari fungsi volatilitas menggunakan metode numerik, yakni metode *Newton-Raphson*, metode *Secant*, dan metode *Bisection*.

a. Penyelesaian Menggunakan Metode *Newton-Raphson*

Langkah 1: Tetapkan hampiran awal (σ_{i-1}), $e_{tol} = 10^{-5}$, iterasi maksimum (max_iter) = 100

Langkah 2: Menghitung nilai $f(\sigma_{i-1})$ dan turunan pertama fungsinya $f'(\sigma_{i-1})$

Langkah 3: Menentukan nilai hampiran kedua (σ_i) yang terletak pada perpotongan garis singgung di $(\sigma_{i-1}, f(\sigma_{i-1}))$ dengan sumbu x , dapat dihitung menggunakan persamaan (6)

Langkah 4: Menghitung $|e_r|$ dengan persamaan (7)

Langkah 5: Melakukan pengecekan:

- (i) Jika $|e_r| < e_{tol}$, maka iterasi selesai dengan σ_i sebagai solusi σ dari fungsi volatilitas $f(\sigma)$
- (ii) Jika $|e_r| > e_{tol}$, maka kembali ke langkah 1.

b. Penyelesaian menggunakan metode *Secant*

Langkah 1: Tetapkan hampiran awal σ_{i-1} dan σ_i , $e_{tol} = 10^{-5}$, $max_iter = 100$.

Langkah 2: Menghitung nilai $f(\sigma_{i-1})$ dan $f(\sigma_i)$

Langkah 3: Menentukan hampiran baru σ_{i+1} dengan persamaan (8)

Langkah 4: Menghitung $|e_r|$ dengan persamaan (7)

Langkah 5: Melakukan pengecekan

- (i) Jika $|e_r| < e_{tol}$, maka iterasi selesai dengan σ_{i+1} sebagai solusi σ dari fungsi volatilitas $f(\sigma)$
- (ii) Jika $|e_r| > e_{tol}$, maka kembali ke langkah 1 dengan menjadikan σ_i sebagai σ_{i-1} dan σ_{i+1} sebagai σ_i .

c. Penyelesaian menggunakan metode *Bisection*

Langkah 1: Tetapkan hampiran awal σ_{i-1} dan σ_i , $e_{tol} = 10^{-5}$, $max_iter = 100$.

Langkah 2: Hitung nilai $f(\sigma_{i-1})$ dan $f(\sigma_i)$.

Langkah 3: Memeriksa bahwa fungsi berubah tanda sepanjang interval $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, ini dapat diperiksa dengan: $f(\sigma_{i-1})f(\sigma_i) < 0$. Jika terpenuhi, hampiran awal dapat digunakan untuk iterasi berikutnya, namun jika tidak terpenuhi, pilih hampiran awal baru.

Langkah 4: Hampiran ketiga σ_{i+1} dapat ditentukan menggunakan persamaan (9).

Langkah 5: Hitung nilai $f(\sigma_{i+1})$

Langkah 6: Lakukan evaluasi sebagai berikut untuk menentukan di dalam subinterval mana akar fungsi terletak:

- (i) Jika $f(\sigma_{i-1})f(\sigma_{i+1}) < 0$, maka $\sigma_i = \sigma_{i+1}$

- (ii) Jika $f(\sigma_{i-1})f(\sigma_{i+1}) > 0$,
maka $\sigma_{i-1} = \sigma_{i+1}$

Langkah 7: Menghitung $|e_r|$ dengan persamaan (7)

Langkah 8: Melakukan pengecekan.

- (i) Jika $|e_r| < e_{tol}$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$, maka iterasi selesai dengan σ_{i+1} sebagai solusi σ dari fungsi volatilitas $f(\sigma)$

- (ii) Jika $|e_r| > e_{tol}$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$, maka kembali ke langkah 4.

4. Membandingkan nilai taksiran *Implied Volatility*, kecepatan iterasi, serta membandingkan keakuratan masing-masing metode dengan membandingkan nilai *error* relatif $|e_r|$ dari masing-masing metode.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi volatilitas dapat didefinisikan sebagai

$$f(\sigma) = C_{obs} - (S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)) \quad (10)$$

atau

$$f(\sigma) = C_{obs} - C_{BS}(\sigma) \quad (11)$$

adalah kontinu dan memiliki turunan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f'(\sigma) &= -\frac{\partial C_{BS}(\sigma)}{\partial \sigma} \\ &= -S_t \sqrt{T-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

adalah kontinu.

Teorema Eksistensi dan Ketunggalan (Waluya [5]), "Misalkan f dan $\partial f/\partial \sigma$ kontinu, maka solusinya ada dan tunggal". Dalam hal ini, diperoleh bahwa $f(\sigma)$ dan $\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}$ kontinu, maka Teorema Eksistensi dan Ketunggalan terpenuhi, yaitu terdapat solusi tunggal dari persamaan (11).

Tabel 1 Iterasi dengan Menggunakan Metode *Newton-Raphson*

i	σ_{i-1}	$f(\sigma_{i-1})$	$f'(\sigma_{i-1})$	σ_i	$ e_r $
1	0.060000	0.055815	-6.529788	0.068548	1.246985e-001
2	0.068548	-0.002051	-6.984392	0.068254	4.301345e-003
3	0.068254	-0.000002	-6.971129	0.068254	4.084282e-006

Tabel 2 Iterasi dengan Menggunakan Metode *Secant*

i	σ_{i-1}	$f(\sigma_{i-1})$	σ_i	$f(\sigma_i)$	σ_{i+1}	$ e_r $
1	0.060000	0.055815	0.100000	-0.237620	0.067609	4.791029e-001
2	0.100000	-0.237620	0.067609	0.004490	0.068209	8.806070e-003
3	0.067609	0.004490	0.068209	0.000312	0.068254	6.568799e-004
4	0.068209	0.000312	0.068254	-0.000001	0.068254	1.393661e-006

Tabel 3 Iterasi dengan Menggunakan Metode *Bisection*

i	σ_{i-1}	$f(\sigma_{i-1})$	σ_i	$f(\sigma_i)$	σ_{i+1}	$f(\sigma_{i+1})$	$ e_r $
1	0.060000	0.055815	0.100000	-0.237620	0.080000	-0.084613	2.500000e-001
2	0.060000	0.055815	0.080000	-0.084613	0.070000	-0.012240	1.428571e-001
3	0.060000	0.055815	0.070000	-0.012240	0.065000	0.022433	7.692308e-002
4	0.065000	0.022433	0.070000	-0.012240	0.067500	0.005243	3.703704e-002
5	0.067500	0.005243	0.070000	-0.012240	0.068750	-0.003464	1.818182e-002
6	0.067500	0.005243	0.068750	-0.003464	0.068125	0.000899	9.174312e-003
7	0.068125	0.000899	0.068750	-0.003464	0.068438	-0.001280	4.566210e-003
8	0.068125	0.000899	0.068438	-0.001280	0.068281	-0.000190	2.288330e-003
9	0.068125	0.000899	0.068281	-0.000190	0.068203	0.000354	1.145475e-003
10	0.068203	0.000354	0.068281	-0.000190	0.068242	0.000082	5.724098e-004
11	0.068242	0.000082	0.068281	-0.000190	0.068262	-0.000054	2.861230e-004
12	0.068242	0.000082	0.068262	-0.000054	0.068252	0.000014	1.430820e-004
13	0.068252	0.000014	0.068262	-0.000054	0.068257	-0.000020	7.153588e-005
14	0.068252	0.000014	0.068257	-0.000020	0.068254	-0.000003	3.576922e-005
15	0.068252	0.000014	0.068254	-0.000003	0.068253	0.000005	1.788493e-005
16	0.068253	0.000005	0.068254	-0.000003	0.068254	0.000001	8.942384e-006

Tabel 4 Perbandingan Nilai Volatilitas, *Error* Relatif dan Kecepatan Iterasi dari Metode *Newton-Raphson*, Metode *Secant* dan Metode *Bisection*

	Metode		
	<i>Newton-Raphson</i>	<i>Secant</i>	<i>Bisection</i>
<i>Implied Volatility</i> (σ)	6,8254%	6,8254%	6,8254%
Berhenti pada Iterasi ke- i	3	4	16
<i>Error</i> Relatif $ e_r $	4,084282e-006	1,393661e-006	8,942384e-006

Berdasarkan Tabel 1, dapat ditarik kesimpulan bahwa nilai volatilitas diperoleh pada iterasi ke-3 yaitu dengan nilai $\sigma = 0,068254 = 6,8254\%$ dan *error* relatif $|e_r| = 4,084282e - 006$. Berdasarkan Tabel 2, dapat ditarik kesimpulan bahwa nilai volatilitas diperoleh pada iterasi ke-4 yaitu dengan nilai $\sigma = 0,068254 = 6,8254\%$ dan *error* relatif $|e_r| = 1,393661e - 006$. Berdasarkan Tabel 3, dapat ditarik kesimpulan bahwa nilai volatilitas diperoleh pada iterasi ke-16 yaitu dengan nilai $\sigma = 0,068254 = 6,8254\%$ dan *error* relatif $|e_r| = 8,942384e - 006$. Berdasarkan Tabel 4 diperoleh hasil simulasi menggunakan metode *Newton-Raphson*, metode *Secant*, dan metode *Bisection* dengan nilai *Implied Volatility* yang sama, yaitu 6,8254%. Simulasi berhenti secara berturut-turut pada iterasi ke-3; 4; 16 dengan nilai *error*

relatif secara berturut-turut sebesar 4,084282e-006; 1,393661e-006; 8,942384e-006. *Implied Volatility* yang diperoleh menggunakan metode *Newton-Raphson*, *Secant*, dan *Bisection* memiliki nilai yang lebih besar dari nilai *Implied Volatility* di pasar modal, yaitu sebesar 6,25%. Berdasarkan pemaparan pada bab II, *Implied Volatility* yang tinggi mengakibatkan harga opsi menjadi mahal dan berlaku sebaliknya.

Berdasarkan tabel 1, 2, dan 3, diperoleh bahwa pada iterasi ke-3 metode *Newton-Raphson*, metode *Secant* dan metode *Bisection* secara berturut-turut memiliki *error* relatif sebesar 4,084282e-006; 6,568799e-004; 7,692308e-002. Dalam hal ini, metode *Newton-Raphson* memiliki *error* relatif terkecil pada iterasi ke-3 yaitu sebesar 4,084282e-006. Artinya, metode *Newton-Raphson* lebih akurat

dibandingkan metode *Secant* dan metode *Bisection*. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa metode *Newton-Raphson* adalah metode terbaik dalam menaksir *Implied Volatility* saham, karena metode *Newton-Raphson* konvergen paling cepat dan paling akurat dibandingkan metode *Secant* dan metode *Bisection*.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, estimasi *Implied Volatility* saham menggunakan metode *Newton-Raphson*, metode *Secant* dan metode *Bisection* dengan hampiran awal 0,06 dan hampiran kedua 0,1 untuk metode *Secant* dan metode *Bisection* memiliki perolehan nilai *Implied Volatility* yang sama, yaitu 6,8254% yang nilainya lebih tinggi dari *Implied Volatility* di pasar modal, yaitu 6,25%. *Implied Volatility* yang tinggi akan mengakibatkan harga opsi menjadi mahal. Metode *Newton-Raphson* lebih cepat konvergen, yaitu pada iterasi ke-3 dan menghasilkan nilai *error* relatif yang lebih kecil dari pada metode *Secant* dan metode *Bisection*. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa metode *Newton-Raphson* adalah metode terbaik dalam menaksir *Implied Volatility* saham, karena metode ini konvergen paling cepat dan paling akurat dibandingkan metode *Secant* dan metode *Bisection*..

B. Saran

Metode *Newton-Raphson*, *Secant* dan *Bisection* tidak dapat memberikan keputusan di dalam pasar modal, metode ini hanya dapat menaksir nilai *Implied Volatility*, yang dapat digunakan sebagai gambaran/acuan dalam melakukan suatu keputusan. *Implied Volatility* juga dapat ditaksir menggunakan metode GARCH (*conditional volatility*), *Monte Carlo* dengan simulasi, dan Model *Heston* dengan stokastik volatilitas.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Black, F. & Scholes, M., 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), PP. 637-659.
- [2] Dharmawan, Komang & Widana, I Nyoman., 2011. Aplikasi Algoritma Biseksi dan Newon-Raphson dalam Menaksir Nilai Volatilitas Implied. *Jurnal Matematika* Vol. 2 No. 1, Desember 2011. ISSN: 1693-1394.
- [3] Lee, Roger. W., 2002. Implied Volatility: Statics, Dynamics, and Probabilitic Interpretation. *Recant Advances in Applied Probability* 2005, pp. 241-268.
- [4] Mathews, John H., 1992. Numerical Methods. *For Mathematics, Science, and Engineering*. Second edition. USA: Prentice-Hall International, Inc.
- [5] Waluya, St. Budi., 2006. Buku Ajar *Persamaan Diferensial*, 21-23.