MODEL SIR (SUSCEPTIBLE, INFECTIOUS, RECOVERED) UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS

K. QUEENA FREDLINA[1], TJOKORDA BAGUS OKA[2], I MADE EKA DWIPAYANA[3]

[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Udayana,
e-mail: [1]queen_of_scorp@yahoo.com

Abstract

Tuberkulosis (TB) merupakan salah satu penyakit penyebab kematian di negara berkembang. Oleh karena itu, perlu dilakukan analisis yang dapat diterima secara ilmiah terhadap peristiwa penyebaran penyakit tuberkulosis. Salah satunya dapat dipandang dalam bentuk model matematika. Model penyebaran penyakit TB yang disusun menghasilkan persamaan model yang menggambarkan penyebaran penyakit TB pada kelas *susceptible*, *infectious* dan *recovered*. Model yang terbentuk perlu dianalisis dengan mencari titik kritis, nilai eigen dan *basic reproduction ratio*. Kemudian dilakukan simulasi menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 untuk menguji analisis parameter. Dari hasil analisis akan didapat parameter yang paling berpengaruh dalam penyebaran tuberkulosis adalah laju penularan dan laju kesembuhan. Dengan demikian penyebaran tuberkulosis dapat dikendalikan dari kejadian epidemi dengan membuat $\mathbf{R_0} < 1$ atau menurunkan laju penularan dan meningkatkan laju kesembuhan.

Keywords: model matematika, tuberkulosis (TB), *basic reproduction ratio* ($\boldsymbol{R_0}$), Runge-Kutta

1. Pendahuluan

Tuberkulosis merupakan salah satu penyebab kematian di negara-negara berkembang yang disebabkan oleh baketeri *mycobacterium*. Bakteri ini pertamakali ditemukan oleh Robert Koch pada tanggal 24 Maret 1882. Gejala-gejala penderita TB diantaranya batuk-batuk, sakit dada, nafas pendek, hilang nafsu makan, berat badan turun, demam, kedinginan, dan kelelahan.

Penyakit TB merupakan penyebab kematian nomor tiga setelah penyakit kardiovaskular dan penyakit saluran pernafasan pada semua kelompok usia, dan nomor satu dari golongan penyakit infeksi [1].

Berdasarkan data *World Health Organization* (WHO) pada tahun 2007 menyatakan jumlah penderita tuberkulosis di Indonesia sekitar 528 ribu atau berada di posisi tiga di dunia setelah India dan Cina. Laporan WHO pada tahun 2009, mencatat peringkat Indonesia menurun ke posisi lima dengan jumlah penderita TBC sebesar 429 ribu orang. Saat ini Indonesia menempati urutan ke-9 dari 27 negara yang mempunyai beban tinggi *Multi Drug-Resistant Tuberculosis* (MDR-TB) [2].

Dalam pembuatan model matematika untuk penyebaran penyakit TB, populasi

[1] Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana
[2,3] Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana

manusia dibagi menjadi 3bagian yaitu : sub populasi *Susceptible* adalah sub populasi yang rentan terhadap penyakit TB, sub populasi *Infectious* adalah sub populasi yang terinfeksi dan menularkan TB, dan sub populasi *Recovered* adalah sub populasi yang telah sembuh.

Model yang disusun adalah model matematika dengan bentuk sistem persamaan diferensial yang bergantung pada variabel-variabel yang meyatakan tiap-tiap populasi. Selanjutnya dilakukan analisis parameter dan mencari *basic reproduction ratio* (R_0) dan untuk simulasi numerik dengan metode Runge Kutta Orde 4.

Tujuan dari penelitian adalah: (1) mengetahui cara mengontruksi model penyebaran penyakit tuberculosis dan (2) mengetahui parameter yang berpengaruh paling signifikan dalam model penyebaran penyakit tuberculosis.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi literatur. Hal ini dilakukan untuk mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang menunjang penelitian ini. Sumber-sumber yang digunakan dapat berupa buku, jurnal penelitian, skripsi, tesis, maupun internet.

Adapun langkah-langkah dalam pembentukan model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis adalah: (1) Indentifikasi Masalah, yaitu membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan penyakit tuberkulosi dan pemodelan matematika, sehingga dapat menentukan sub-sub populasi yang akan digunakan dalam model; (2) Membuat Asumsi, yaitu dalam pembuatan model matematika tidak semua faktor yang berpengaruh dalam penyebaran penyakit tuberkulosis dapat dimodelkan secara matematika, oleh karena itu perlu disederhanakan dengan melakukan reduksi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap peristiwa ini; (3) Menyelesaikan dan Menginterpretasikan Model, setelah model terbentuk, perlu diselesaikan secara matematika yaitu melakukan analisis parameter dengan mencari titik kritis, nilai eigen, dan basic reproduction ratio (R_0); (4) Verifikasi Model, setelah dilakukan analisis pada model, perlu melihat simulasi model. Simulasi dilakukan untuk menguji hasil analisis dan melihat pengaruh dari parameter. Untuk simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Pembentukan Model Matematika Tuberkulosis

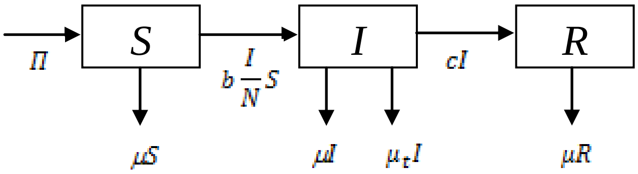
Dalam pembentukan model penyebaran tuberkulosis, populasi (N) dibagi menjadi 3 sub populasi yaitu: *Susceptible* $(S(t)$, *Infectious* $(I(t))$ dan *Recovered* $(R(t))$.

Jumlah populasi S akan bertambah karena kelahiran sebesar Π, dengan Π adalah konstan. S akan berkurang karena kematian dengan laju μ. Kontak langsung dengan individu yang terinfeksi menyebabkan individu pada populasi rentan akan ikut terinfeksi dan akan masuk menjadi populasi I. Hal ini menyebabkan berkurangnya populasi S. Laju penularan penyakit TB adalah$b$.

Kelas I menyatakan individu yang terinfeksi dan dapat menularkan TB kepada orang lain.Berkurangnya populasi ini disebabkan oleh kematian karena faktor lain dengan laju μ dan kematian karena penyakit TB dengan laju μ_t. Individu yang terinfeksi TB dapat sembuh secara spontan dengan laju c dan masuk dalam populasi R. Hal ini juga menyebabkan berkurangnya populasi I.

Individu dalam kelas R diasumsikan tidak akan kambuh kembali menjadi penderita TB. Berkurangnya populasi ini disebabkan oleh kematian dengan laju μ.

Dari asumsi di atas dapat dibuat diagram alir mengenai model matematika tuberkulosis seperti terlihat pada Gambar 1:



Gambar 1 Diagram Alir Model Matematika Tuberkulosis

Berdasarkan asumsi dan Gambar 1 maka model matematika dari penyebaran penyakit tuberkulosis adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -b\frac{I}{N}S - \mu S + \Pi \\ \frac{dI}{dt} &= b\frac{I}{N}S - (\mu + \mu_t + c)I \\ \frac{dR}{dt} &= cI - \mu R\end{aligned} \qquad (1)$$

Dengan $N = S + I + R$.

3.2.Analisis Model Matematika

3.2.1. Titik Kritis

Untuk mencari titik kritis, sistem (1) dibuat dalam posisi konstan terhadap waktu yaitu kondisi dimana $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, dan $\frac{dR}{dt} = 0$.

Dengan demikian diperoleh dua titik kritis yaitu:

i. $\left(S = \frac{\Pi}{\mu},\ I = 0,\ R = 0\right)$, yang memberikan *disease-free equilibrium*,

ii. $\left(S = \frac{J\,\Pi}{\mu\,K},\ I = \frac{\Pi\,L}{M\,K},\ R = \frac{c\Pi L}{\mu\,M\,K}\right)$, dengan:

$J = \mu + c$,

$K = b - \mu_t$,

$L = b - \mu - \mu_t - c$,

$M = \mu + \mu_t + c$.

Dalam kehidupan nyata, jumlah populasi manusia tidak mungkin negatif, oleh karena itu titik kritis ini harus diberi syarat agar bernilai positif. Nilai J dan M sudah pasti positif, oleh karena itu yang perlu diberi syarat adalah nilai L agar bernilai positif. Dengan demikian, nilai K pasti akan positif juga.

3.2.2. Nilai Eigen

Nilai Eigen berfungsi untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem. Untuk mencari nilai eigen, hal pertama yang perlu dilakukan adalah mencari matriks Jacobian (MJ). Matriks Jacobian dari sistem (1) adalah:

$$MJ = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial R} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial S} & \frac{\partial R}{\partial I} & \frac{dR}{\partial R} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow$$

$$MJ = \begin{bmatrix} -\frac{bI}{N} + \frac{bSI}{N^2} - \mu & -\frac{bS}{N} + \frac{bSI}{N^2} & \frac{bSI}{N^2} \\ \frac{bI}{N} - \frac{bSI}{N^2} & \frac{bS}{N} - \frac{bSI}{N^2} - \mu - \mu_t - c & -\frac{bSI}{N^2} \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix}$$

Substitusikan titik kritis yang telah didapat ke dalam MJ, dengan demikian akan diperoleh dua matriks Jacobian.Dengan mengetahui matriks Jacobian, nilai eigen dapat dicari dengan:

$$det(MJ - \lambda I) = 0$$

Dengan demikian diperoleh λ atau nilai eigen untuk titik kritis (i) adalah:

$$\lambda_1 = -\mu, \qquad \lambda_2 = -\mu\ , \qquad \lambda_3 = L. \tag{2}$$

Sedangkan nilai eigen untuk titik kritis (ii) yaitu:

$$\lambda_1 = -\mu,\ \lambda_2 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\ ,\lambda_3 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}. \tag{3}$$

Dengan$A = b\ J$,$B = b(\mu_t\mu - b)$, dan $C = \mu\ M\ K\ L$.

Suatu sistem dikatakan stabil apabila semua nilai eigen dari sistem tersebut bernilai negatif atau $\lambda_i < 0$ dengan $i =$1, 2, dan 3. Nilai eigen (2) akan stabil dan menuju titik kritis $\left(S = \frac{\pi}{\mu},\ I = 0,\ R = 0\right)$ apabila $L < 0$ atau $b < \mu + \mu_t + c$. Hal ini akan bertentangan dengan syarat untuk titik kritis (ii). Ini menyebabkan populasi I dan R akan bernilai negatif, dalam halnya kehidupan nyata tidak mungkin terjadi kondisi seperti ini maka titik kritis (ii) dapat diabaikan. Dapat dikatakan titik kritis (ii) akan ada dan stabil apabila nilai eigen (2) tidak stabil.

Untuk membuat nilai eigen (3) stabil, ketiga nilai eigen harus negatif. Nilai dari λ_1 sudah negatif, sehingga nilai dari λ_2 dan λ_3 perlu diberi syarat agar bernilai negatif juga. Nilai $A = b\ J$ pasti positif, sehingga penyebut dari nilai eigen pasti positif. Oleh karena itu pembilang harus bernilai negatif.

$$\begin{aligned} -B + \sqrt{B^2 - 4AC} &< 0 \\ \sqrt{B^2 - 4AC} &< B \\ B^2 - 4AC &< B^2 \\ -4AC &< 0 \\ AC &> 0 \end{aligned}$$

Karena A pasti positif maka C haruslah juga bernilai positif agar $AC > 0$. Selain itu B juga harus bernilai positif, karena jika tidak nilai eigen akan bernilai positif dan menjadi tidak stabil.

Apabila syarat untuk λ_2 terpenuhi maka nilai untuk λ_3 juga pasti terpenuhi. Hal ini dikarenakan bila $-B + \sqrt{B^2 - 4AC} < 0$ maka nilai dari $-B - \sqrt{B^2 - 4AC}$ juga kurang dari nol.

Dengan stabilnya nilai eigen (3), nilai eigen (2) akan menjadi tidak stabil. Dapat dilihat (3) akan stabil jika memenuhi syarat $L > 0$ atau $b > \mu + \mu_t + c$yang menyebabkan nilai eigen (2) menjadi positif dan tidak stabil. Dapat dikatakan titik kritis (i) stabil maka titik kritis (ii) akan menjadi tidak stabil, begitu pula sebaliknya.

3.2.2.Basic Reproduction Ratio (A)

Di dalam epidemiologi, tingkat penyebaran suatu penyakit menular biasa diukur dengan suatu nilai yang disebut *basic reproduction ratio* (R_0). Agar terbebas dari infeksi TB, harus dibuat $R_0 < 1$. Dalam hal ini setiap penderita hanya dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata kurang dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya penyakit akan hilang. Sedangkan, apabila $R_0 > 1$ maka setiap penderita dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata lebih dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya akan terjadi epidemik [3].

Untuk mencari R_0, karena yang ingin dikendalikan adalah populasi yang menyebarkan infeksi TB maka hanya diperlukan model I pada persamaan (1). Misalkan A adalah turunan dari $\frac{dI}{dt}$ terhadap I, dimana $A = M - D$. Dengan demikian dapat diketahui $R_0 = MD^{-1}$. Sehingga diperoleh:

$$A = \frac{bS}{N} - \frac{bSI}{N^2} - (\mu + \mu_t + c) \qquad (4)$$

Substitusikan titik kritis $\left(S = \frac{\Pi}{\mu}, I = 0, R = 0\right)$ pada (4), sehingga:

$$A = b - (\mu + \mu_t + c)$$

Dari persamaan di atas dapat diketahui $M = b$ dan $D = \mu + \mu_t + c$. Dari sini diperoleh:

$$R_0 = MD^{-1}$$

$$R_0 = \frac{b}{(\mu + \mu_t + c)}$$

$R_0 < 1$ terjadi apabila $b < \mu + \mu_t + c$ sedangkan $R_0 > 1$ terjadi apabila $b > \mu + \mu_t + c$. Berdasarkan hasil R_0 yang diperoleh, untuk membuat $R_0 < 1$, penyebut harus lebih besar dari pada pembilang. Kematian karena faktor lain (μ) dan kematian karena tuberculosis (μ_t) tidak dapat ditingkatkan. Oleh karena itu yang perlu dilakukan adalah penyembuhan atau pengobatan bagi penderita TB, sehingga laju kesembuhan (c) akan meningkat. Selain itu laju penularan penyakit TB (b) juga harus diturunkan, dengan demikian tingkat penyebaran infeksi TB akan berkurang sehingga penyakit lebih dapat dikendalikan dari keadaan epidemi. Jadi dapat dikatakan, dari analisis ini akan diketahui parameter yang paling berpengaruh dari semua parameter yang ada dalam model penyebaran tuberkulosis adalah parameter b dan c.

3.3. Simulasi Analisis Numerik

3.3.1. Simulasi untuk A R_0 <.

Berdasarkan syarat agar $R_0 < 1$, diberikan nilai
$\Pi = 500, b = 0{,}00015, c = 0{,}027,\quad \mu = 0{,}0009$, dan $\mu_t = 0{,}0001$.

Sehingga diperoleh titik kritis sebagai berikut:

i. $(S = 5.5555556 \times 10^5,\ I = 0,\ R = 0)$, dan
ii. $(S = 3.1 \times 10^8,\ I = -9.9464286 \times 10^6,\ R = \ -2.9839286 \times 10^8)$.

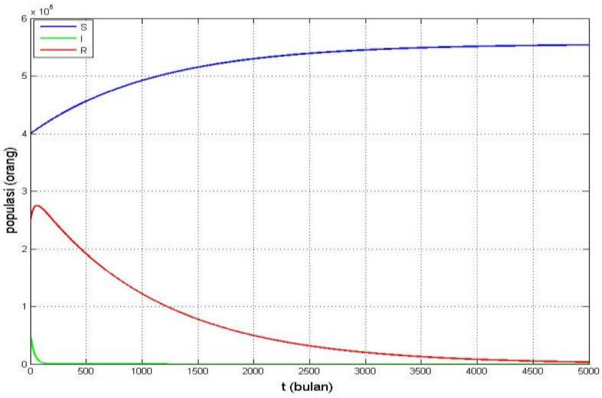
Titik kritis (ii) dapat diabaikan karena populasi bernilai negatif. Ini berarti hanya digunakan satu titik kritis yaitu titik kritis (i) yang memberikan *disease-free-equilibrium*.

Nilai eigen dapat ditemukan dengan mensubstitusikan parameter yang didapat ke nilai eigen (2) dan (3), sehingga didapat nilai eigen sebagai berikut:

i. Untuk titik kritis (i), $\lambda_1 = -0.0009,\ \lambda_2 = -0.0009,\ \lambda_3 = \ -0.02785$.
ii. Untuk titik kritis (ii), $\lambda_1 = 0.0028949,\ \lambda_2 = -0.0009,\ \lambda_3 = -0.0028965$.

Dapat dilihat nilai eigen yang stabil adalah nilai eigen untuk titik kritis (i), ini berarti sistem akan menuju ke titik kritis $(S = 5.5555556\ \times 10^5\ \ I = 0,\ R = 0)$. Hal ini merupakan kondisi yang diharapkan karena akan menuju kondisi yang bebas penyakit TB.

Dengan metode Runge-Kutta orde 4 akan diperoleh perilaku dinamik dari sistem yang terbentuk di atas dan dalam simulasi ini menggunakan nilai awal: $S(0) = 400000$, $I(0) = 50000$, $R(0) = 250000$, $N = S + I + R = 700000$, dan nilai $h = 1$, dengan t dalam bulan, sehingga dengan demikian diperoleh Gambar 2.



Gambar 2. Grafik Simulasi untuk $R_0 < 1$

Gambar 2menunujukkan perubahan jumlah populasi S, I, dan R terhadap waktu. Terlihat bahwa populasi I dan R akan mengalami penurunan dan akan menuju nol, Sedangkan populasi S akan mengalami peningkatan. Hal ini berarti jika parameter yang terbentuk memenuhi syarat $R_0 < 1$ maka penyakit TB akan dapat dikendalikan.

3.3.2. Simulasi untuk $R_0 >$.

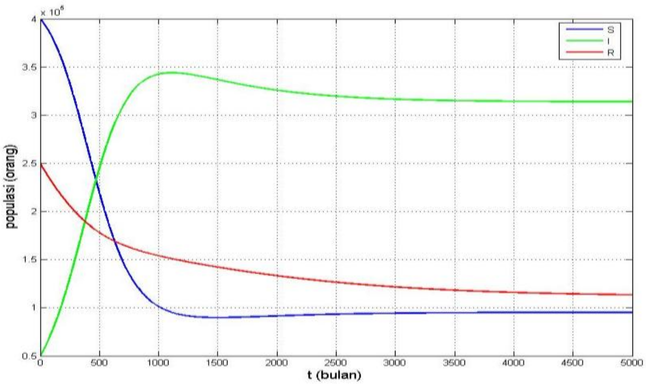
Diberikan parameter yang memenuhi syarat agar $R_0 > 1$ yaitu $\Pi = 500, b = 0{,}0097, c = 0{,}00032, \mu = 0{,}0009$, dan $\mu_t = 0{,}0001$.
Dengan cara yang sama, akan diperoleh titik kritis sebagai berikut:

i. $(S = 5.5555556 \times 10^5 \ \ I = 0,\ R = 0)$, dan
ii. $(S = 70601.85185,\ I = 3.3065025 \times 10^5, R = 1.1756453 \times 10^5)$.

Dan nilai eigen sebagai berikut:

i. Untuk titik kritis (i), $\lambda_1 = -0.0009,\ \lambda_2 = -0.0009,\ \lambda_3 = 0.00838.$
ii. Untuk titik kritis (ii), $\lambda_1 = -0.0056534,\ \lambda_2 = -0.0014285,\ \lambda_3 = -0.0009.$

Nilai eigen yang stabil adalah nilai eigen untuk titik kritis (ii) karena semua λ bernilai negatif. Dengan metode Runge-Kutta orde 4 akan disimulasikan menggunakan nilai awal: $S(0) = 400000$, $I(0) = 50000$, $R(0) = 250000$, $N = S + I + R = 700000$, dan nilai $h = 1$, dengan t dalam bulan. Perhitungan Runge-Kutta ini dapat dilihat pada Lampiran 4, sehingga dengan demikian diperoleh Gambar 3.



Gambar 3. Grafik Simulasi untuk $R_0 > 1$

Gambar 3 menunjukan perubahan jumlah populasi S, I, dan R terhadap waktu. Terlihat bahwa populasi S akan menurun karena tingkat penularan penyakit TB yang tinggi. Walaupun populasi R mengalami peningkatan, namun populasi I akan mengalami peningkatan yang cukup drastis karena tingkat kesembuhan penyakit TB yang rendah. Hal ini berarti jika parameter yang terbentuk memenuhi syarat $R_0 > 1$ maka akan terjadi epidemi terhadap penyakit TB.

4. Kesimpulan

Kesimpulan yang didapat dari hasil analisis di atas adalah:

1. Cara mengontruksi model matematika untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dilakukan dengan 4 tahapan yaitu (1) melakukan identifikasi masalah, (2) membuat asumsi terhadap faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran tuberculosis, (3)menganalisis parameter, (4) melakukan simulasi untuk menguji hasil analisis parameter.
2. Dengan menganalisi model matematika yang terbentuk, dapat dilihat parameter yang berpengaruh paling signifikan dalam penyebaran penyakit tuberkulosis adalah laju penularan penyakit (b) dan laju kesembuhan (c). Parameter lain yaitu laju kematian karena faktor lain (μ), kematian karena tuberkulosis (μ_t), dan kelahiran penduduk (Π) tidak dapat dirubah, karena parameter tersebut terjadi secara alami dalam kehidupan nyata. Namun laju penularan dan laju kesembuhan lebih dapat dipengaruhi. Salah satu cara untuk menurunkan laju penularan adalah dengan menjauhkan individu yang terinfeksi TB dengan populasi rentan, sedangkan untuk meningkatkan laju kesembuhan perlu dilakukan pengobatan yang maksimal.

Daftar Pustaka

[1] Departemen Kesehatan Republik Indonesia. 2002. *Pedoman Nasional Penanggulangan Tuberkulosis*. http://dinkes-sulsel.go.id/new/images/pdf/pedoman/pedoman%20nasional%20 penanggulangan%20tb.pdf. Diakses 2 April 2012

[2] WHO. 2011. *WHO Report of Global TB Control 2011*. http://whqlibdoc.who.int/publications/2011/9789241564380_eng.pdf. Diakses 7 April 2012

[3] Diekmann, O. and J.A.P. Heesterbeek. 2000. *Mathematical Epidemiologi of Infectious Diseases: Model Bulding, Analysis and Interpretation*. Simon Levis, Princeton University, USA