E-Jurnal Matematika Vol. 14(1), Januari 2025, pp. 1-7 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2025.v14.i01.p472

BEBERAPA SIFAT PEMETAAN C-KONTRAKTIF DI RUANG METRIK PARSIAL DAN TITIK TETAPNYA

Rosanti Wahidatussolihah[1§], Qurratul Aini[2], Marwan[3]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Mataram [Email: rosantiws29@gmail.com]
[2]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Mataram [Email: qurratulaini.aini@unram.ac.id]
[3]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA – Universitas Mataram [Email: marwan.math@unram.ac.id]
[§]*Corresponding Author*

ABSTRACT

Partial metric space is a generalization of ordinary metric space, in partial metric space the axiom d(x,x) is no longer necessarily zero. Partial metric space was first introduced in 1994, since then many researchers have continued to learn about partial metric spaces. Fixed point is one of the interesting topic to learn in partial metric spaces, so many researchers have conducted research on this topic.. In this research, the researcher study the concept of C-contractive mapping in partial metric space and the existence of fixed point from this mapping. This research was conducted using a literature review, by collecting scientific articles and books related to the topic of this research. The results show that if f *is a mapping in complete partial metric space that satisfies the condition* $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha(\rho\big(x, f(y)\big) + \rho(f(x), y))$ *with* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$*, then* f *has fixed point*

Keywords*: C-contractive Mapping, Fixed Point, Metric Space, Partial Metric Space.*

1. PENDAHULUAN

Titik tetap dari sebuah transformasi bersifat sangat penting, karena titik tetap memberikan informasi terkait bagian mana dari suatu ruang yang tetap diam atau tidak berpindah oleh transformasi. Selain itu, gagasan tentang titik tetap dibangun oleh dua komponen utama, yaitu pemetaan kontraktif itu sendiri dan ruang tempat pemetaan kontraktif tersebut berada (Ansar & Hikmah, 2020). Teori titik tetap berfungsi sebagai alat yang dapat digunakan untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi dari suatu persamaan dengan bentuk $x = f(x)$.

Teori titik tetap merupakan salah satu topik menarik yang telah mendapat perhatian banyak para peneliti. Ansar dan Hikmah (2020) melakukan penelitian dengan melibatkan tinjauan pustaka terkait artikel dan buku yang membahas konsep ruang metrik kompleks dan pemetaan c-kontraktif. Penelitian ini merrumuskan teorema titik tetap untuk pemetaan C-kontraktif dan C-kontraktif lemah di ruang metrik kompleks, yang menunjukkan bahwa pemetaan ini memiliki titik tetap yang tunggal pada ruang metrik kompleks yang lengkap.

Huda (2015) melakukan penelitian mengenai eksistensi titik tetap yang mencakup analisis syarat yang cukup untuk memastikan bahwa suatu pemetaan memiliki titik tetap. Selain itu, penelitian in juga bertujuan untuk menunjukkan ketunggalan titik tetap tersebut untuk pemetaan kontraktif pada ruang Metrik-G lengkap. Penelitian ini menghasilkan pemahaman mengenai sifat-sifat dari ruang metrik-G lengkap dan syarat cukup agar suatu pemetaan memiliki titik tetap yang tunggal pada ruang metrik-G lengkap.

Berdasarkan penjelasan yang telah dipaparkan sebelumnya, sejumlah peneliti telah melakukan penelitian terkait teori titik tetap. Penelitian tersebut mencakup analisa eksistensi titik tetap untuk berbagai jenis operator pada ruang metrik parsial, serta analisa eksistensi titik tetap pemetaan C-kontraktif pada beberapa hasil perluasan ruang metrik, seperti ruang metrik bernilai kompleks dan ruang metrik-G.

Penelitian mengenai eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan C-kontraktif yang ada pada ruang metrik parsial masih terbilang jarang dilakukan. Oleh karena itu, berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa penulis sebelumnya, penulis merasa tertarik untuk melakukan penelitian menenai teori titik tetap pemetaan C-kontraktif pada ruang metrik parsial. Penelitian ini akan membahas sifat-sifat pemetaan C-kontraktif serta eksistensi titik tetapnya pada ruang metrik parsial. Penelitian ini merupakan bagian pengembangan dari penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti terkait topik yang sama.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dengan menggunakan metode kajian pustaka atau studi literatur, yaitu dengan mengumpulkan serta mempelajari berbagai referensi dari buku, artikel maupun sumber lain yang berkaitan dengan topik utama dalam penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dapat dilihat pada tahapan berikut:

2.1 Studi literatur

Penulis mengumpulkan berbagai referensi yang berkaitan dengan ruang Metrik, ruang Metrik Parsial, Pemetaan C-kontraktif dan titik tetap dari berbagai sumber seperti buku maupun artikel.

2.2 Mempelajari konsep ruang Metrik Parsial

Pada tahap ini, penulis mengkaji materi terkait definisi ruang Metrik Parsial, barisan di ruang Metrik Parsial, serta syarat suatu ruang Metrik Parsial dapat dikatakan lengkap.

2.3 Mengkaji pemetaan C-kontraktif

Tahap selanjutnya adalah mempelajari konsep pemetaan C-kontraktif yang ada di ruang Metrik Parsial serta sifat yang dimiliki oleh pemetaan tersebut.

2.4 Titik tetap pemetaan C-kontraktif

Pada tahap ini, penulis mengkaji apa saja syarat yang harus dipenuhi untuk menjamin bahwa pemetaan C-kontraktif memiliki titik tetap.

2.5 Penarikan kesimpulan

Langkah terakhir adalah menarik kesimpulan berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan sebelumnya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial

Definisi 3.1 (Shirali & Vasudeva, 2000) *Himpunan tak kosong X bersama dengan sebuah pemetaan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut sebagai ruang metrik jika pemetaan d memenuhi aksioma berikut:*

(1) $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X$
(2) $d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X, x \neq y$
(3) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$, $\forall x,y \in X$
(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in X$

Pemetaan d disebut sebagai metrik pada himpunan X

Definisi 3.2 (Matthews, 1992) *Misalkan X adalah suatu himpunan yang tidak kosong dan fungsi $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dengan $\mathbb{R}_{\geq 0}$ menyatakan bilangan real non negatif. Pasangan (X, ρ) dikatakan sebagai ruang metrik parsial apabila memenuhi seluruh aksioma berikut:*

(1) $\forall\, x,y \in X,\ x = y \Leftrightarrow \rho(x,x) = \rho(x,y) = \rho(y,y)$, *dengan* $\rho(x,y) \geq 0$
(2) $\forall\, x,y \in X,\ \rho(x,x) \leq \rho(x,y)$
(3) $\forall\, x,y \in X,\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$
(4) $\forall\, x,y,z \in X,\ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) - \rho(y,y)$

Fungsi ρ yang memenuhi semua aksioma tersebut disebut sebagai fungsi metrik parsial.

Mohsenalhosseini, dkk (2011) menjelaskan bahwa jika ρ merupakan fungsi metrik parsial pada X, maka fungsi $d_s: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ yang didefinisikan oleh $d_s(x,y) = 2\rho(x,y) - \rho(x,x) - \rho(y,y)$ merupakan suatu metrik pada X.

Teorema 3.1 (Soemarsono, Yunus, Apriliani, & Adam, 2023) *Jika $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \rho)$ merupakan suatu ruang metrik parsial dengan $\rho : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ merupakan fungsi metrik parsial, maka $(\mathbb{R}_{\geq 0}, d_s)$ merupakan ruang metrik biasa dengan fungsi metrik $d_s: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ yang didefinisikan oleh $d_s(x,y) = 2\rho(x,y) - \rho(x,x) - \rho(y,y)$.*

Bukti:

(1) Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} d_s(x,y) &= 2\rho(x,y) - \rho(x,x) - \rho(y,y) \\ &= 2\rho(y,x) - \rho(y,y) - \rho(x,x) \\ &= d_s(y,x) \end{aligned}$$

Terbukti $d_s(x,y) = d_s(y,x)\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

(2) Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dimana $x \neq y$

$$\begin{aligned} d_s(x,y) &= 2\rho(x,y) - \rho(x,x) - \rho(y,y) \\ &= \rho(x,y) + \rho(x,y) - \rho(x,x) - \rho(y,y) \end{aligned}$$

E-Jurnal Matematika Vol. 14(1), Januari 2025, pp. 1-7 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2025.v14.i01.p472

$$= \big(\rho(x,y)-\rho(x,x)\big) + \big(\rho(x,y)-\rho(y,y)\big) \geq 0$$

$$= 2\rho(x,y)-\rho(x,x)-\rho(y,y) \geq 0$$

Jadi, $d_s(x,y) \geq 0, \forall\, x,y \in X$

(3) Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $d_s(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$. Misalkan $x,y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

($\Rightarrow$) Jika $d_s(x,y)=0$, akan ditunjukkan $x=y$

$$\begin{aligned} d_s(x,y) &= 2\rho(x,y)-\rho(x,x)-\rho(y,y) \\ &= \big(\rho(x,y)-\rho(x,x)\big) + \big(\rho(x,y)-\rho(y,y)\big) \end{aligned}$$

Dipenuhi jika $\rho(x,y)-\rho(x,x)=0$ dan $\rho(x,y)-\rho(y,y)=0$, mengakibatkan $\rho(x,y)=\rho(x,x)$ dan $\rho(x,y)=\rho(y,y)$

Karena $\rho(x,y)=\rho(x,x)=\rho(y,y)$, berdasarkan aksioma (1) pada Definisi 2.2 maka $x=y$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x=y$, akan ditunjukkan $d_s(x,y)=0$

Berdasarkan aksioma (1) pada Definisi 2.2, maka $\rho(x,y)=\rho(x,x)=\rho(y,y)$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} d_s(x,y) &= 2\rho(x,y)-\rho(x,x)-\rho(y,y) \\ &= \big(\rho(x,y)-\rho(x,x)\big) + \big(\rho(x,y)-\rho(y,y)\big) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(4) Untuk $x,y,z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, berdasarkan aksioma (4) pada Definisi 2.2 diperoleh:

$$\begin{aligned} d_s(x,z) &= 2\rho(x,z)-\rho(x,x)-\rho(z,z) \\ &\leq 2(\rho(x,y)+\rho(y,z)-\rho(y,y))-\rho(x,x)-\rho(z,z) \\ &= 2\rho(x,y)+2\rho(y,z)-2\rho(y,y)-\rho(x,x)-\rho(z,z) \\ &= 2\rho(x,y)+2\rho(y,z)-\rho(y,y)-\rho(y,y)-\rho(x,x)-\rho(z,z) \\ &= (2\rho(x,y)-\rho(x,x)-\rho(y,y))+(2\rho(y,z)-\rho(y,y)-\rho(z,z)) \\ &= d_s(x,y)+d_s(y,z) \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $d_s(x,z) \leq d_s(x,y)+d_s(y,z),\ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Karena seluruh aksioma dapat terpenuhi, dapat disimpulkan bahwa fungsi $d_s : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ yang didefinisikan oleh $d_s(x,y) = 2\rho(x,y)-\rho(x,x)-\rho(y,y)$ adalah suatu fungsi metrik pada $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Sehingga, $(\mathbb{R}_{\geq 0}, d_s)$ adalah ruang metrik.■

Selanjutnya diberikan contoh ruang metrik parsial.

Contoh 3.1 Misalkan suatu fungsi $\rho : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ yang didefinisikan oleh $\rho(x,y) = max\,(x,y)$ adalah fungsi metrik parsial pada $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dengan $max\,(x,y)$ menyatakan nilai maksimum dari dua buah bilangan real non negatif x dan y, maka pasangan $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \rho)$ disebut sebagai ruang metrik parsial.

Penyelesaian:

(1) Untuk aksioma pertama, ambil sebarang $x,y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, selanjutnya:

($\Rightarrow$) Untuk $x=y$, maka $max(x,x) = max(x,y) = max\,(y,y)$

Jadi, $x=y$ maka $\rho(x,x)=\rho(x,y)=\rho(y,y)$.

($\Leftarrow$) Jika $max(x,x) = max(x,y) = max\,(y,y)$, maka $x=y$

Sehingga, jika $\rho(x,x)=\rho(x,y)=\rho(y,y)$ maka $x=y$.

(2) Selanjutnya aksioma kedua, ambil ambil $x,y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} \rho(x,x) &= max(x,x) \\ &\leq max(x,y) = \rho(x,y) \end{aligned}$$

Sehingga, $\rho(x,x) \leq \rho(x,y)$.

(3) Selanjutnya aksioma ketiga, ambil $x,y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$\rho(x,y) = max(x,y) = max(y,x) = \rho(y,x)$

Jadi, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

(4) Untuk aksioma keempat, ambil $x,y,z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} \rho(x,y)+\rho(z,z) &= max(x,y) + max\,(z,z) \\ &\leq max(x,z) + max\,(y,z) \\ &= max(x,z) + max\,(z,y) \\ &= \rho(x,z) + \rho(z,y) \end{aligned}$$

Selanjutnya, pertidaksamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)-\rho(z,z)$.

Berdasarkan (1), (2), (3) dan (4), terbukti bahwa pasangan $(\mathbb{R}^+, \rho)$ merupakan suatu ruang metrik parsial.

Definisi 3.3 (Esi, Hanac, & Esi, 2019) *Misalkan (X,ρ) adalah suatu ruang metrik parsial, barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik parsial (X,ρ)*

dikatakan barisan yang konvergen menuju $x \in X$ *jika* $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga* $\forall\, n \geq n_0$ *berlaku:*

$$\rho(x_n, x) - \rho(x, x) < \varepsilon \text{ dan } \rho(x_n, x) - \rho(x_n, x_n) < \varepsilon$$

Definisi 3.4 (Bukatin, Kopperman, Matthews, & Pajoohesh, 2009) *Misalkan* (X, ρ) *adalah suatu ruang metrik parsial, barisan* $\{x_n\}$ *pada ruang metrik parsial* (X, ρ) *dikatakan sebagai barisan cauchy jika terdapat* $a \geq 0$ *sehingga* $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga* $\forall n, m > n_0$ *berlaku:*

$$|\rho(x_n, x_m) - a| < \varepsilon$$

Definisi 3.5 (Altun, Sola, & Simsek, 2010) *Ruang metrik parsial* (X, ρ) *dikatakan sebagai ruang metrik parsial lengkap apabila setiap barisan Cauchy* $\{x_n\}$ *pada ruang metrik parsial merupakan barisan yang konvergen menuju* $x \in X$*, yaitu* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = \rho(x, x)$.

Titik Tetap dan Pemetaan C-kontraktif

Definisi 3.6 (Agarwal, Meehan, & O'regan, 2001)
Misalkan $f: X \to X$ adalah suatu pemetaan pada ruang metrik (X, d), titik $x_f \in X$ yang memenuhi $f(x_f) = x_f$ disebut sebagai titik tetap.

Definisi 3.7 (Rhoades, 1977) *Misalkan* (X, ρ) *merupakan suatu ruang metrik parsial, pemetaan* $f: X \to X$ *disebut sebagai pemetaan C-kontraktif di ruang metrik parsial* (X, ρ) *apabila terdapat konstanta* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ *sehingga berlaku:*

$$\rho\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha\big(\rho\big(x, f(y)\big) + \rho\big(f(x), y\big)\big)$$

Berikut diberikan contoh pemetaan C-kontraktif yang ada di ruang metrik parsial.

Contoh 3.2 Misalkan $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \rho)$ merupakan suatu ruang metrik parsial dan $\rho: X \times X \to X$ adalah fungsi metrik parsial yang didefinisikan dengan:

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y| + |x| + |y|}{2}, \forall\, x, y \in X$$

adalah suatu fungsi metrik parsial. Misalkan pemetaan $T: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ didefinisikan dengan:

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 3 \\ \dfrac{x}{x+1}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Pemetaan T merupakan pemetaan C-kontraktif di ruang metrik parsial karena memenuhi kondisi yang ada pada Definisi 3.6. Penjelasan lebih lanjut, perhatikan penjelasan berikut:

Misalkan $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, akan ada tiga kemungkinan kasus yang terjadi, yaitu:

Kasus 1:Jika $x, y \in [0,3)$, maka jelas $T(x) = 0$ dan pemetaan T memenuhi kondisi pemetaan C-kontraktif yang diberikan pada Definisi 3.6.

Kasus 2: Jika $x, y \in [3, \infty)$, akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho\big(T(x), T(y)\big) &= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right| + \left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right| + \left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x-y}{(4)(4)}\right| + \left|\frac{x}{4}\right| + \left|\frac{y}{4}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x-y}{16}\right| + \left|\frac{x}{4}\right| + \left|\frac{y}{4}\right|\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left|\frac{x-y}{8}\right| + \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{y}{2}\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\left|\frac{x-y}{2}\right| + \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{y}{2}\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2(y+1)}\right| + \left|\frac{x}{2}\right| + \left|\frac{y}{2(y+1)}\right| + \left|\frac{x}{2(x+1)} - \frac{y}{2}\right| + \left|\frac{x}{2(y+1)}\right| + \left|\frac{y}{2}\right|\right) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\rho\big(x, T(y)\big) + \rho\big(T(x), y\big)\Big)
\end{aligned}$$

Kasus 3: Untuk $x \in [0,3)$ dan $y \in [3, \infty)$, atau $x \in [3, \infty)$ dan $y \in [0,3)$,
Misalkan $x \in [0,3)$ dan $y \in [3, \infty)$, akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(T(x), T(y)) &= \rho\left(0, \frac{y}{y+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left|0 - \frac{y}{y+1}\right| + |0| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\left|-\frac{y}{4}\right| + \left|\frac{y}{4}\right|\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left|-\frac{y}{2}\right| + \left|\frac{y}{2}\right|\right)
\end{aligned}$$

E-Jurnal Matematika Vol. 14(1), Januari 2025, pp. 1-7 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2025.v14.i01.p472

$$\leq \frac{1}{4}\left(\left|0-\frac{y}{2(y+1)}\right|+|0|+\left|\frac{y}{2(y+1)}\right|+\left|\frac{x}{2(x+1)}-0\right|+\left|\frac{x}{2(x+1)}\right|+|0|\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\rho\big(x,T(y)\big)+\rho\big(T(x),y\big)\right)$$

Dapat disimpulkan bahwa $\rho\big(T(x),T(y)\big) \leq \frac{1}{4}\left(\rho\big(x,T(y)\big)\,\rho\big(T(x),y\big)\right)$, sehingga pemetaan T merupakan pemetaan C-kontraktif dengan nilai $\alpha = \frac{1}{4}$. Selanjutnya, pemetaan tersebut memiliki satu buah titik tetap yaitu $T(0)=0$.

Berdasarkan contoh pemetaan C-kontraktif yang diberikan pada Contoh 3.1, dapat diketahui bahwa terdapat suatu pemetaan yang merupakan pemetaan C-kontraktif pada ruang metrik parsial dan memiliki titik tetap. Selanjutnya akan ditelusuri lebih jauh lagi terkait eksistensi titik tetap tersebut, apakah setiap pemetaan C-kontraktif pada ruang metrik parsial selalu memiliki titik tetap atau hanya berlaku pada kondisi tertentu.

Teorema 3.2 *Misalkan* $(\mathbb{R}_{\geq 0},\rho)$ *adalah ruang metrik parsial lengkap dan* $f:\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *adalah pemetaan C-kontraktif yang memenuhi kondisi berikut:*

$$\rho\big(f(x),f(y)\big) \leq \alpha(\rho\big(x,f(y)\big)+\rho(f(x),y))$$

Dengan:

$$0<\alpha<\frac{1}{2},$$

maka pemetaan C-kontraktif memiliki titik tetap pada ruang metrik parsial lengkap.

Bukti: Pertama, ambil $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ dan $x_1 = f(x_0)$, selanjutnya bentuk suatu barisan $\{x_n\}$ di $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dengan suku-suku barisan seperti berikut:
x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... , $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Karena f adalah pemetaan C-kontraktif, maka $\exists\, \alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sehingga:

$$\begin{aligned}
\rho(x_n,x_{n+1}) &= \rho(f(x_{n-1}),f(x_n)) \\
&\leq \alpha[\rho(x_{n-1},f(x_n)) +\rho(f(x_{n-1}),x_n)] \\
&= \alpha[\rho(x_{n-1},x_{n+1}) +\rho(x_n,x_n)] \\
&\leq \alpha[\rho(x_{n-1},x_n)+\rho(x_n,x_{n+1})-\rho(x_n,x_n)+\rho(x_n,x_n)] \\
&= \alpha[\rho(x_{n-1},x_n)+\rho(x_n,x_{n+1})]
\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(x_n,x_{n+1}) &\leq \alpha[\rho(x_{n-1},x_n) +\rho(x_n,x_{n+1})] \\
\Leftrightarrow (1-\alpha)[\rho(x_n,x_{n+1})] &\leq \alpha[\rho(x_{n-1},x_n)] \\
\Leftrightarrow \rho(x_n,x_{n+1}) &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\rho(x_{n-1},x_n)
\end{aligned}$$

Perhatikan kembali, dengan langkah yang sama diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n-1},x_n) &= \rho(f(x_{n-2}),f(x_{n-1})) \\
&\leq \alpha[\,\rho(x_{n-2},f(x_{n-1})) +\rho(f(x_{n-2}),x_{n-1})] \\
&= \alpha[\,\rho(x_{n-2},x_n) +\rho(x_{n-1},x_{n-1})] \\
&\leq \alpha\cdot[\,\rho(x_{n-2},x_{n-1}) +\rho(x_{n-1},x_n) -\rho(x_{n-1},x_{n-1}) +\rho(x_{n-1},x_{n-1})] \\
&= \alpha[\,\rho(x_{n-2},x_{n-1})+\rho(x_{n-1},x_n)]
\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n-1},x_n) &\leq \alpha[\rho(x_{n-2},x_{n-1}) +\rho(x_{n-1},x_n)] \\
\Leftrightarrow (1-\alpha)[\rho(x_{n-1},x_n)] &\leq \alpha\,\rho(x_{n-2},x_{n-1}) \\
\Leftrightarrow \rho(x_{n-1},x_n) &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\rho(x_{n-2},x_{n-1})
\end{aligned}$$

Secara umum diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(x_n,x_{n+1}) &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\rho(x_{n-1},x_n) \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\rho(x_{n-2},x_{n-1}) \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\rho(x_{n-2},x_{n-1}) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n\rho(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa:

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n\rho(x_0,x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Selanjutnya, misalkan $n,m \in \mathbb{N}$, dengan menggunakan aksioma (4) pada definisi 2.2 dan pertidaksamaan (1) akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+m}) &\le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+m}) - \rho(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n [\rho(x_0, x_1)] + \rho(x_{n+1}, x_{n+m}) - \rho(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n [\rho(x_0, x_1)] + \rho(x_{n+1}, x_{n+m}) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n [\rho(x_0, x_1)] + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_{n+m}) - \rho(x_{n+2}, x_{n+2}) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n [\rho(x_0, x_1)] + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n+1} [\rho(x_0, x_1)] + \rho(x_{n+2}, x_{n+m}) - \rho(x_{n+2}, x_{n+2}) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n [\rho(x_0, x_1)] + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n+1} [\rho(x_0, x_1)] + \rho(x_{n+2}, x_{n+m}) \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n [\rho(x_0, x_1)] + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n+1} [\rho(x_0, x_1)] + \ldots\ldots + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n+m-1} [\rho(x_0, x_1)] \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \ldots + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{m-1}\right) [\rho(x_0, x_1)] \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^i [\rho(x_0, x_1)] \\
&\le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^i [\rho(x_0, x_1)] \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left[\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right] [\rho(x_0, x_1)]
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa:

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \le \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left[\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right] [\rho(x_0, x_1)]$$

Perhatikan kembali bahwa:

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

sehingga akan diperoleh bahwa $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n = 0$, akibatnya $\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n, x_{n+m}) = 0$. Dapat disimpulkan bahwa barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di ruang metrik parsial $(\mathbb{R}_{\ge 0}, \rho)$.

Selanjutnya, karena $(\mathbb{R}_{\ge 0}, \rho)$ adalah ruang metrik parsial lengkap dan barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy, berdasarkan definisi ruang metrik parsial lengkap, maka barisan $\{x_n\}$ juga merupakan barisan yang konvergen.

Misalkan barisan $\{x_n\}$ konvergen menuju x, akan ditunjukkan bahwa x merupakan titik tetap dari pemetaan f. Karena barisan $\{x_n\}$ konvergen menuju x, maka $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall\, n \ge n_0$ berlaku:

$$\rho(x_n, x) - \rho(x, x) < \varepsilon \text{ dan}$$
$$\rho(x_n, x) - \rho(x_n, x_n) < \varepsilon$$

Selanjutnya, menggunakan aksioma (2) dan (4) pada definisi 2.2 akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho(x, f(x)) &\le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, f(x)) - \rho(x_n, x_n) \\
\Leftrightarrow \rho(x, f(x)) - \rho(x, x) &\le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, f(x)) - \rho(x_n, x_n) - \rho(x, x) \\
&\le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_n) - \rho(x_n, x_n) - \rho(x, x) \\
&= \rho(x, x_n) - \rho(x, x) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang dan $n \ge n_0$, akibatnya:

$$\rho(x, f(x)) - \rho(x, x) = 0$$

Sehingga diperoleh bahwa $\rho(x, f(x)) = \rho(x, x)$, berdasarkan aksioma pertama pada definisi 3.2 jika $(x, f(x)) = \rho(x, x)$ maka $f(x) = x$. Karena $f(x) = x$, berdasarkan definisi 3.6 tentang titik teta, maka terbukti bahwa x adalah titik tetap dari pemetaan f.■

4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian dan pembahasan yang telah dipaparkan sebelumnya, diperoleh bahwa:

1. Jika $(\mathbb{R}_{\ge 0}, \rho)$ merupakan suatu ruang metrik parsial dengan $\rho : \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ merupakan fungsi metrik parsial, maka $(\mathbb{R}_{\ge 0}, d_s)$ merupakan ruang metrik biasa dengan fungsi metrik $d_s : \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ yang didefinisikan oleh $d_s(x, y) = 2\rho(x, y) - \rho(x, x) - \rho(y, y)$.
2. Diberikan f pemetaan pada ruang metrik parsial lengkap yang memenuhi kondisi:
$$\rho(f(x), f(y)) \le \alpha(\rho(x, f(y)) + \rho(f(x), y))$$
Dengan $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, maka f adalah pemetaan C-kontraktif yang memiliki titik tetap pada ruang metrik parsial lengkap.

E-Jurnal Matematika Vol. 14(1), Januari 2025, pp. 1-7 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2025.v14.i01.p472

5. SARAN

Untuk penelitian selanjutnya dengan topik serupa, penulis memberikan saran untuk menganalisa eksistensi maupun ketunggalan titik tetap dari pemetaan C-kontraktif pada ruang yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P., Meehan, M., & O'regan, D. (2001). *Fixed Point Theory and Applications.* Cambridge: Cambridge University Press.

Altun, I., Sola, F., & Simsek, H. (2010). Generalized contractions on partial metric spaces. *Topology and its Applications*, 2778-2785.

Ansar, A., & Hikmah. (2020). Teori Titik Tetap Pemetaan C-Kontraktif di Ruang Metrik Kompleks. *Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya*.

Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., & Pajoohesh, H. (2009). Partial Metric Spaces. *American Mathematical Monthly*, 708-718.

Esi, A., Hanac, E., & Esi, A. (2019). Difference Convergence on Partial Metric Space. *AIP Conference Proceedings*.

Huda, N. (2015). Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Untuk Pemetaan Kontraktif Pada Ruang Metrik-G Komplit. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika Uny 2015*.

Matthews, S. (1992). *Partial metric spaces.* University of Warwick.

Mohsenalhosseini, S., Mazaheri, H., Deghan, M., & Zareh, A. (2011). Fixed Poont for Partial Metric Spaces. *International Scholarly Research Network Applied Mathematics*.

Rhoades, B. E. (1977). A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings. *Transaction of The American Mathematical Society*, 257-290.

Shirali, S., & Vasudeva, H. L. (2000). *Metric Spaces.* Pondicherry: Springer.

Soemarsono, A. R., Yunus, M., Apriliani, E., & Adam. (2023). Convergence and Completeness in L2(P) with respect to a Partial Metric . *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*.