

ESTIMASI NILAI *CONDITIONAL VALUE AT RISK* MENGUNAKAN FUNGSI *GAUSSIAN COPULA*

Herlina Hidayati^{§1}, Komang Dharmawan², I Wayan Sumarjaya³

¹Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: herlinadisanasini@gmail.com]

²Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: dharmawan.komang@gmail.com]

³Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: sumarjaya@unud.ac.id]

[§]Corresponding Author

ABSTRACT

Copula is already widely used in financial assets, especially in risk management. It is due to the ability of copula, to capture the nonlinear dependence structure on multivariate assets. In addition, using copula function doesn't require the assumption of normal distribution. There fore it is suitable to be applied to financial data. To manage a risk the necessary measurement tools can help mitigate the risks. One measure that can be used to measure risk is Value at Risk (VaR). Although VaR is very popular, it has several weaknesses. To overcome the weakness in VaR, an alternative risk measure called CVaR can be used. The porpose of this study is to estimate CVaR using Gaussian copula. The data we used are the closing price of Facebook and Twitter stocks. The results from the calculation using 90% confidence level showed that the risk that may be experienced is at 4,7%, for 95% confidence level it is at 6,1%, and for 99% confidence level it is at 10,6%.

Keywords: portfolio, copula, CVaR, Gaussian copula.

1. PENDAHULUAN

Pada saat ini, mengukur dan mengelola risiko pada data finansial sudah menjadi hal yang lumrah dilakukan dalam manajemen risiko. Salah satu strategi yang digunakan untuk mengelola suatu risiko yaitu dengan membentuk portofolio saham. Secara umum, mengolah suatu risiko sering kali mengacu pada struktur kebergantungan dari variabel acak tingkat pengembalian (*return*) harus memenuhi asumsi-asumsi seperti berdistribusi simetris, distribusi tingkat pengembalian (*return*) tidak memiliki ekor gemuk (*heavy tail*), serta hubungan antara variabel harus linear. Namun pada kasus finansial hal ini sangat sulit untuk dipenuhi sehingga diperlukan fungsi *copula*.

Copula memiliki konsep sebagai alat untuk mempelajari kebergantungan tidak linear antara kejadian dalam kasus multivariat. Keluarga *copula* yang populer antara lain keluarga *copula* eliptik dan keluarga *Archimedian copula*. Anggota dari keluarga *copula* eliptik adalah

Gaussian copula dan *t-Student copula*. Sedangkan anggota dari keluarga *Archimedian copula* adalah *Clayton copula*, *Frank copula*, dan *Gumbel copula*.

Untuk mengukur dan mengelola suatu risiko, diperlukan alat ukur yang dapat digunakan untuk mengukur risiko yang ada. Salah satu alat ukur yang dapat digunakan adalah *Value at Risk* (VaR). VaR merupakan salah satu bentuk pengukuran risiko yang cukup populer digunakan, namun VaR juga memiliki kelemahan antara lain VaR hanya mengukur persentil dari distribusi keuntungan atau kerugian tanpa memperhatikan setiap kerugian yang melebihi tingkat VaR, dan VaR tidak koheren karena tidak memiliki sifat *sub-additive* (Artzner, et al [1]). Untuk mengatasi kelemahan yang dimiliki VaR, maka diperlukan *Conditional Value at Risk* (CVaR).

CVaR merupakan suatu ukuran risiko yang memiliki banyak keunggulan di antaranya yaitu CVaR merupakan ukuran risiko yang koheren

serta bersifat *convex* dan *sub-additive* (Rockafellar and Uryasev [6]). Selain itu, CVaR juga mampu menghitung risiko pada data berdistribusi normal maupun tidak normal.

Penelitian ini membahas estimasi nilai *Conditional Value at Risk* menggunakan salah satu fungsi *copula* dari keluarga eliptik yaitu *Gaussian copula*. Saham yang digunakan pada penelitian ini yaitu saham Facebook dan saham Twitter.

2. METODE PENELITIAN

Return merupakan keuntungan atau hasil yang diperoleh oleh investor dari investasi yang dilakukan. *Return* dirumuskan sebagai berikut:

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \quad (1)$$

dengan R_t menyatakan tingkat pengembalian (*return*) saham pada periode ke- t , dan S_t menyatakan harga saham pada periode ke t (Sunaryo [7]).

Korelasi *Kendall's tau* digunakan untuk mengukur kekuatan hubungan dua variabel. Data yang digunakan berskala ordinal dan tidak harus memenuhi distribusi normal. Pada *Gaussian copula*, *Kendall's tau* ditulis sebagai berikut:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho) \quad (2)$$

dengan ρ adalah koefisien korelasi *Gaussian copula*.

Copula pertama kali dipopulerkan oleh seorang matematikawan bernama Abe Sklar pada tahun 1959 yang teoremanya dikenal dengan nama Teorema Sklar. *Copula* memiliki beberapa keunggulan antara lain tidak memerlukan asumsi distribusi normal dan dapat menunjukkan adanya pola sebaran data pada ekor distribusi masing-masing variabel.

Salah satu keluarga *copula* yang populer digunakan adalah keluarga *copula* eliptik. Anggota keluarga *copula* eliptik adalah *Gaussian copula* dan *t-Student copula*.

1. Gaussian Copula

Gaussian copula merupakan salah satu jenis *copula* yang menggunakan distribusi normal standar bivariat. *Gaussian copula* dapat ditulis sebagai berikut (Embrechts, McNeil, and

Straumann [2]):

$$C_{R_1, R_2}^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2\rho_{12}st + t^2}{2(1-\rho_{12}^2)}\right\} ds dt \quad (4)$$

2. t-Student Copula

t-Student copula merupakan salah satu jenis *copula* yang menggunakan distribusi *t-Student* bivariat. *t-Student copula* dapat ditulis sebagai berikut ((Embrechts, McNeil, and Straumann [2]):

$$C_{R_1, R_2}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{1 + \frac{s^2 - 2\rho_{12}st + t^2}{v(1-\rho^2)}\right\}^{-\frac{(v+2)}{2}} ds dt \quad (5)$$

Value at Risk (VaR) merupakan suatu ukuran risiko yang menghitung besarnya kerugian maksimum yang mungkin dialami dalam suatu periode tertentu. VaR dapat didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$VaR(\alpha) = F_L^{-1}(\alpha) \quad (6)$$

dengan $F_L^{-1}(\alpha)$ adalah invers suatu fungsi distribusi dari α .

Conditional Value at Risk (CVaR) merupakan suatu ukuran risiko yang memperhitungkan kerugian melebihi tingkat VaR. CVaR pada selang kepercayaan $a \in [0, 1]$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$CVaR(a) = \frac{1}{1-a} \int_{-\infty}^{VaR(a)} r \cdot p(r) dr \quad (7)$$

dengan $p(r)$ adalah fungsi densitas (Letmark [5]).

Langkah Analisis

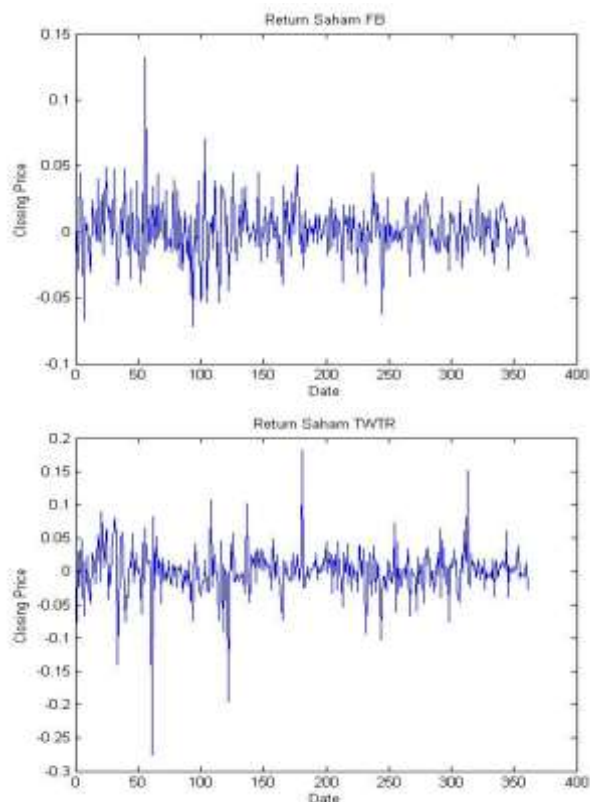
Untuk menganalisis data portofolio, akan dilakukan langkah-langkah yaitu: (1) menghitung *return* saham Facebook dan saham Twitter; (2) mencari nilai statistik deskriptif dari *return* yang diperoleh; (3) memeriksa ada tidaknya sifat autokorelasi dan efek *heteroscedasticity* pada data *return* masing-masing saham. Jika data *return* memiliki sifat autokorelasi dan efek *heteroscedasticity*, maka perlu dilakukan penyaringan (*filter*) yang berguna untuk menghilangkan sifat tersebut dengan menggunakan model GARCH; (4)

memeriksa keberadaan nilai ekstrem dengan menggunakan *Pareto tail*; (5) mengestimasi parameter *Gaussian copula*; (6) melakukan simulasi *Gaussian copula*; Menggunakan *Gaussian copula*, selanjutnya (7) hitung nilai VaR dan (8) estimasi nilai CVaR dari saham portofolio. Setelah itu, (9) lakukan interpretasi dari hasil yang diperoleh.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menghitung Return

Pada tahap ini diperoleh nilai *return* saham Facebook dan saham Twitter dengan mengolah data *closing price* menggunakan persamaan (1). Data *return* yang diperoleh kemudian disajikan ke dalam grafik yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Plot Return FB dan TWTR

Nilai Statistik Deskriptif

Nilai statistik deskriptif dari saham Facebook dan saham Twitter dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Statistik Deskriptif

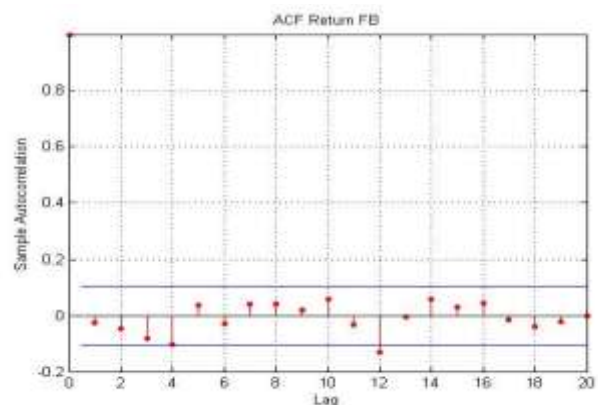
	FB	TWTR
Mean	$1,6 \times 10^{-3}$	$1,04 \times 10^{-3}$
Standard Deviation	$2,1 \times 10^{-2}$	$3,7 \times 10^{-2}$
Skewness	$6,3 \times 10^{-1}$	$-4,3 \times 10^{-1}$
Kurtosis	8,4	12,03

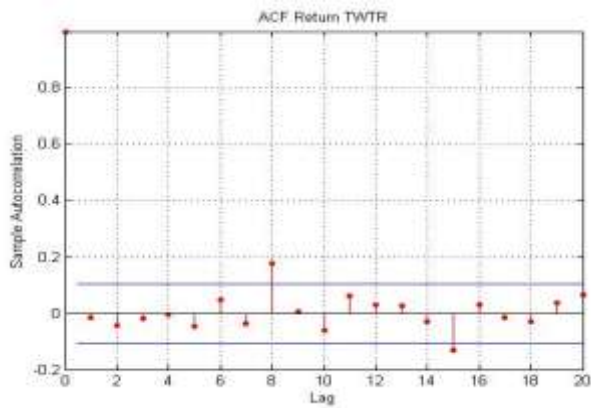
Pada Tabel 1 dapat dilihat bahwa *return* saham Facebook dan saham Twitter tidak berdistribusi normal. Secara empiris, data berdistribusi normal dapat dilihat dari nilai *skewness* dan *kurtosis*. Sebagai acuan nilai *skewness* pada data berdistribusi normal bernilai nol, sedangkan *kurtosis* pada data berdistribusi normal bernilai tiga.

Tabel 1 menunjukkan nilai *skewness* pada *return* saham Facebook diperoleh sebesar $6,3 \times 10^{-1}$, yang artinya *skewness* bernilai positif (kemiringan ekor yang lebih memanjang ke kanan). Sedangkan *skewness* pada *return* saham Twitter diperoleh sebesar $-4,3 \times 10^{-1}$, yang artinya *skewness* bernilai negatif (kemiringan ekor yang lebih memanjang ke kiri). Selain itu, nilai *kurtosis* dari *return* saham Facebook dan saham Twitter diperoleh sebesar 8,4 dan 12,03, yang artinya *kurtosis* pada kedua saham memiliki keruncingan leptokurtik.

Autokorelasi dan Heterokedastik

Untuk mengetahui apakah data *return* saham Facebook dan saham Twitter memiliki autokorelasi yang signifikan, dapat dilihat menggunakan plot ACF *return* pada Gambar 2.





Gambar 2. Plot ACF *Return* FB dan TWTR

Pada Gambar 2 terlihat sebagian besar lag pada *return* saham Facebook dan saham Twitter tidak keluar dari batas signifikansi. Hal ini menunjukkan bahwa *return* saham Facebook dan saham Twitter tidak berautokorelasi. Selain menggunakan plot ACF, ada tidaknya autokorelasi juga dapat dilihat dari hasil uji statistika Ljung-box seperti pada Tabel 2.

Hipotesis uji Ljung-Box *return* saham Facebook dan Twitter sebagai berikut:

H_0 : *return* saham tidak berautokorelasi.

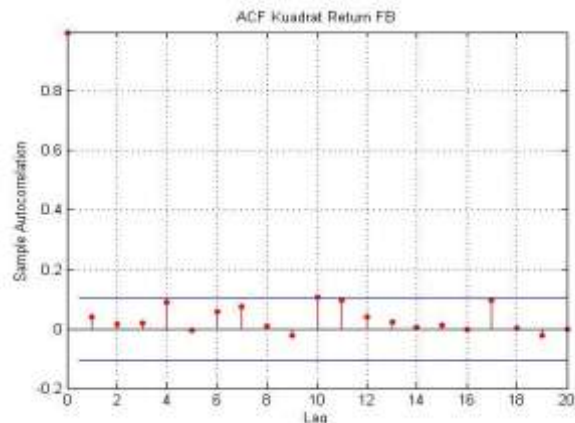
H_1 : *return* saham berautokorelasi.

Tabel 2. Uji Ljung-Box

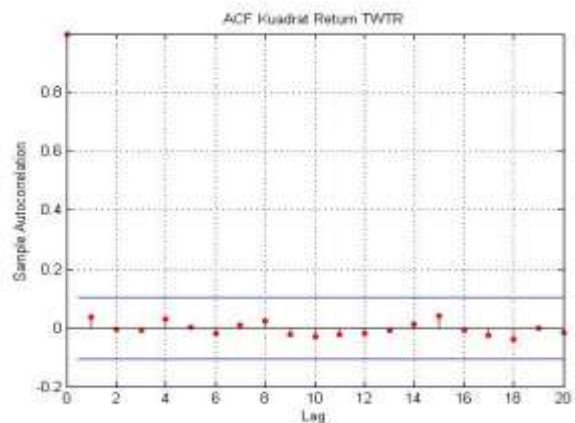
Saham	Ljung-Box		
	<i>P-Value</i>	Qstat	CV
FB	0,5992	0,2762	3,8415
	0,5584	1,1653	5,9915
	0,3076	3,6031	7,8147
	0,1049	7,6587	9,4877
	0,1550	8,0225	11,0705
TWTR	0,7727	0,0834	3,8415
	0,6893	0,7443	5,9915
	0,8502	0,7971	7,8147
	0,9383	0,8015	9,4877
	0,9058	1,5617	11,0705

Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat untuk setiap nilai *P-Value* lebih besar dari $\alpha = 0,05$ dan nilai Qstat lebih kecil daripada nilai CV. Hal ini menunjukkan bahwa tolak H_1 atau terima H_0 , yang artinya *return* dari saham Facebook dan saham Twitter tidak berautokorelasi.

Selanjutnya akan diperiksa ada tidaknya efek *heteroscedasticity* pada *return* saham Facebook dan saham twitter. *Heteroscedasticity* dapat dilihat menggunakan plot ACF kuadrat *return* pada Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3. ACF Kuadrat *Return* FB



Gambar 4. ACF Kuadrat *Return* TWTR

Pada Gambar 3 dan Gambar 4 menunjukkan semua lag pada data kuadrat *return* saham Facebook maupun saham Twitter tidak keluar dari batas. Hal ini mengindikasikan tidak adanya sifat *heteroscedasticity* pada data. Untuk memperjelas ada tidaknya efek *heteroscedasticity*, dapat dilihat dari hasil uji ARCH LM seperti pada Tabel 3.

Hipotesis uji ARCH LM *return* saham Facebook dan Twitter sebagai berikut:

H_0 : *homoscedasticity*, tidak ada efek ARCH pada *return* saham.

H_1 : *heteroscedasticity*, terdapat efek ARCH pada *return* saham.

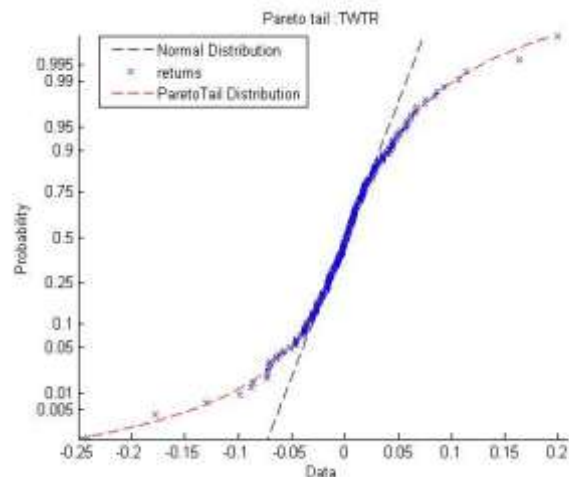
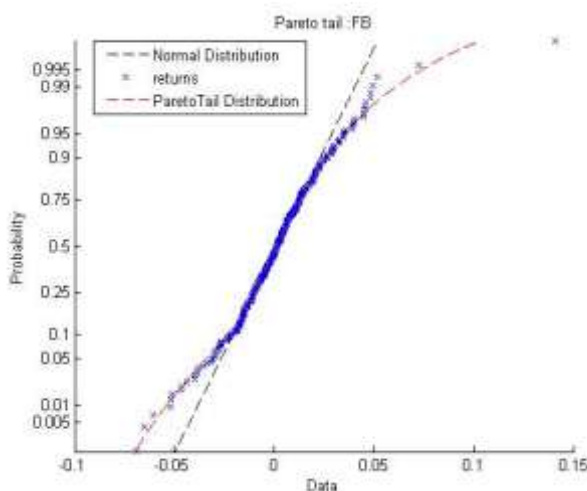
Tabel 3. Uji ARCH LM

Saham	ARCH LM		
	P-Value	Qstat	CV
FB	0,5073	0,4397	3,8415
	0,7811	0,4940	5,9915
	0,9002	0,5837	7,8147
	0,6247	2,6122	9,4877
	0,7442	2,7127	11,0705
TWTR	0,4689	0,5245	3,8415
	0,7604	0,5478	5,9915
	0,9090	0,5445	7,8147
	0,9394	0,7926	9,4877
	0,9779	0,7859	11,0705

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat untuk setiap nilai *P-Value* lebih besar dari $\alpha = 0,05$ dan nilai *Qstat* lebih kecil daripada nilai *CV*. Hal ini menunjukkan bahwa tolak H_1 atau terima H_0 , yang artinya *return* saham Facebook dan saham Twitter bersifat *homoscedasticity*, tidak ada efek ARCH pada *return* masing-masing saham.

Pareto tail

Pada data finansial sering kali terjadi kasus ekor gemuk (*heavy tail*) yang mengindikasikan adanya nilai ekstrem. Untuk melihat adanya indikasi nilai ekstrem tersebut dapat digunakan plot *Pareto tail* seperti pada Gambar 5.



Gambar 5 Plot *Pareto Tail* FB dan TWTR

Pada Gambar 5 terlihat adanya indikasi nilai ekstrem pada *return* saham Facebook dan saham Twitter. Nilai ekstrem tersebut dapat dilihat pada ekor Pareto bagian bawah maupun ekor Pareto bagian atas pada masing-masing saham. Adanya nilai ekstrem tersebut, mempengaruhi tingkat risiko yang mungkin ditanggung ke depannya. Dengan kata lain, semakin banyak data yang mengumpul pada ekor Pareto akan menyebabkan tingkat risiko yang ditanggung juga semakin besar.

Estimasi Parameter *Gaussian Copula*

Pada tahap ini akan dilakukan estimasi parameter *Gaussian copula*. Adapun parameternya adalah ρ (ρ). Pada tahap ini akan digunakan *Kendall's tau* yang dianggap cocok pada kasus bivariat. Sebelum mengestimasi parameter, hal yang harus dilakukan terlebih dahulu adalah mencari nilai τ (τ) dari saham Facebook dan saham Twitter. Selanjutnya dari nilai τ yang telah diperoleh tersebut, digunakan untuk mengestimasi parameter *Gaussian copula*. Dengan menggunakan *software* MATLAB 2013 diperoleh parameter *Gaussian copula* sebagai berikut:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0,594 \\ 0,594 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil estimasi parameter, diperoleh koefisien korelasi dari saham Facebook dan saham Twitter sebesar 0,594. Nilai koefisien korelasi tersebut menunjukkan bahwa saham

Facebook dan saham Twitter berkorelasi positif sempurna, yang artinya kedua saham dalam portofolio bergerak searah.

Simulasi *Gaussian Copula*

Pada tahap ini dilakukan simulasi data dengan membangkitkan sejumlah bilangan acak berbasis *Gaussian copula* menggunakan parameter yang telah diperoleh sebelumnya. Simulasi dapat dilakukan sebanyak n kali (sejumlah yang diinginkan). Pada penelitian ini digunakan simulasi sejumlah $n = 1000$. Setelah memperoleh hasil simulasi data *return*, selanjutnya ditentukan bobot (proporsi) dana yang ingin diinvestasikan guna memperoleh *return* portofolio. Bobot yang digunakan sebesar 0,5 pada masing-masing saham. Selanjutnya dihitung nilai VaR portofolio menggunakan fungsi *Gaussian copula* sebesar tingkat kepercayaan yang telah ditentukan. Setelah memperoleh nilai VaR, kemudian dihitung estimasi nilai CVaR sebesar tingkat kepercayaan yang telah ditentukan. Pada penelitian ini digunakan tingkat kepercayaan sebesar 90%, 95%, dan 99%.

Menghitung Nilai VaR Menggunakan Fungsi *Gaussian Copula*

Pada tahap ini akan dihitung nilai VaR dari *return* saham Facebook dan saham Twitter menggunakan fungsi *Gaussian Copula*. Tingkat kepercayaan yang digunakan pada penelitian ini yaitu 90%, 95%, dan 99%. Nilai VaR dari *return* saham Facebook dan saham Twitter dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Nilai VaR

	Tingkat Kepercayaan		
	90%	95%	99%
VaR	2,7%	3,86%	7,6%

Pada Tabel 4 diperoleh nilai VaR pada tingkat kepercayaan 90% sebesar 2,7% atau sebesar 0,027. Sedangkan pada tingkat kepercayaan 95% diperoleh nilai VaR sebesar 3,86% atau sebesar 0,0386, dan pada tingkat kepercayaan 99% diperoleh nilai VaR sebesar 7,6% atau sebesar 0,076. Hasil yang diperoleh

tersebut menunjukkan kerugian yang mungkin dialami untuk satu hari ke depan.

Estimasi Nilai CVaR Menggunakan Fungsi *Gaussian Copula*

Pada tahap ini akan diestimasi nilai CVaR menggunakan fungsi *Gaussian copula* pada tingkat kepercayaan 90%, 95%, dan 99%. Hasil estimasi dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Estimasi Nilai CVaR

	Tingkat Kepercayaan		
	90%	95%	99%
CVaR	4,7%	6,1%	10,6%

Interpretasi Hasil

Hasil perhitungan estimasi nilai CVaR dapat dilihat pada Tabel 5. Pada tingkat kepercayaan 90% diperoleh nilai CVaR sebesar 4,7% atau sebesar 0,047. Hal ini berarti pada tingkat kepercayaan 90% menunjukkan besarnya risiko kerugian yang mungkin dialami pada satu hari ke depan sebesar 4,7% dari aset saat ini. Sedangkan pada tingkat kepercayaan 95% diperoleh nilai CVaR sebesar 6,1% atau sebesar 0,061. Hal ini berarti pada tingkat kepercayaan 95% menunjukkan besarnya risiko kerugian yang mungkin dialami pada satu hari ke depan sebesar 6,1% dari aset saat ini. Pada tingkat kepercayaan 99% diperoleh nilai CVaR sebesar 10,6% atau sebesar 0,106. Hal ini berarti pada tingkat kepercayaan 99% menunjukkan besarnya risiko kerugian yang mungkin dialami pada satu hari ke depan sebesar 10,6% dari aset saat ini.

Misalnya dengan memiliki modal sebesar \$1000.000, maka kerugian yang mungkin dialami pada satu hari ke depan dengan tingkat kepercayaan 90% yaitu sebesar \$47.000. Sedangkan pada tingkat kepercayaan 95% kerugian yang mungkin dialami pada satu hari ke depan yaitu sebesar \$61.000, dan pada tingkat kepercayaan 99% kerugian yang mungkin dialami pada satu hari ke depan yaitu sebesar \$106.000.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan perhitungan dan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa estimasi nilai CVaR portofolio yang terdiri dari saham Facebook dan saham Twitter menggunakan fungsi *Gaussian copula* pada tingkat kepercayaan 90% yaitu sebesar 4,7%. Sedangkan pada tingkat kepercayaan 95% diperoleh sebesar 6,1%, dan pada tingkat kepercayaan 99% diperoleh sebesar 10,6%. Hasil yang diperoleh tersebut menunjukkan kerugian yang mungkin dialami untuk satu hari ke depan.

Adapun saran yang diberikan yaitu penelitian ini dapat dikembangkan menggunakan fungsi *Archimedian copula*. Adapun anggota keluarga dari *Archimedian copula* yang dapat digunakan yaitu *Clayton copula*, *Frank copula*, dan *Gumbel copula*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M., Heath, D. 1999. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp 203-228.
- [2] Embrechts, P., McNeil, A., and Straumann, D. 2001. Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. by M. Dempster and H. K. Moffatt, Cambridge University Press.
- [3] Franke, J., Härdle, W. K., & Hafner, C. M. 2008. *Statistics of Financial Markets: An Introduction* (second edition ed.). Berlin: Springer.
- [5] Letmark, M. 2010. *Robustness of Conditional Value-at-Risk (CVaR) When Measuring Market Risk Across Different Assets Classes*. M.S. Thesis. Royal Institute of Tekhnology. Swedia.
- [6] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. 2000. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, Vol. 2, No. 3, pp 21-41.
- [7] Sunaryo, T. 2007. *Manajemen Risiko Finansial*. Jakarta: Salemba Empat.