Metrik Finsler *Pseudo*-Konveks Kuat pada Bundel Vektor Holomorfik

Haripamyu
FMIPA Universitas Andalas
Email: harpamyu@gmail.com

Jenizon
FMIPA Universitas Andalas
Email: jenizon@gmail.com

I Made Arnawa
FMIPA Universitas Andalas
Email: arnawa1963@gmail.com

***Abstract**: Rizza-negativity of holomorphic vector bundle E is a sufficient condition for the negativity of E. In the present paper, we shall discuss that as a special case, using the Rizza metric F which is derived from a Hermitian metric h also implies the negativity of E. Further we showed that for the negative holomorphic vector bundle there is a pseudo-convex Finsler metric with negative curvature.*

Keywords: *Hermitian metric, Rizza metric, Rizza-negativity.*

1. Pendahuluan

Suatu bundel garis holomorfik atas manifold kompleks kompak dikatakan negatif apabila dualnya positif atau *ample*. Suatu bundel garis holomorfik L negatif jika dan hanya jika L memiliki sebuah metrik Hermitian h dengan kurvatur negatif. Konsep tentang *ampleness* atau kenegatifan dari suatu bundel garis holomorfik adalah suatu gagasan yang penting dalam geometri aljabar, dan gagasan ini diperumum untuk kasus bundel vektor holomorfik dengan rank yang lebih tinggi ([1],[2]).

Misalkan M suatu manifold kompleks kompak dengan suatu sistem koordinat kompleks $\{U,(z^\alpha)\}$, dan misalkan $\pi: E \to M$ suatu bundel vektor holomorfik. Untuk sebarang $v \in \pi^{-1}(U)$, dapat dinyatakan sebagai $v = \sum \zeta^i e_i$, dengan $(e_1, \cdots, e_r)$ merupakan suatu *frame field* holomorfik lokal dan $(\zeta^1, \cdots, \zeta^r)$ adalah koordinat fiber di dalam E_z. Oleh karena itu $(z,\zeta) = (z^1, \cdots, z^m, \zeta^1, \cdots, \zeta^r)$ dapat dipandang sebagai suatu sistem koordinat holomorfik lokal di dalam $\pi^{-1}(U)$.

Jika himpunan semua elemen tak nol dari E dinyatakan dengan E^0 dan grup perkalian $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ bekerja pada E^0 dengan perkalian skalar, maka bundel proyektif $\phi: \mathbb{P}(E) \to M$ yang berasosiasi dengan E didefinisikan oleh $\mathbb{P}(E) = E^0/\mathbb{C}^*$.

Elemen $[v]$ di $\mathbb{P}(E)$ berhubungan dengan $v=(z,\zeta)\in E$ sehingga *tautological line bundle* $\mathbb{L}(E)\to\mathbb{P}(E)$ didefinisikan oleh [3]:

$$\mathbb{L}(E)=\{([v],V)\in\mathbb{P}(E)\times E|V\in[v]\} \tag{1}$$

Suatu bundel garis holomorfik L dikatakan negatif jika dan hanya jika L memiliki sebuah metrik Hermitian h dengan kurvatur negatif, yaitu kelas Chern pertama $c_1(L)$ diberikan oleh $\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log h\right]$ negatif.

Definisi 1.1. [2] *Bundel vektor holomorfik E dikatakan negatif apabila dual E^* ample, yaitu E negatif apabila $\mathbb{L}(E)$ negatif.*

Bundel vektor holomorfik E dikatakan *Griffiths-negative* apabila E memiliki suatu metrik Hermitian dengan kurvatur negatif. Jika E *Griffiths-negative* maka E negatif, tapi kebalikannya masih merupakan *open problem* [3].

Suatu metrik Finsler kompleks adalah suatu fungsi $F: E\to\mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut: (1). F *smooth* pada E^0 dan F kontinu pada E; (2) $F(z,\zeta)\geq 0$ dan $F(z,\zeta)=0$ jika dan hanya jika $\zeta=0$; dan (3) memenuhi kondisi homogenitas $F(z,\lambda\zeta)=|\lambda|^2F(z,\lambda)$ untuk sebarang $\lambda\in\mathbb{C}$. Suatu metrik Finsler F pseudo-konveks kuat pada fibers E_z disebut metrik Rizza.

Sebarang struktur Finsler kompleks F di E diidentifikasikan oleh suatu struktur Hermitian di $\mathbb{L}(E)$ dengan mengidentifikasikan $v\in E^0$ dengan $([v],v)\in\mathbb{P}(E)\times E^0$ [2]. Karena kurvatur dari $(\mathbb{L}(E),F)$ diberikan oleh $\bar{\partial}\partial\log F$, maka $\mathbb{L}(E)$ *negatif* jika dan hanya jika

$$\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\partial\log F<0 \tag{2}$$

Karakterisasi dari bundel vektor holomorfik negatif diberikan oleh Teorema 1.2.

Teorema 1.2. [2] *Bundel vektor holomorfik E atas suatu manifold kompleks kompak adalah negatif jika dan hanya jika E memiliki suatu struktur Finsler kompleks F sedemikian sehingga* $\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\partial\log F<0$.

Kobayashi [2] membahas tentang kenegatifan bundel vektor holomorfik dengan menggunakan studi *ampleness*. Kenegatifan ini juga dibahas oleh [3] dengan menggunakan geometri Finsler kompleks sebagai pengganti dari *ampleness*. Definisi tentang kondisi *Rizza-negative* untuk suatu bundel vektor holomorfik diperkenalkan dalam [3]. Selanjutnya dengan menggunakan teorema tentang formula kurvatur dari metrik Hermitian pada $\mathbb{L}(E)$, [3] menunjukkan bahwa asumsi *Rizza-negative* ini merupakan syarat cukup untuk kenegatifan E. Kebalikannya, kenegatifan bundel vektor holomorfik belum menjamin kondisi *Rizza-negative* untuk E dan ini masih merupakan open problem.

Cao-Wong [4] membuktikan bahwa E memiliki suatu metrik Rizza dengan kurvatur negatif jika dan hanya jika dual E^* adalah ample. Dalam makalah ini dibahas bahwa sebagai kasus khusus, dengan menggunakan suatu metrik Rizza yang diturunkan dari suatu metrik Hermitian, kondisi *Griffith- negative* juga mengakibatkan kenegatifan E. Kebalikannya, kenegatifan bundel vektor holomorfik belum menjamin kondisi Griffith-negative untuk E dan ini masih merupakan open problem.

Selanjutnya diperlihatkan bahwa untuk suatu bundel vektor holomorfik negatif, terdapat suatu metrik Rizza F dengan kurvatur negatif, yaitu memenuhi (2).

2. *Rizza-Negativity*

Misalkan V adalah subbundel vertikal dari ruang total T_E yang didefinisikan dengan $V = \ker(\widetilde{d\pi})$ dimana $\widetilde{d\pi} = (\pi, d\pi)$ untuk *derivative* $d\pi\colon T_{(z,\zeta)}E \to T_z M$ di $v = (z,\zeta) \in E$. Selanjutnya kita peroleh barisan eksak bundle vector holomorfik atas E:

$$\mathbb{O} \longrightarrow V \xrightarrow{i} T_E \xrightarrow{\widetilde{d\pi}} \widetilde{T_M} \longrightarrow \mathbb{O}, \tag{3}$$

dimana $\widetilde{T_M} = \pi^* T_M$. Fiber $V_{(z,\zeta)}$ dari V atas $(z,\zeta) \in E$ merupakan ruang singgung $T_\zeta E_z$ di $\zeta \in E_z \coloneqq \pi^{-1}(z)$.

Diberikan suatu metrik Finsler kompleks F. Untuk setiap $z \in M$, didefinisikan $F_z\colon E_z \to \mathbb{R}$ oleh $F_z(\zeta) = F(z,\zeta)$ dan

$$g_{i\bar{j}}(z,\zeta) = \frac{\partial^2 F_z}{\partial \zeta^i \partial \bar{\zeta}^j}. \tag{4}$$

sehingga g mendefinisikan suatu metrik Hermitian pada V dengan

$$g\left(\frac{\partial}{\partial \zeta^i}, \frac{\partial}{\partial \zeta^j}\right) = g_{i\bar{j}}(z,\zeta) \tag{5}$$

Suatu subbundel horizontal H disebut suatu koneksi non-linier kompleks apabila : (i), H invariant terhadap aksi natural μ dari $\mathbb{C}^*$ pada E; (ii). H *smooth* pada E^0 dan kontinu pada E. Apabila suatu koneksi non-linier kompleks H diberikan pada E, maka kita dapat mendefinisikan suatu koneksi parsial $D\colon A(V) \to A(H^* \otimes V)$ dari tipe (1,0) pada V. Proyeksi $P\colon T_E \to V$ dengan $\ker(P) = H$, dinyatakan oleh $P = \sum \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \otimes \left(d\zeta^i + \sum N_\alpha^l dz^\alpha\right)$ sehingga suatu koneksi parsial D didefinsikan oleh

$$D_{X^H} Z = P(\mathcal{L}_{X^H} Z)$$

(6) dimana $\mathcal{L}_{X^H}$ menyatakan *Lie derivative* oleh X^H dengan X^H adalah *horizontal lift* berkaitan dengan H. Eksistensi dari koneksi nonlinier kompleks, dengan menggunakan koneksi parsial ini sebagai alat fundamental, dinyatakan dalam proposisi berikut:

Proposisi 2.1. [5] *Jika F adalah metrik Rizza pada suatu bundle vector holomorfik E, maka terdapat suatu koneksi nonlinier kompleks H pada E sedemikian sehingga koneksi parsial D berasosiasi dengan E memenuhi* $D_{X^H} g = 0$ untuk semua $X \in A(T_M)$.

Karena koneksi parsial D *compatible* dengan g dalam arah horizontal H, maka D didefinisikan oleh $D_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^i} = \sum \Gamma^l_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta^i}$, $\Gamma^l_{i\alpha} = \sum g^{l\bar{m}} X_\alpha(g_{i\bar{m}})$. Bentuk kurvatur Ω^i_j dari D didefinisikan oleh $D^2 \frac{\partial}{\partial \zeta^j} = \sum \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \otimes \Omega^i_j$, dan tensor kurvatur $K^i_{j\alpha\bar{\beta}}$ didefinisikan oleh $\Omega^i_j = \sum K^i_{j\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$. Hal ini berakibat $K_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} \coloneqq \sum g_{l\bar{j}} K^l_{i\alpha\bar{\beta}} = -X_{\bar{\beta}} X_\alpha g_{i\bar{j}} + \sum g_{k\bar{l}} \Gamma^k_{i\alpha} \overline{\Gamma^l_{j\beta}}$.

Formula kurvatur dalam proposisi berikut digunakan dalam membuktikan kenegatifan dari E.

Proposisi 2.2 Jika suatu bundel vektor holomorfik E memiliki suatu metrik Rizza F, maka kurvatur $\bar{\partial}\partial \log F$ dari metric Hermitian pada $\mathbb{L}(E)$ diberikan oleh

$$\bar{\partial}\partial \log F = \frac{1}{F} \sum \Psi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta - \sum \frac{\partial^2 (\log F)}{\partial \zeta^i \partial \bar{\zeta}^j} P^i \wedge \overline{P^j},$$

dengan $\Psi_{\alpha\bar{\beta}} := \sum K_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}(z) \zeta^i \overline{\zeta^j}$ dan $P^i \coloneqq d\zeta^i + \sum N^i_\alpha dz^\alpha$.

Haripamyu dan Aikou [3] memperkenalkan definisi tentang *Rizza-negative* untuk suatu bundel vektor holomorfik E dan membuktikan bahwa *Rizza -negativity* dari bundel vektor holomorfik berimplikasi kenegatifan dari E.

Definisi 2.2 Suatu bundel vektor holomorfik E dikatakan *Rizza-negative* apabila E memiliki suatu metrik Rizza F dengan kurvatur negative, yaitu untuk setiap $(z, \zeta) \in E^0$,

$$K(Z \otimes X^H) = \sum K_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} Z^i X^\alpha \overline{Z^j X^\beta} < 0$$

untuk setiap vektor tak nol $Z \in V_{(z,\zeta)}$ dan $X^H \in H_{(z,\zeta)}$.

Teorema 2.3. Jika E *Rizza-negative*, maka E negatif.

3. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini diperlihatkan suatu syarat cukup untuk kenegatifan dari suatu bundel vektor holomorfik E atas suatu manifold kompleks kompak M. Anggap bahwa E mempunyai suatu metrik Hermitian $h = \sum h_{i\bar{j}} e^i \otimes \overline{e^j}$ untuk komponen-komponen $h_{i\bar{j}}$ dari h. Untuk semua $u \in E_z$ dan $\in T_z M$, didefinsikan

$$R(u \otimes X) = \sum R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}(z)\, u^i \overline{u^j} X^\alpha \overline{X^\beta} \tag{7}$$

untuk tensor kurvatur $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$ dari bundle Hermitian (E, h) dimana $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = \sum h_{il} R^l_{i\alpha\bar{\beta}}$.

Definisi 3.1. Suatu bundle vektor holomorfik E dikatakan *Griffiths-negative* jika E memiliki suatu metrik Hermitian h dengan kurvatur negatif, yaitu $R(u \otimes X) < 0$ di setiap $z \in M$, untuk semua vektor tak nol $u \in E_z$ dan vektor tak nol $X \in T_z M$.

Dengan memperhatikan suatu kasus dimana metrik Rizza F diturunkan dari suatu metrik Hermitian h, diperlihatkan suatu syarat cukup untuk kenegatifan dari bundel Hermitian.

Teorema 3.2. Jika E *Griffiths-negative*, maka E negatif.

Bukti: Misalkan h suatu metrik Hermitian pada E dengan kurvatur negative. Didefinisikan suatu fungsi $F = F_h(z,\zeta) = \sum h_{i\bar{j}}(z)\zeta^i\overline{\zeta^j}$, maka $\Psi_{\alpha\bar{\beta}}$ diberikan oleh $\Psi_{\alpha\bar{\beta}} = \sum R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}(z)\zeta^i\overline{\zeta^j}$ untuk tensor kurvatur $R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$ dari bundle Hermitian (E,h). Berdasarkan hipotesa, yaitu E *Griffiths-negative*, maka $\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\partial \log F < 0$.

Selanjutnya dikonstruksi suatu metrik Rizza F pada suatu bundel vektor negative E atas manifold kompleks kompak M yang memenuhi (2). Dari Definisi 1.1, *line bundle* $\mathbb{L}(E)$ negatif, sehingga $\mathbb{L}(E)^*$ *ample*. Jadi terdapat suatu bilangan bulat m yang cukup besar sedemikian sehingga $L = \mathbb{L}(E)^{*\otimes m}$ *very ample*. Berdasarkan Teorema Kodaira *embedding*, dapat diambil sebuah basis $\{\tau_0, \cdots, \tau_N\}$ dari $H^0(\mathbb{P}(E), L)$ sedemikian sehingga pemetaan $\psi_f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^N$ yang didefinisikan oleh $\psi_f([v]) = (\tau_0([v]) : \cdots : \tau_N([v]))$ adalah suatu *embedding* holomorfik. *Line bundle* L isomorfik ke bundel $\psi_f^*\mathbb{H}$ dengan $\mathbb{H}$ merupakan bundel *hyperplane* atas $\mathbb{P}^N$.

Bentuk Chern pertama dari $\mathbb{H}$ diberikan oleh $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log\left(\frac{\sum_{r=0}^{N}|\eta^t|^2}{|\eta^s|^2}\right)^{-1}$ pada $V_s = \{[\eta^1 : \cdots : \eta^N] \in \mathbb{P}^N \mid \eta^s \neq 0\}$. Didefinisikan $\tau_t := \{\tau_{j,t}\}$, $(r = 0, \cdots, N)$, dimana $\tau_{j,t}$ merupakan fungsi-fungsi holomorfik pada $U_j := p^{-1}(U) \cap \{\zeta^j \neq 0\} \subset \mathbb{P}(E)$. Untuk setiap $[v] \in \psi_f^{-1}(V_s) \cap U_j$,didefinisikan suatu metrik Hermitian dari $\psi_f^*\mathbb{H}$, yaitu

$$h_{\psi_f^*\mathbb{H},s}([v]) = \left(\frac{\sum_{r=0}^{N}|\tau_{j,t}([v])|^2}{|\tau_{j,s}([v])|^2}\right)^{-1}.$$

Dengan menggunakan sifat *ample* dari $\mathbb{H}$ dan *embedding* holomorfik dari ψ_f, kita peroleh

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h_{\psi_f^*\mathbb{H},s}([v]) > 0 \tag{8}$$

Akibatnya untuk setiap $[v] \in U_j$, metrik Hermitian pada L diberikan oleh fungsi

$$h_{L,j}([v]) = \left(\sum_{r=0}^{N}|\tau_{j,t}([v])|^2\right)^{-1}.$$

Karena $L = \mathbb{L}(E)^{*\otimes m}$, maka metrik Hermitian pada $\mathbb{L}(E)$ diberikan oleh

$$h_{\mathbb{L}(E),j}([v]) = \sqrt[m]{\sum_{r=0}^{N} \left|\tau_{j,t}([v])\right|^2}$$

pada U_j.

Apabila didefinisikan $t_j: U_j \to U_j \times \mathbb{C}^r$ dengan $t_j([v]) = \left([v], \left(\frac{\zeta^1}{\zeta^j}, \cdots, \frac{\zeta^r}{\zeta^j}\right)\right)$, maka $\{U_j, t_j\}$ mendefinisikan suatu trivialisasi lokal $\varphi_j: U_j \times \mathbb{C} \to \mathbb{L}(E)_{|U_j}$ dari $\mathbb{L}(E)$ yang didefinisikan oleh $\varphi_j([v], \lambda) = \lambda t_j([v])$. Dengan menggunakan trivialisasi lokal ini didefinisikan suatu pemetaan $\sigma: E^0 \to \mathbb{P}(E) \times E$ dengan $\sigma(v) \coloneqq ([v], v) = \zeta^j t_j([v])$.

Karena $\sigma(v) = \zeta^j t_j([v]) \cong \left([v], \zeta^j\right)$ pada U_j, maka dapat didefinisikan suatu metrik Finsler kompleks F pada E dengan

$$F(v) \coloneqq \left|\zeta^j\right|^2 h_{\mathbb{L}(E),j}([v]) = \sqrt[m]{\sum_{r=0}^{N} \left|\tau_{j,t}([v]) |\zeta^j|^m\right|^2}.$$

Selanjutnya dari (8), fungsi F yang didefinisikan oleh

$$F(v) = [\textstyle\sum_{r=0}^{N} \tau_t([v]) \otimes \bar{\tau}_t([v])]^{1/2m} = \sqrt[m]{\textstyle\sum_{r=0}^{N} |\tau_t([v])|^2} \qquad (9)$$

merupakan suatu metrik Rizza yang memenuhi (2) dan teorema berikut terbukti.

Teorema 3.3. Jika E adalah bundel vektor negatif dan $\psi_f: \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}^N$ adalah pemetaan embedding holomorfik, maka terdapat suatu metrik Finsler pseudo-konveks kuat F yang memenuhi $\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\partial \log F < 0$.

4. Simpulan dan Saran

Misalkan E suatu bundel vektor holomorfik atas manifold kompleks kompak M dengan rank $(E) \geq 2$. Jika E memiliki suatu metrik Hermitian h dengan kurvatur negatif, yaitu $R(u \otimes X) < 0$ di setiap $z \in M$, untuk semua vektor tak nol $u \in E_z$ dan vektor tak nol $X \in T_z M$ maka E negatif. Jika diberikan suatu bundel vektor negatif E, maka kita dapat mengkonstruksi suatu metrik Finsler pseudo-konveks kuat F (metrik Rizza F) dengan kurvatur negatif.

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah menentukan syarat cukup yang menjamin kondisi Griffith-negative untuk bundel vector holomorfik E.

Daftar Pustaka

[1] R. Hartshorne, Ample Vector Bundles, *Publ. Math*. I. H. E. S, vol. 29, pp. 63-94, 1966.

[2] S. Kobayashi, Negative Vector Bundles and Complex Finsler Structures, *Nagoya Math*. J, vol. 57, pp. 153-166, 1975.

[3] Haripamyu and T. Aikou, Rizza-negativity of Holomorphic Vector Bundles, *Publ. Math*. Debrecen, 87/3-4, pp. 449-462, 2015.

[4] J. G. Cao and P. M. Wong, Finsler Geometry of Projectivized Vector Bundles, *J. Math Kyoto*. Univ., 43, pp. 369-410, 2003.

[5] T. Aikou, On Compleks Finsler Manifolds, *Rep. Fac*. Sci. Kagoshima Univ. 24, pp. 9-25, 1991.

[6] T. Aikou, A Partial Connection on Complex Finsler Bundles and Its Applications, *Illinois J. Math*. 42, pp. 481-492, 1998.