Jurnal Matematika Vol. 11, No.2, Desember 2021, pp. 119-124 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2021.v11.i02.p141

β-Dual Dari Ruang Barisan $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ Dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$

Salwa
Universitas Mataram
e-mail: salwa@unram.ac.id

Qurratul Aini
Universitas Mataram
e-mail: qurratulaini.aini@unram.ac.id

Ni Wayan Switrayni
Universitas Mataram
e-mail: niwayan.switrayni@unram.ac.id

***Abstract*:** *Sequence spaces is one of interesting topic of analysis research. Some of that are convergent and bounded sequence. In this paper we define some releated BK spaces of* $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ *and some characteristics releated to them. Moreover we determine their β-dual.*

Keywords: *Sequence spaces, BK spaces, β-dual*

***Abstrak*:** *Ruang barisan merupakan salah satu topik dalam penelitian analisis.Diantaranya adalah barisan convergen dan barisan terbatas. Pada paper ini dibahas tentang ruang BK* $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ serta *beberapa sifat yang berhubungan dengannya. Selanjutnya ditentukan β-dual dari ruang barisan tersebut.*

Kata Kunci: *Ruang barisan, Ruang BK, β-dual.*

1. Pendahuluan

Ruang barisan merupakan salah satu topik kajian dalam bidang analisis yang membahas tentang barisan. Barisan merupakan fungsi pada bilangan asli. Jika range dari barisan tersebut merupakan himpunan semua bilangan real maka disebut barisan bilangan real, Beberapa ruang barisan lain yang telah ditemukan oleh matematikawan bidang minat analisis diantaranya adalah ruang barisan terbatas, ruang barisan konvergen, ruang BK dan lain-lain.

Selanjutnya para matematikawan seperti M. Mursaleen dan A.K. Noman (2010) melakukan penelitian lebih lanjut mengenai ruang barisan λ –konvergen dan terbatas, sedangkan E. Malkowsky and V. Rakocevic (2007) melakukan penelitian mengenai ruang barisan yang terboboti. Oleh karena itu penulis ingin melakukan penelitian tentang β-dual dari ruang barisan $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ dan beberapa sifat yang terkait dengan ruang barisan tersebut jika dilihat dari ruang multiplier, serta menyajikannya dalam tulisan ini.

Berdasarkan latar belakang tersebut di atas, adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana sifat-sifat ruang barisan $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$, dan bagaimana β-dual dari ruang barisan tersebut jika dilihat dari ruang multiplier.

2. Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkuan dan mempelajari matri-materi yang diambil dari buku-buku dan jurnal-jurnal analisis yang memuat tentang ruang barisan λ-konvergen dan terbatas serta yang memuat tentang ruang dual. Selanjutnya berdasarkan definisi, teorema serta lema yang ada pada jurnal-jurnal tersebut akan dikonstruksi teorema dan sifat-sifat yang berkaitan dengan ruang barisan $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ serta β-dual nya.

Setelah teorema dan sifat-sifat dari ruang barisan $(\bar{N},\Delta\,\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ serta β-dual nya dibuktikan, selanjutnya akan diambil kesimpulan dari hasil penelitian tersebut.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Ruang Barisan $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$

Diketahui barisan bilangan real positif $\lambda = (\lambda_k)_{k\geq 1}$ yaitu barisan yang setiap sukunya bernilai positif. Selanjutnya diberikan

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k . \qquad (n \in N) \tag{1}$$

untuk $\lambda_0 = 0$ dan $x_0 = 0$ serta barisan $\Lambda(x) = \left(\Lambda_n(x)\right)_{n\geq 1}$
didefinisikan matriks takhingga $\Lambda = (\lambda_{nk})_{n,k\geq 1}$dengan

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} & ; (0 \leq k \leq n) \\ 0 ; & (k > n) \end{cases}$$

untuk setiap $n, k \in N$. Dapat diketahui bahwa matriks takhingga Λ adalah matriks segitiga. (M. Mursaleen dan A.K. Noman :2010)

Definisi 3.1. Diberikan matriks $\Lambda = (\lambda_{nk})_{n,k\geq 1}$ yang selanjutnya didefinisikan ruang barisan sebagai berikut
$(\overline{N}, \Delta\lambda)_0 = (c_0)_\Lambda = \{x \in \omega : \Lambda(x) \in c_0\}$
$(\overline{N}, \Delta\lambda) = (c)_\Lambda = \{x \in \omega : \Lambda(x) \in c\}$ dan
$(\overline{N}, \Delta\lambda)_\infty = (l_\infty)_\Lambda = \{x \in \omega : \Lambda(x) \in l_\infty\}$
dimana c_0, c dan l_∞ berturut-turut adalah ruang barisan yang konvergen ke nol, ruang barisan konvergen dan ruang barisan terbatas.

Selanjutnya diberikan beberapa teorema yang berkaitan dengan ruang barisan $(\overline{N}, \Delta\lambda)_\infty$, $(\overline{N}, \Delta\lambda)$ dan $(\overline{N}, \Delta\lambda)_0$

Teorema 3.2. $(\overline{N}, \Delta\lambda)_0 \subseteq (\overline{N}, \Delta\lambda) \subseteq (\overline{N}, \Delta\lambda)_\infty$.

Bukti: Diambil sebarang $x \in (\overline{N}, \Delta\lambda)_0$ diperoleh $\left(\Lambda_n(x)\right)_{n\geq 1} \in c_0$. Akibatnya $x \in (\overline{N}, \Delta\lambda)$ jadi $(\overline{N}, \Delta\lambda)_0 \subseteq (\overline{N}, \Delta\lambda)$. Selanjutnya diambil sebarang $x \in (\overline{N}, \Delta\lambda)$ diperoleh $\left(\Lambda_n(x)\right)_{n\geq 1} \in c$. Akibatnya $\Lambda_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k$ konvergen, katakan konvergen ke u. Sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k = u$. Dipilih $\varepsilon = 1$ akibatnya $\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k - u\right| \leq 1$, sedangkan $\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k - u\right| \leq 1 + |u|$. untuk setiap $n \geq n_0$. Akibatnya $x \in (\overline{N}, \Delta\lambda)_\infty$. ■

Definisi 3.3. Ruang Banach $X \subset \omega$ disebut ruang BK jika untuk setiap $n \in N$, pemetaan koordinat $P_n : X \to R$ dengan $P_n(x) = x_n$ kontinu. (E. Malkowsky and E. Savas :2004)

Teorema 3.4. Diberikan X ruang linear, Y ruang Banach dan $T: X \to Y$ operator linear yang surjektf maka X merupakan ruang Banach terhadap $\|u\|_X = \|T(u)\|_Y$, untuk setiap $u \in X$. (E. Malkowsky and E. Savas :2004)

Teorema 3.5. Diberikan B matriks segitiga dan X ruang BK maka X_B merupakan ruang BK terhadap $\|u\|_{X_B} = \|B(u)\|$. (E. Malkowsky and E. Savas :2004)

Teorema 3.6. Ruang barisan $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\bar{N},\Delta\lambda)$ dan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ merupakan ruang BK terhadap norma

$$\|x\|_{(l_\infty)_\Lambda} = sup_n|\Lambda_n(x)| = sup_n\left\{\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k\right| : n \in N\right\}.$$

Bukti:

a. Karena l_∞ ruang BK dan menurut Teorema 3.5 diperoleh $(\bar{N},\Delta\lambda)_\infty = (l_\infty)_\Lambda$ merupakan ruang BK.

b. Untuk menunjukkan $(\bar{N},\Delta\lambda)$ ruang Banach maka diambil sebarang $x \in \overline{(\bar{N},\Delta\lambda)}$ dengan $x = (x_k)$ maka terdapat $\left(x^{(m)}\right) \in (\bar{N},\Delta\lambda)$ akibatnya berlaku

$$sup\left\{\left|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k^{(m)} - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k\right| : n \in N\right\}$$
$$= sup\left\{\left|\Lambda_n\left(x^{(m)}\right) - \Lambda_n(x)\right| : n \in N\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Karena $\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k^{(m)}\right)$ konvergen, akibatnya $\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_k^{(m)}\right)$ merupakan barisan Cauchy. Oleh karena itu berlaku

$$|\Lambda_n(x) - \Lambda_l(x)| \leq \varepsilon$$

Jadi $\left(\Lambda_n(x)\right)$ merupakan barisan Cauchy di R. Akibatnya $\left(\Lambda_n(x)\right) \in c$ atau

Selanjutnya diambil sebarang $\left(x^{(m)}\right) \in (\bar{N},\Delta\lambda)$ konvergen ke x atau $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$. Oleh karena itu

$$\lim_{n\to\infty} P_k\left(x^{(n)}\right) = x_k = P_k(x)$$

Jadi pemetaan koordinatnya kontinu.

c. Bukti yang serupa untuk menunjukkan $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ merupakan ruang BK. ■

Definisi 3.7. Ruang BK X dikatakan mempunyai sifat AK, jika $\varphi \subset X$ dan setiap barisan $x = (x_k) \in X$ dapat dinyatakan secara tunggal dengan $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)}$. (E. Malkowsky and E. Savas :2004)

Teorema 3.8. jika $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, maka $(\bar{N},\Delta\lambda)_0$ mempunyai sifat AK.

Jurnal Matematika Vol. 11, No.2, Desember 2021, pp. 119-124 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2021.v11.i02.p141

3.2 $\boldsymbol{\beta}$-Dual Dari Ruang Barisan $(\overline{\boldsymbol{N}},\Delta\boldsymbol{\lambda})_\infty$, $(\overline{\boldsymbol{N}},\Delta\boldsymbol{\lambda})$ Dan $(\overline{\boldsymbol{N}},\Delta\boldsymbol{\lambda})_{\boldsymbol{0}}$

Definisi 3.8. Diketahui Z sebarang barisan, $\beta -$ dual dari ruang barisan Z ditulis Z^β didefinisikan sebagai $Z^\beta = \{x \in \omega : |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| < \infty, y_k \in Z\}$. (E. Malkowsky and V. Rakocevic : 2007)

Definisi 3.9. Jika X dan Y sebarang himpunan bagian ω dan $x = (z_k)$ sebarng barisan di ω , maka didefinisikan $z * X = \{x \in \omega : xz \in X\}$, selanjutnya didefinisikan $M(X,Y) = \cap_{x \in X}\, x * Y = \{x \in \omega : yx \in Y, untuk\ setiap\ x \in X\}$
Disebut ruang multiplier dari X dan Y. (E. Malkowsky and V. Rakocevic : 2007)

Teorema 3.10. Jika X ruang barisan maka $M(X,cs) = X^\beta$. (E. Malkowsky and V. Rakocevic : 2007)
Bukti: diambil sebarang $y \in M(X,cs)$ diperoleh $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen untuk setiap $x \in X$. Akibatnya $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ konvergen. Oleh karena itu (s_n) terbatas, jadi terdapat $M > 0$ sehingga $|s_n| \le M$ untuk setiap $n \in N$ diperoleh $y \in X^\beta$. Jadi $M(X,cs) \subseteq X^\beta$.
Diambil sebarang $y \in X^\beta$ diperoleh $|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| < \infty$ untuk setiap $x \in X$. Andaikan $y \notin M(X,cs)$ maka terdapat $x \in X$ sehingga $(x_k y_k) \notin cs$. hal ini kontradiksi dengan $|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| < \infty$. Jadi $y \in M(X,cs)$. ■

Teorema 3.11. $M(c_0,c) = l_\infty$, $M(c,c) = c$ dan $M(l_\infty,c) = c_0$. (E. Malkowsky and V. Rakocevic : 2007)
Selanjutnya didefinisikan

$$\mathcal{M}_0 = \left\{(\overline{\triangle}\,\lambda * l_1) \cap \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} * l_\infty\right)\right\}$$

$$= \left\{x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\overline{\triangle}\left(\frac{x_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)\lambda_k\right| < \infty,\ \ sup\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} x_k\right| < \infty\right\}$$

$$\mathcal{M} = \left\{(\overline{\triangle}\,\lambda * l_1) \cap \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} * c\right)\right\}$$

$$= \left\{x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\overline{\triangle}\left(\frac{x_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)\lambda_k\right| < \infty,\ \ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} x_k\right)\ ada\right\}$$

$$\mathcal{M}_\infty = \left\{(\overline{\triangle}\,\lambda * l_1) \cap \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} * c_0\right)\right\}$$

$$= \left\{x \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\overline{\triangle}\left(\frac{x_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}\right)\lambda_k\right| < \infty,\ \ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} x_k\right) = 0\right\}$$

diamana

$$\overline{\triangle}\left(\frac{x_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right)=\frac{x_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}-\frac{x_{k+1}}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}.$$

Selanjutnya $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\triangle}\left(\frac{x_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right)\lambda_k a_k+\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}x_k a_k$ (2)

Teorema 3.12. ${(\overline{N},\Delta\lambda)_0}^{\beta}=\mathcal{M}_0$, $(\overline{N},\Delta\lambda)^{\beta}=\mathcal{M}\ dan\ {(\overline{N},\Delta\lambda)_\infty}^{\beta}=\mathcal{M}_\infty$

Bukti: Diambil sebarang $x\in{(\overline{N},\Delta\lambda)_0}^{\beta}$ maka $(x_k y_k)\in cs$ akibatnya $\lim_{k\to\infty} x_k y_k=0$ untuk setiap $x\in(\overline{N},\Delta\lambda)_0$ sehingga berdasarkan (2) dan teorema 3.11 diperoleh $x\in\bar{\Delta}\lambda * l_1$ dan $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}x_k a_k\right)\in l_\infty$. Oleh karena itu $x\in\mathcal{M}_0$.

Selanjutnya diambil sebarang $x\in\mathcal{M}_0$ akibatnya $x\in\bar{\Delta}\lambda * l_1$ dan $x\in\frac{\lambda}{\Delta\lambda} * l_\infty$. Oleh karena itu berdasarkan (2) diperoleh $|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k|<\infty$ atau $(x_k y_k)\in cs$ atau $\lim_{k\to\infty} x_k y_k=0$. Jadi $x\in{(\overline{N},\Delta\lambda)_0}^{\beta}$.

Diambil sebarang $x\in(\overline{N},\Delta\lambda)^{\beta}$ maka $(x_k y_k)\in cs$. Andaikan $x\notin\bar{\Delta}\lambda * l_1$ dan $x\notin\frac{\lambda}{\Delta\lambda} * c$ akibatnya $\left|\overline{\triangle}\left(\frac{x_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}\right)\lambda_k\right|>\infty$ dan $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}x_k\right)$ tidak ada. Hal ini kontradiksi dengan $(x_k y_k)\in cs$.

4. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan: Ruang barisan $(\overline{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\overline{N},\Delta\lambda)$ dan $(\overline{N},\Delta\lambda)_0$ merupakan ruang BK selaanjutnya ruang barisan $(\overline{N},\Delta\lambda)_0$ memunyai sifat AK, dengan melihat dari ruang multiplier dapat ditentukan ruang $\beta-dual$ dari masing-masing ruang barisan $(\overline{N},\Delta\lambda)_\infty$, $(\overline{N},\Delta\lambda)$ dan $(\overline{N},\Delta\lambda)_0$.

Saran: pada penelitian ini masih belum ditentukan hubungan masing-masing ruang jika ditinjau dari definisi ruang $\beta-dual$nya.

Daftar Pustaka

Mursaleen, M dan Noman A.K, on the Spaces of λ –Convergent and Bounded Sequences, Thai Journal of Mathematics., 8 (2) (2010) 311-329

E. Malkowsky and V. Rakocevic, Measure of noncompacness of linear operator between spaces of sequences that are $(\overline{N},q)$ seummabel or bounded, Czechoslovac Math. J., 51 (3) (2007) 1146-1163

E. Malkowsky and E. Savas, Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means, Apl. Math. Comput, 147 (2) (2004) 333-345.