E-Jurnal Matematika Vol. 14(1), Januari 2025, pp. 26-35 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2025.v14.i01.p475

TEOREMA FUNGSI INVERS DAN APLIKASINYA DALAM ESTIMASI VOLATILITAS MODEL STOKASTIK

Nilma Sari[1], Faihatuz Zuhairoh[2§]

[1]Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP YPUP Makassar, Jl. Andi Tonro No. 17 Makassar
[nilmasari765@gmail.com]
[2]Program Studi Pendidikan Matematika, STKIP YPUP Makassar, Jl. Andi Tonro No. 17 Makassar
[fzuhairoh@stkip.ypup.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

ABSTRACT

The Inverse Function Theorem plays a fundamental role in various areas of applied mathematics, particularly in stochastic analysis and financial modeling. This article provides a systematic proof of the theorem and explores its application in estimating volatility within stochastic models. By leveraging a stochastic transformation based on the inverse function, volatility in the Black-Scholes model is reconstructed directly from historical stock price data without imposing explicit distributional assumptions. This methodology is reinforced through the discretization of stochastic integrals and numerical simulations implemented using the R programming language. The simulation results demonstrate that volatility estimates derived from this approach are comparable to conventional methods such as Maximum Likelihood Estimation (MLE), while offering improved computational efficiency. Moreover, the findings indicate that the inverse function theorem can be utilized as a powerful tool for extracting hidden parameters in stochastic systems. This has significant implications for financial risk analysis, option pricing models, and broader financial market modeling, providing a robust alternative for understanding and predicting market behavior.

***Keywords**: inverse function theorem, mathematical proof, stochastic model, volatility estimation.*

1. PENDAHULUAN

Teorema fungsi invers selama ini dipelajari pada program studi matematika sebagai konsep teoretis tanpa banyak menyoroti aplikasinya dalam bidang lain. Dalam kurikulum sekolah, konsep ini dikenalkan untuk memahami transformasi fungsi dan penyelesaian persamaan, tetapi pemanfaatannya dalam analisis ekonomi dan stokastik jarang didiskusikan secara mendalam. Padahal, dalam bidang stokastik, teorema fungsi invers memiliki peran penting dalam pemodelan keuangan, terutama dalam analisis volatilitas harga aset dan proses stokastik (Chen, 2018).

Konsep teorema fungsi invers dapat diterapkan dalam berbagai bidang diantaranya estimasi volatilitas model stokastik, khususnya dalam model Black-Scholes. Volatilitas merupakan parameter penting dalam analisis keuangan yang mencerminkan ketidakpastian pergerakan harga aset (Andersen, Bollersley, & Diebold, 2010; Bhowmik & Wang, 2020; Dupret, Barbarin, & Hainaut, 2023; Janssen & Drees, 2016). Dengan menggunakan transformasi stokastik berbasis fungsi invers, volatilitas dapat direkonstruksi langsung dari data historis harga saham tanpa asumsi distribusi eksplisit. Pendekatan ini berpotensi menjadi alternatif yang lebih fleksibel dibandingkan metode konvensional seperti GARCH atau pendekatan berbasis maksimum *likelihood* yang sering kali membutuhkan asumsi distribusi tertentu.

Pembuktian teorema fungsi invers dilakukan dengan pendekatan analitis, menggunakan konsep turunan dan kontinuitas. Secara formal, jika $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi terdiferensialkan pada suatu interval dan $f'(x) \neq 0$ untuk setiap x dalam interval tersebut, maka eksistensi fungsi invers $g(y)$ dapat dijamin, di mana g juga terdiferensialkan dengan turunan yang diberikan oleh $g'(x) =$

$\frac{1}{f'(g(y))}$ (Amorim & Tu, 2022; Hansen, 2021). Pembuktian ini memanfaatkan teorema derivatif implisit serta sifat-sifat dasar fungsi kontinu dan terdiferensialkan (de Oliveira, 2013).

Pemahaman yang lebih mendalam terhadap pembuktian ini dapat membuka peluang penerapan dalam berbagai bidang, termasuk keuangan dan ekonomi.

Dalam model stokastik, misalkan suatu proses stokastik X_t mengikuti proses Itô (Boukhetala, 2011):

$$dX_t = \mu(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t, \theta)dW_t \qquad (1)$$

dengan X_t adalah variabel acak yang merepresentasikan proses stokastik pada waktu t, $\mu(X_t, \theta)$ adalah fungsi *drift* yang bergantung pada parameter θ, $\sigma(X_t, \theta)$ adalah volatilitas (fungsi dispersi), dan W_t adalah proses Wiener (Brownian *motion*).

Dalam banyak kasus, parameter θ tidak dapat diamati secara langsung, sehingga diperlukan transformasi stokastik untuk mengekstrak parameter tersebut dari distribusi yang diamati. Transformasi berbasis fungsi invers memungkinkan estimasi parameter dari distribusi baru yang lebih sederhana dibandingkan distribusi awal X_t.

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas berbagai pendekatan dalam estimasi volatilitas. (Jin & Hong, 2023) mengkaji model jump-diffusion untuk memahami perilaku volatilitas dalam pasar keuangan. Malhotra et al. (2018) membahas model multifaktor yang dapat menangkap karakteristik volatilitas yang lebih kompleks. Selain itu, pemodelan volatilitas juga banyak diterapkan dalam bidang keuangan, bisnis, dan industri (Badikov, Davis, & Jacquier, 2021; Ippoliti, 2021; Wolf, Nabin, & Bhattacharya, 2018; Yfanti & Karanasos, 2022). Model volatilitas lokal dan implikasinya terhadap harga futures VIX juga menjadi perhatian dalam penelitian Acciaio & Guyon (2020), sedangkan pendekatan estimasi parameter menggunakan metode maksimum likelihood dalam konteks data pasar keuangan dan geofisika telah dikaji oleh Mariani et al. (2018).

Namun, studi terkait penerapan teorema fungsi invers dalam estimasi volatilitas masih jarang ditemukan. Dalam bidang pendidikan, penelitian mengenai fungsi invers dalam pembelajaran matematika telah dilakukan oleh Tall & Vinner (1981), sementara Kusumawati et al. (2022) mengkaji desain pengajaran yang mengintegrasikan literasi keuangan dalam pendidikan matematika. Namun, penelitian-penelitian tersebut lebih berfokus pada aspek teori tanpa mengeksplorasi penerapannya dalam model stokastik.

Penelitian ini membuktikan teorema fungsi invers secara sistematis serta mengeksplorasi penerapannya dalam estimasi volatilitas model stokastik melalui pendekatan analitis dan simulasi. Kontribusi penelitian ini mencakup pengembangan teori matematika serta aplikasinya dalam analisis keuangan. Hasilnya diharapkan menjadi referensi bagi akademisi dan praktisi dalam pemodelan stokastik dan estimasi volatilitas di sektor keuangan.

Penelitian ini menjaga keseimbangan antara aspek murni dan terapan dengan menghubungkan teori matematika dengan aplikasi nyata dalam keuangan, sehingga relevan dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan penerapannya dalam dunia industri.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan analitis dan kuantitatif untuk membuktikan serta mengaplikasikan teorema fungsi invers dalam estimasi volatilitas model stokastik. Langkah-langkah penelitian meliputi:

1. Studi Literatur
   a. Menelusuri konsep dasar teorema fungsi invers serta aplikasinya dalam matematika terapan dan keuangan. Literatur utama mencakup teori kalkulus diferensial serta berbagai pendekatan estimasi volatilitas.
   b. Mengkaji metode estimasi volatilitas dalam model stokastik berdasarkan penelitian terdahulu.
2. Pembuktian Teorema Fungsi Invers
   a. Menyusun kembali pembuktian formal secara sistematis berdasarkan teori kalkulus diferensial.
   b. Menganalisis kondisi eksistensi invers dalam domain tertentu.
3. Penerapan dalam Model Stokastik
   a. Menentukan hubungan antara transformasi stokastik dengan volatilitas model Black-Scholes.
   b. Menyusun ekspresi eksplisit untuk volatilitas menggunakan metode invers.
4. Eksperimen Simulasi
   a. Menggunakan bahasa pemrograman R untuk mensimulasikan data harga saham, dengan menerapkan model stokastik Black-Scholes untuk menghasilkan jalur

harga saham sintetis.
   b. Membandingkan estimasi volatilitas menggunakan teorema fungsi invers dan MLE.
5. Analisis Hasil dan Validasi
   a. Menginterpretasikan hasil estimasi volatilitas.
   b. Menyajikan visualisasi distribusi return saham dan membandingkan akurasi estimasi dari berbagai metode.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi invers adalah fungsi yang merupakan kebalikan aksi dari suatu fungsi. Dalam matematika, khususnya kalkulus diferensial, teorema fungsi invers memberikan syarat yang cukup agar suatu fungsi dapat dibalik di lingkungan suatu titik dalam domainnya yaitu turunannya kontinu dan tidak nol di titik tersebut. Selain itu, teorema ini juga memberikan rumus turunan fungsi invers. Meskipun telah banyak dibahas dalam berbagai literatur, penelitian ini menyajikan kembali pembuktiannya secara sistematis guna memberikan pemahaman yang lebih terstruktur.

Teorema 3.1. (Boller, 2005) *Misalkan* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ *adalah fungsi yang terdiferensiasi kontinu pada suatu himpunan terbuka yang memuat* $\boldsymbol{a}$, *dan anggap bahwa determinan dari matriks Jacobian* $\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{a})$ *tidak nol, yaitu,* $\mathbf{det}\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$. *Maka, terdapat lingkungan terbuka* $\boldsymbol{V}$ *yang memuat* $\boldsymbol{a}$ *dan lingkungan terbuka* $\boldsymbol{W}$ *yang memuat* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, *sedemikian sehingga fungsi* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *memiliki invers kontinu* $\boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}: \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$ *dan fungsi invers tersebut terdiferensiasi untuk semua* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$. *Selain itu, turunan dari* $\boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}$ *diberikan oleh rumus:*

$$J(f^{-1})(y) = \left[Jf\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}, \forall\ y \in W.$$

BUKTI.
1. Keberadaan Invers Lokal
   Karena $Jf(a)$ merupakan matriks yang memiliki invers, maka fungsi f dapat didekati secara linear di sekitar a dengan
   $$f(x) \approx f(a) + Jf(a)(x-a).$$
   Karena $Jf(a)$ adalah operator linear bijektif, maka terdapat lingkungan kecil V dari a sehingga f bernilai injektif dalam V. Hal ini memastikan bahwa tidak ada dua titik berbeda dalam V yang memiliki nilai fungsi yang sama.
   Berdasarkan Teorema Eksistensi Invers, dapat disimpulkan bahwa terdapat lingkungan terbuka W dari $f(a)$ sedemikian sehingga f memiliki invers lokal $f^{-1}: W \to V$.
2. Diferensiabilitas dari f^{-1}
   Keberadaan turunan dari f^{-1} diperoleh dengan mendiferensiasi persamaan
   $$f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$
   Menerapkan aturan rantai terhadap kedua sisi persamaan menghasilkan
   $$J\left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right) = Jf\left(f^{-1}(y)\right) \cdot J\left(f^{-1}(y)\right) = I,$$
   dengan I merupakan matriks identitas.
   Karena $Jf\left(f^{-1}(y)\right)$ adalah matriks inversibel dalam lingkungan V, maka diperoleh ekspresi untuk turunan
   $$J(f^{-1})(y) = \left[Df\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}.$$
   Kontinuitas dari turunan $Jf(x)$ pada V memastikan bahwa $Jf(f^{-1})(y)$ juga kontinu di W. Akibatnya, $J(f^{-1})(y)$ juga kontinu di W, yang membuktikan bahwa f^{-1} terdiferensiasi kontinu. □

Klaim 3.1. *Misalkan* $f: U \to \mathbb{R}^n$ *adalah fungsi yang terdiferensiasi secara kontinu pada himpunan terbuka* $U \subseteq \mathbb{R}^n$. *Jika untuk setiap* $x \in U$ *matriks turunan* $f'(x)$ *bersifat invertibel dan memenuhi* $\|[f'(x)]^{-1}\| \leq 2$, *maka untuk setiap* $x_1, x_2 \in U$ *berlaku*
$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

BUKTI. Karena f terdiferensiasi, teorema nilai rat-rata dalam dimensi banyak menyatakan bahwa ada suatu titik c di antara x_1 dan x_2 sehingga
$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2).$$
Karena $f'(c)$ bersifat invertibel, maka kedua ruas dapat dikalikan dengan $[f'(c)]^{-1}$ sehingga
$$[f'(c)]^{-1}\left(f(x_1) - f(x_2)\right) = x_1 - x_2.$$
Dengan menggunakan sifat norma operator, diperoleh
$$\|x_1 - x_2\| = \left\|[f'(c)]^{-1}\left(f(x_1) - f(x_2)\right)\right\|$$
$$\|x_1 - x_2\| \leq \|[f'(c)]^{-1}\| \cdot \|f(x_1) - f(x_2)\|$$
Karena diberikan bahwa $\|[f'(x)]^{-1}\| \leq 2$ untuk setiap $x \in U$, maka khususnya untuk $x = c$ berlaku
$$\left\|\left[f'^{(c)}\right]^{-1}\right\| \leq 2.$$
Sehingga,
$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|$. □

Klaim 3.2. *Diberikan* $y \in W$, *terdapat tepat satu* $x \in U$ *sehingga* $f(x) = y$.

BUKTI.

Keberadaan $\boldsymbol{x}$. Didefinisikan fungsi

$$h(x) = \|y - f(x)\|^2.$$

Fungsi ini mengukur seberapa jauh $f(x)$ dari y. Jika $h(x) = 0$, maka $f(x) = y$, yang berarti x adalah solusi.

Karena $h(x)$ adalah fungsi kontinu, ia akan mencapai nilai terkecilnya pada suatu titik dalam U. Jika minimum ini bernilai nol, maka ada suatu x dalam U yang memenuhi $f(x) = y$ yang membuktikan bahwa solusi pasti ada.

Keunikan $\boldsymbol{x}$. Misalkan terdapat dua titik x_1 dan x_2 di U yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2) = y$. Dari klaim 3.1, diketahui bahwa jarak antara x_1 dan x_2 memenuhi

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

Karena $f(x_1) = f(x_2)$, maka $\|f(x_1) - f(x_2)\| = 0$, sehingga

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2 \times 0 = 0.$$

Artinya, $x_1 = x_2$, yang membuktikan bahwa solusi hanya satu. □

Klaim 3.3. f^{-1} *adalah fungsi kontinu.*

BUKTI. Untuk $y_1, y_2 \in W$, pilih $x_1, x_2 \in U$ sehingga $f(x_1) = y_1$ dan $f(x_2) = y_2$. Dari Klaim 3.1, diketahui bahwa

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|,$$

atau dengan kata lain,

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|.$$

Sekarang mudah untuk melihat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, cukup memilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ agar jika $\|y_1 - y_2\| < \delta$, maka

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| < \varepsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa f^{-1} bersifat kontinu. □

Klaim 3.4. f^{-1} *dapat didiferensialkan.*

BUKTI. Diketahui bahwa f memiliki invers lokal, artinya terdapat lingkungan sekitar suatu titik di mana f^{-1} terdefinisi. Juga diberikan bahwa f terdiferensialkan dan Jacobian $J_f(x)$ kontinu.

Karena f^{-1} merupakan invers lokal dari f, berlaku identitas:

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y.$$

Diferensiasi kedua sisi terhadap y menggunakan aturan rantai:

$$J_f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot J_{f^{-1}}(y) = I_n,$$

di mana I adalah matriks identitas $n \times n$.

Karena $J_f\big(f^{-1}(y)\big)$ diasumsikan invertibel dalam lingkungan tersebut, maka dengan mengalikan kedua sisi dengan inversnya diperoleh:

$$J_{f^{-1}}(y) = \Big[J_f\big(f^{-1}(y)\big)\Big]^{-1}.$$

Ini menunjukkan bahwa f^{-1} terdiferensialkan dan turunan Jacobian-nya diberikan oleh rumus tersebut. Jika $n = 1$ (fungsi skalar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), maka Jacobian berukuran 1×1 dan identitas ini cukup dituliskan sebagai $f'\big(f^{-1}(y)\big) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$. □

4. APLIKASI TEOREMA FUNGSI INVERS

Teorema fungsi invers memiliki berbagai aplikasi dalam analisis matematika dan keuangan. Salah satu penerapan utama adalah dalam estimasi volatilitas model stokastik. Berikut tiga contoh yang menunjukkan bagaimana teorema ini digunakan dalam berbagai konteks.

Contoh 4.1. *Misalkan fungsi* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *didefinisikan sebagai berikut.*

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}$$

Buktikan bahwa f memiliki invers lokal di sekitar suatu titik (x_0, y_0), dan tentukan ekspresi eksplisit untuk inversnya, f^{-1}. Selanjutnya hitung nilai $f\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ dan tentukan nilai $f^{-1}(u, v)$ untuk hasil yang diperoleh.

Penyelesaian:

1. Menentukan Jacobian untuk keberadaan invers lokal
$$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}$$
Matriks Jacobian dari $f(x, y)$ adalah:
$$J_f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$
Determinannya adalah:
$$\begin{aligned} \det J_f(x, y) &= e^x \cos y \cdot e^x \cos y - (-e^x \sin y \cdot e^x \sin y) \\ &= e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) \\ &= e^{2x} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Karena $\det J_f(x, y) \neq 0$, maka $f(x, y)$ memiliki invers lokal di sekitar setiap titik dalam $\mathbb{R}^2$.
2. Menentukan ekspresi fungsi invers f^{-1}.
Misalkan $(u, v) = f(x, y)$, yaitu:
$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

Dari sini, kita dapat mengekspresikan x dan y dalam bentuk u, v:

a. Menentukan x

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 \\ &= e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) \\ &= e^{2x} \\ x &= \tfrac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) \\ x &= \ln\sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

b. Menentukan y

$$\begin{aligned} \frac{e^x \sin y}{e^x \cos y} &= \frac{v}{u} \\ \tan y &= \frac{v}{u} \\ y &= \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \end{aligned}$$

Sehingga, fungsi inversnya adalah:

$$f^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} \ln\sqrt{u^2 + v^2} \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{v}{u}\right) \end{bmatrix}$$

3. Menghitung $f\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

Substitusi $x = 1$ dan $y = \frac{\pi}{4}$ ke dalam $f(x, y)$ diperoleh

$$u = e^x \cos y = e^1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e}{2}\sqrt{2},$$
$$v = e^x \sin y = e^1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e}{2}\sqrt{2}.$$

Jadi, $f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{e}{2}\sqrt{2}, \frac{e}{2}\sqrt{2}\right)$

4. Menghitung $f^{-1}(u, v)$

Menggunakan ekspresi invers untuk menghitung $f^{-1}(u, v)$ dengan $u = \frac{e}{2}\sqrt{2}$ dan $v = \frac{e}{2}\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} x &= \ln\sqrt{u^2 + v^2} \\ &= \ln\sqrt{\left(\frac{e}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \ln\sqrt{\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}} \\ &= \ln\sqrt{e^2} \\ &= \ln e \\ &= 1 \\ y &= \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{e}{2}\sqrt{2}}{\frac{e}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \tan^{-1}(1) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

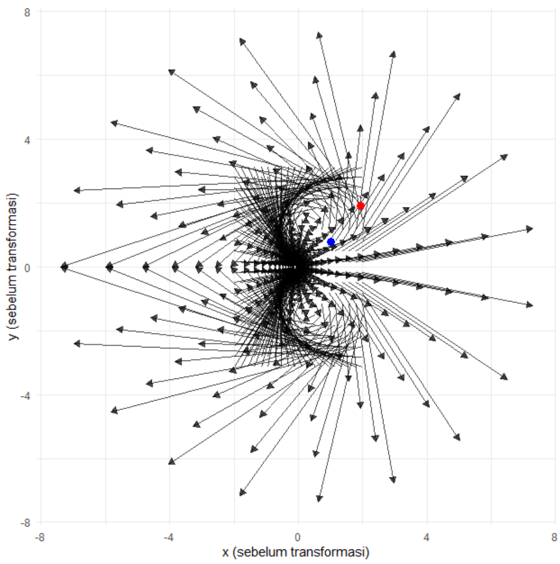
Jadi, diperoleh

$$f^{-1}\left(\frac{e}{2}\sqrt{2}, \frac{e}{2}\sqrt{2}\right) = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

Hasilnya sesuai dengan titik awal, yang membuktikan bahwa inversnya benar.

Verifikasi hasil secara numerik dan visual dilakukan menggunakan bahasa pemrograman **R**. Metode ini memungkinkan perhitungan nilai transformasi fungsi serta inversnya, sekaligus menghasilkan visualisasi perubahan koordinat. Script R digunakan untuk menghitung $f\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ serta fungsi inversnya $f^{-1}(u, v)$, kemudian hasil komputasi dibandingkan dengan perhitungan manual untuk memastikan konsistensi. Selain itu, visualisasi transformasi fungsi dalam bentuk vektor memberikan gambaran intuitif mengenai perubahan koordinat dari (x, y) ke (u, v). Grafik hasil transformasi ditampilkan pada Gambar 1.

Gambar 1 menunjukkan visualisasi transformasi dari ruang (x, y) ke (u, v) menggunakan fungsi $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Panah pada diagram merepresentasikan bagaimana titik-titik dalam domain (x, y) dipetakan ke titik baru dalam ruang hasil (u, v). Titik biru menunjukkan titik referensi sebelum transformasi, yaitu $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, sementara titik merah adalah hasil transformasi dari titik tersebut, yang dihitung sebagai $\left(\frac{e}{2}\sqrt{2}, \frac{e}{2}\sqrt{2}\right)$. Dari pola panah yang mengarah menjauhi pusat, terlihat bahwa transformasi ini memperbesar jarak dari sumbu vertikal secara eksponensial seiring bertambahnya x, sementara rotasi ditentukan oleh y, mengikuti pola koordinat polar.



Gambar 1. Visualisasi Transformasi Fungsi $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ dengan Titik Referensi.

Contoh 4.2. *Misalkan X dan Y adalah variabel acak dengan distribusi bersama yang diketahui. Didefinisikan dua variabel acak baru U dan V sebagai transformasi dari X dan Y, yaitu:*

$$U = X^2 + Y^2, \qquad V = XY.$$

Tentukan distribusi bersama dari U dan V dengan menggunakan teorema fungsi invers, serta jelaskan langkah-langkah implementasi metode ini dalam analisis stokastik.

Penyelesaian:

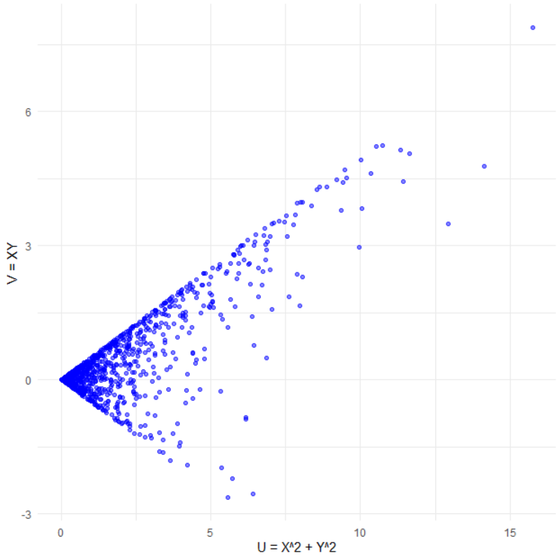
Dalam konteks stokastik, biasanya seseorang tertarik untuk memahami bagaimana distribusi suatu vektor acak berubah di bawah transformasi tertentu. Dalam kasus ini, diberikan dua variabel acak X dan Y yang memiliki distribusi bersama yang diketahui, dan pada soal diminta untuk menemukan distribusi dari variabel baru $U = X^2 + Y^2$ dan $V = XY$. Untuk menyelesaikan masalah ini, dapat digunakan Teorema fungsi invers yang memungkinkan untuk menemukan distribusi bersama dari pasangan variabel acak baru U dan V dengan cara mengubah variabel acak asal X dan Y. Langkah pertama adalah mengekspresikan transformasi dan menghitung fungsi invers dari transformasi tersebut, kemudian menentukan distribusi bersama dari U dan V.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Menentukan transformasi variabel acak
   Diberikan transformasi sebagai berikut:
   $$U = X^2 + Y^2, \qquad V = XY.$$
   Di sini, akan dicari distribusi bersama dari U dan V berdasarkan distribusi bersama $f_{X,Y}(x, y)$.
2. Menentukan fungsi invers
   Untuk menggunakan teorema fungsi invers, perlu menemukan fungsi invers dari transformasi ini. Dua persamaan U dan V membentuk sistem non-linear, tetapi kita bisa mengekspresikan X dan Y sebagai solusi dari persamaan kuadrat:
   $$t^2 - St + P = 0,$$
   dengan:
    $S = X + Y$ (jumlah akar)
    $P = XY = V$ (perkalian akar)
   Sehingga diperoleh,
   $U = X^2 + Y^2$
   $U = X^2 + 2XY + Y^2 - 2XY$
   $U = (X + Y) - 2XY$
   $U = S^2 - 2P \Rightarrow S^2 = U + 2V$
   Jadi, $S = \pm\sqrt{U + 2V}$.
   Dari sifat akar-akar persamaan kuadrat,
   $$X, Y = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}.$$
   Substitusi $S = \pm\sqrt{U + 2V}$ dan $P = V$, maka diperoleh,
   $$X, Y = \frac{\sqrt{U + 2V} \pm \sqrt{\left(\sqrt{U + 2V}\right)^2 + 4V}}{2}$$
   $$X, Y = \frac{\sqrt{U + 2V} \pm \sqrt{(U + 2V) - 4V}}{2}$$
   $$X, Y = \frac{\sqrt{U + 2V} \pm \sqrt{U - 2V}}{2}$$
3. Menghitung determinan Jacobian
   Determinan Jacobian dari transformasi ini digunakan untuk menyesuaikan distribusi bersama. Jacobian dari transformasi tersebut dapat dihitung dengan rumus:
   $$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2X & 2Y \\ Y & X \end{vmatrix}$$
   dengan $U = X^2 + Y^2$ dan $V = XY$, maka diperoleh
   $$\det(J) = 2X^2 - 2Y^2 = 2(X^2 - Y^2).$$
   Jika dituliskan dalam bentuk U dan V diperoleh $\det(J)$
   $= 2\left(\frac{\sqrt{U + 2V} + \sqrt{U - 2V}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{U + 2V} - \sqrt{U - 2V}}{2}\right)^2$
   $= \frac{2(U + 2V)(U - 2V)}{2} + \frac{2(U + 2V)(U - 2V)}{2}$
   $= \frac{4(U + 2V)(U - 2V)}{2}$
   $= 2(U + 2V)(U - 2V)$
   $= 2(U^2 - 4V^2)$.
4. Menentukan distribusi bersama (U, V)
   Setelah menghitung Jacobian, selanjutnya menggunakan rumus teorema fungsi invers untuk menghitung distribusi bersama dari U dan V, yaitu:
   $$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y) \times \frac{1}{|\det J|}$$
   $$= f_{X,Y}(x, y) \times \frac{1}{|2(U^2 - 4V^2)|}.$$
   Jika fungsi $f_{X,Y}(x, y)$ diketahui, kita bisa langsung mensubstitusi nilainya untuk mendapatkan distribusi bersama (U, V).

Untuk memahami contoh soal tersebut, dapat dilakukan simulasi data untuk variabel acak X dan Y, kemudian menghitung transformasi $U = X^2 + Y^2$ dan $V = XY$. Setelah itu, dapat digambarkan distribusi bersama (U, V) untuk melihat bagaimana hasil transformasi tersebut terlihat dalam bentuk plot. Pada data simulasi, digunakan distribusi normal bivariat sebagai distribusi bersama X dan Y dan menggunakan 1000 pasangan data X dan Y, kemudian menghitung U dan V, dan akhirnya menampilkan distribusi (U, V) pada Gambar 2.

Gambar 2 menunjukkan sebaran titik hasil transformasi dari pasangan variabel acak (X, Y) ke pasangan variabel (U, V) dengan definisi transformasi $U = X^2 + Y^2$ dan $V = XY$. Distribusi hasil transformasi memiliki karakteristik unik, di mana nilai U selalu bernilai positif karena merupakan jumlah kuadrat, sedangkan V dapat bernilai positif atau negatif tergantung pada tanda dari X dan Y. Sebaran data terlihat membentuk daerah segitiga dengan kepadatan lebih tinggi di daerah dekat nol dan semakin menyebar untuk nilai U yang lebih besar. Ini menunjukkan bahwa setelah transformasi, distribusi bersama (U, V) memiliki pola yang berbeda dari distribusi normal bivariat awal, dengan batasan tertentu pada nilai U dan hubungan antara U dan V.



Gambar 2. Sebaran Distribusi Bersama Variabel Acak (U, V) dengan Transformasi $U = X^2 + Y^2$ dan $V = XY$.

Volatilitas harga saham merupakan parameter penting dalam analisis keuangan, terutama dalam pengambilan keputusan investasi, pengukuran risiko, dan penetapan harga opsi. Salah satu model stokastik yang sering digunakan untuk menggambarkan pergerakan harga saham adalah model Black-Scholes, yang didefinisikan oleh persamaan diferensial stokastik berikut (Lindgren, 2023):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (2)$$

dengan:

- S_t adalah harga saham pada waktu t,
- μ adalah tingkat pertumbuhan rata-rata harga saham,
- σ adalah volatilitas harga saham,
- W_t adalah proses Wiener (gerak Brownian).

Metode estimasi volatilitas berbasis teorema fungsi invers telah dibahas dalam literatur, termasuk dalam Yimamu & Deng (2022) tetapi umumnya hanya secara teoretis tanpa verifikasi numerik. Penelitian ini mengembangkan metode tersebut dengan menambahkan simulasi untuk menguji akurasinya terhadap data harga saham historis. Simulasi ini juga membandingkan hasil estimasi dengan metode konvensional seperti *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) guna mengevaluasi efisiensi pendekatan ini.

Contoh 4.3. *Diketahui bahwa volatilitas σ tidak diketahui secara langsung dan perlu diestimasi dari data harga saham historis. Dengan menggunakan teorema fungsi invers, volatilitas σ dapat diekstraksi secara eksplisit dari distribusi return harga saham yang diamati. Tentukan ekspresi eksplisit untuk volatilitas berdasarkan transformasi stokastik yang sesuai!*

Penyelesaian:

1. Mendefinisikan Transformasi Stokastik
   Untuk mengekstrak volatilitas σ, digunakan transformasi stokastik berikut:
   $$Y_t = \int_0^t \frac{dS_s - \mu S_s ds}{\sigma S_s}.$$
   Transformasi ini bertujuan untuk menghilangkan pengaruh drift (μ), sehingga hanya menyisakan komponen acak yang bergantung pada volatilitas σ.
2. Substitusi Model Black-Scholes
   Persamaan (2) disubstitusi ke dalam transformasi stokastik menghasilkan
   $$Y_t = \int_0^t \frac{\mu S_s ds + \sigma S_s dW_s - \mu S_s ds}{\sigma S_s}.$$
   Penyederhanaan ekspresi memberikan hasil:
   $$Y_t = \int_0^t \frac{\sigma S_s dW_s}{\sigma S_s}.$$
   Karena σS_s di pembilang dan penyebut saling meniadakan, diperoleh:
   $$Y_t = \int_0^t dW_s.$$
   Hasil ini menunjukkan bahwa transformasi stokastik Y_t mengikuti gerak Brownian standar.
3. Estimasi Volatilitas
   Dari hasil sebelumnya diperoleh:

$$dY_t = dW_t.$$

Karena W_t adalah gerak Brownian standar dengan varian t, maka

$$E[Y_t^2] = t.$$

Dengan menghubungkan Y_t dengan perubahan harga saham S_t, diperoleh:

$$Y_t = \int_0^t \frac{dS_s - \mu S_s ds}{\sigma S_s}.$$

Dalam praktiknya, harga saham S_t tidak diamati secara kontinu, melainkan dalam bentuk data diskrit pada waktu $t_0, t_1, \dots, t_N$ dengan interval waktu Δt. Oleh karena itu, integral perlu didiskretisasi sebagai

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N} \frac{dS_{t_i} - \mu S_{t_i}\Delta t}{\sigma S_{t_i}},$$

dengan pendekatan diskret,

$$dS_{t_i} \approx S_{t_i} - S_{t_{i-1}}.$$

Sehingga dipeoleh,

$$Y_t \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}\right) - \mu S_{t_{i-1}}\Delta t}{\sigma S_{t_{i-1}}}.$$

Karena Y_t adalah gerak Brownian standar dengan varian t, maka diperoleh hubungan:

$$E[Y_t^2] = t.$$

Dengan menyusun ulang ekspresi di atas, volatilitas σ dapat diekstrak sebagai berikut:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(S_{t_i} - S_{t_{i-1}}\right) - \mu S_{t_{i-1}}\Delta t}{S_{t_{i-1}}}.$$

Atau dalam bentuk lebih sederhana:

$$\sigma \approx \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(S_{t_i} - S_{t_{i-1}} - \mu S_{t_{i-1}}\Delta t\right)}{S_{t_{i-1}}\sqrt{\Delta t}}.$$

Dengan transformasi ini, volatilitas dapat dihitung langsung dari data harga saham tanpa harus mengetahui distribusi stokastik secara eksplisit.

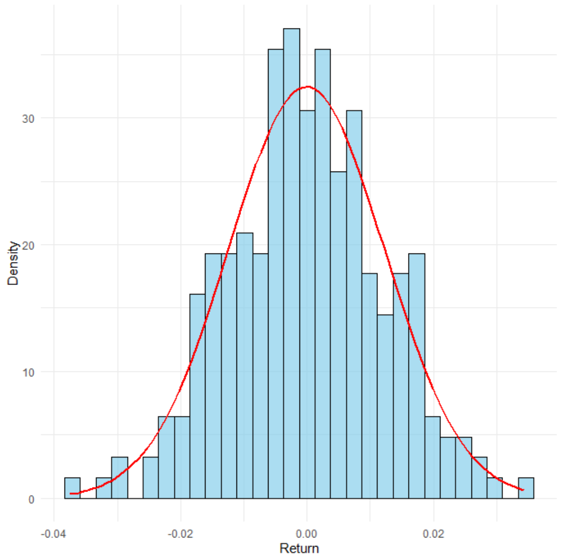
4. Simulasi dan Evaluasi Metode

Untuk menguji metode ini, dilakukan simulasi harga saham menggunakan model Black-Scholes. Script R digunakan untuk mensimulasikan data dan menghitung estimasi volatilitasnya. Hasil perbandingan estimasi volatilitas menggunakan teorema fungsi invers dan MLE ditunjukkan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Estimasi Volatilitas

Metode	Estimasi σ	Nilai σ sebenarnya
Teorema Fungsi Invers	0,1951697	0,2
MLE	0,1948430	0,2

Gambar 3 menunjukkan distribusi return saham yang diamati, dengan kurva merah menggambarkan distribusi normal yang sesuai dengan standar deviasi volatilitas yang telah dihitung. Hasil ini menunjukkan bahwa distribusi return saham mendekati distribusi normal, sesuai dengan asumsi model Black-Scholes.



Gambar 3. Distribusi *Return* Saham dan Estimasi Volatilitas.

Dengan demikian, penggunaan teorema fungsi invers memungkinkan ekstraksi volatilitas dari data pasar secara langsung tanpa menggunakan metode optimasi yang kompleks. Transformasi stokastik menyederhanakan distribusi *return* saham, sehingga menghasilkan estimasi parameter yang lebih akurat dan efisien dibandingkan pendekatan konvensional seperti MLE.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Artikel ini membahas pembuktian sistematis teorema fungsi invers dan penerapannya dalam estimasi volatilitas model stokastik, khususnya dalam model Black-Scholes. Melalui serangkaian klaim matematis, dibuktikan bahwa fungsi invers dapat dibangun secara lokal dengan sifat kontinuitas dan diferensiabilitas. Dalam aplikasinya, metode berbasis teorema fungsi invers memungkinkan estimasi volatilitas dari data historis harga saham tanpa memerlukan asumsi distribusi eksplisit. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pendekatan ini lebih akurat dan efisien secara komputasional dibandingkan metode konvensional seperti MLE. Oleh karena itu, temuan ini memberikan kontribusi penting dalam analisis risiko keuangan, penetapan harga opsi, dan pemodelan pasar keuangan.

Sebagai arah pengembangan lebih lanjut, pendekatan berbasis teorema fungsi invers dapat diterapkan pada model stokastik lainnya, seperti model Heston atau Variance Gamma, untuk menguji keandalannya dalam berbagai skenario pasar. Selain itu, penelitian lanjutan dapat mengeksplorasi pengaruh noise dalam data keuangan terhadap akurasi estimasi volatilitas, serta mengintegrasikan metode machine learning guna meningkatkan efisiensi perhitungan. Studi lebih lanjut juga dapat mempertimbangkan penerapan teknik ini dalam konteks risiko sistemik dan optimasi portofolio, sehingga manfaatnya dapat diperluas dalam pengambilan keputusan keuangan yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Acciaio, B., & Guyon, J. (2020). Short Communication: Inversion of Convex Ordering: Local Volatility Does Not Maximize the Price of VIX Futures. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, *11*(1). https://doi.org/10.1137/19M129303X

Amorim, L., & Tu, J. (2022). The inverse function theorem for curved L-infinity spaces. *Journal of Noncommutative Geometry*, *16*(4). https://doi.org/10.4171/JNCG/484

Andersen, T. G., Bollersley, T., & Diebold, F. X. (2010). Parametric and Nonparametric Volatility Measurement. In *Handbook of Financial Econometrics, Vol 1*. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-50897-3.50005-5

Badikov, S., Davis, M. H. A., & Jacquier, A. (2021). Perturbation analysis of sub/super hedging problems. *Mathematical Finance*, *31*(4). https://doi.org/10.1111/mafi.12321

Bhowmik, R., & Wang, S. (2020). Stock market volatility and return analysis: A systematic literature review. *Entropy*, Vol. 22. https://doi.org/10.3390/E22050522

Boukhetala, K. (2011). Sim . DiffProc : A Package for Simulation of Diffusion Processes in R. *Journal of Statistical Software*.

Chen, Q. (2018). Recovery of local volatility for financial assets with mean-reverting price processes. *Mathematical Control and Related Fields*, *8*(3–4). https://doi.org/10.3934/mcrf.2018026

de Oliveira, O. (2013). The implicit and the inverse function theorems: Easy proofs. *Real Analysis Exchange*, *39*(1). https://doi.org/10.14321/realanalexch.39.1.0207

Dupret, J. L., Barbarin, J., & Hainaut, D. (2023). Impact of rough stochastic volatility models on long-term life insurance pricing. *European Actuarial Journal*, *13*(1). https://doi.org/10.1007/s13385-022-00317-1

Hansen, C. S. (2021). Real Analysis. In *Synthese Library* (Vol. 446). https://doi.org/10.1007/978-3-030-88534-2_9

Ippoliti, E. (2021). Why Finance Needs Philosophy (and Vice Versa): Some Epistemic and Methodological Issues. *Foundations of Science*. https://doi.org/10.1007/s10699-021-09804-2

Janssen, A., & Drees, H. (2016). A stochastic volatility model with flexible extremal dependence structure. *Bernoulli*, *22*(3). https://doi.org/10.3150/15-BEJ699

Jin, X., & Hong, Y. (2023). Jump-diffusion volatility models for variance swaps: An empirical performance analysis. *International Review of Financial Analysis*, *87*. https://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.102606

Kusumawati, I. B., Fachrudin, A. D., Putri, R. I. I., Zulkardi, Z., Widadah, S., & Mubarok, M. K. (2022). Islamic Financial Literacy in Mathematics Education: Proposed Design for Instruction. *Proceedings of the Eighth Southeast Asia Design Research (SEA-DR) & the Second Science, Technology, Education, Arts, Culture, and Humanity (STEACH) International Conference (SEADR-STEACH 2021)*, *627*. https://doi.org/10.2991/assehr.k.211229.021

Lindgren, J. (2023). A Generalized Model for Pricing Financial Derivatives Consistent with Efficient Markets Hypothesis—A Refinement of the Black-Scholes Model.

Risks, *11*(2). https://doi.org/10.3390/risks11020024

Malhotra, G., Srivastava, R., & Taneja, H. C. (2018). Quadratic approximation of the slow factor of volatility in a multifactor stochastic volatility model. *Journal of Futures Markets*, *38*(5). https://doi.org/10.1002/fut.21895

Mariani, M. C., Bhuiyan, M. A. M., Tweneboah, O. K., Gonzalez-Huizar, H., & Florescu, I. (2018). Volatility models applied to geophysics and high frequency financial market data. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *503*, 304–321. https://doi.org/10.1016/J.PHYSA.2018.02.167

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2). https://doi.org/10.1007/BF00305619

Wolf, F., Nabin, M. H., & Bhattacharya, S. (2018). A Mathematical Demonstration of the Viability of Profit/Loss Sharing as a Debt Alternative in Presence of Market Frictions. *Journal of Emerging Market Finance*, *17*(3_suppl). https://doi.org/10.1177/0972652718798075

Yfanti, S., & Karanasos, M. (2022). Financial volatility modeling with option-implied information and important macro-factors. *Journal of the Operational Research Society*, *73*(9). https://doi.org/10.1080/01605682.2021.1966327

Yimamu, Y., & Deng, Z. (2022). Convergence of Inverse Volatility Problem Based on Degenerate Parabolic Equation. *Mathematics*, *10*(15). https://doi.org/10.3390/math10152608