

# Kajian Morfisme Untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word* dengan *L-Systems*

**Anggi Enggar Sari**

Jl. Kalimantan 37 Jember 68121  
e-mail: anggienggar1@gmail.com

**Kosala Dwidja Purnomo**

Jl. Kalimantan 37 Jember 68121  
e-mail: kosala.fmipa@unej.ac.id

**Firdaus Ubaidillah**

Jl. Kalimantan 37 Jember 68121

**Abstract:** *The Fibonacci word is one example of a fractal object. The fractal Fibonacci word has similar property of  $\mathcal{F}_n$  curve with  $\mathcal{F}_{n-3}$  curve. The Fibonacci word curve is generated based on the Fibonacci word sequence. The number pair of the Fibonacci word sequences can be defined by morphism  $\eta$  into a new sequence with the three-digit rule  $\{0,1,2\}$  called Dense Fibonacci Word. In this article, the variations of the Dense Fibonacci Word curve are generated by the L-Systems method which applies several morphisms. The research method is divided into five stages, the first is the interpretation of the Dense Fibonacci Word and variations of morphism based on the Fibonacci word sequence. Second, the interpretation of Dense Fibonacci Word fractals using the L-Systems method mathematically. Third, the interpretation of Dense Fibonacci Word fractals using the L-Systems method graphically. Fourth, making the Dense Fibonacci Word fractal program and fifth, analyzing the results. The results obtained in this article are the visualization of the Dense Fibonacci Word curve with the L-Systems method, the shape of the Dense Fibonacci Word curve varies by applying several morphisms. The comparison of the variations of the Dense Fibonacci Word curve in each morphism is resulting different shape of the Dense Fibonacci Word curve in the small generation, but in the large generation the fractal pattern is the same.*

**Keywords:** *Dense Fibonacci Word, Morphism, L-Systems*

## 1. Pendahuluan

Fraktal berasal dari kata *fractus* artinya pecah (Mandelbrot, 1983). Secara umum, fraktal didefinisikan sebagai perulangan berbentuk geometri yang dipecah ke dalam bentuk yang lebih sederhana dengan skala dan proporsi tertentu. Fraktal memiliki sifat *self-similarity* atau dapat dikatakan kemiripan. Beberapa objek dalam fraktal adalah segitiga *Sierpinski*, *Koch Snowflake*, kurva Hilbert, kurva Naga, *Fibonacci word* dan himpunan Mendelbrot (Romadiastri, 2013). Objek-objek tersebut dapat dikonstruksikan dengan beberapa cara, salah satunya yaitu

metode *L-Systems*. *L-Systems* menjadi salah satu metode untuk menghasilkan fraktal (Prusinkiewicz dan Lindenmayer, 1990). *L-Systems* atau *Lindenmayer Systems* adalah membangun objek yang kompleks dari pengulangan bagian objek yang sederhana menggunakan aturan penulisan kembali (produksi) yang bersifat rekursif (Ochoa, 1998). *L-Systems* memiliki tiga komponen yaitu huruf ( $v$ ), aksioma ( $\omega$ ), dan aturan produksi ( $\rho$ ) (Saefurrohman dan Handayani, 2016). Telah banyak artikel yang membahas mengenai *L-Systems* seperti Purnomo dkk. (2015) menerapkan *L-Systems* untuk membangkitkan fraktal *Fibonacci word*, dan Umami dkk. (2019) menggunakan metode *L-Systems* untuk mengkaji fraktal *i-Fibonacci word* dengan generalisasi ganjil.

Objek-objek yang dibangun menggunakan *L-Systems* memiliki dua ciri utama yaitu objek tersebut dapat diiterasikan sehingga membentuk beberapa generasi dan setiap bagian generasi yang terbentuk memiliki kemiripan dengan generasi sebelumnya (*self-similarity*) (Purnomo dkk., 2015). Salah satu objek fraktal yang memiliki kedua sifat tersebut adalah *Fibonacci word*. Fraktal *Fibonacci word* memiliki sifat *self-similarity* yang ditunjukkan pada kurva  $\mathcal{F}_{14}$  dan  $\mathcal{F}_{11}$  atau dapat ditulis  $\mathcal{F}_n$  memiliki kemiripan dengan  $\mathcal{F}_{n-3}$  (Dumaine, 2009).

Berdasarkan barisan *Fibonacci word*, Jean-Paull Allouche mengemukakan barisan baru yang disebut barisan *Dense Fibonacci Word* dengan menggunakan aturan tiga digit  $\{0,1,2\}$ . Barisan *Dense Fibonacci Word* dapat didefinisikan dengan morfisme sebagai berikut:

$$\eta(00) = 0, \eta(01) = 1, \eta(10) = 2 \quad (1)$$

jika terdapat  $\eta(0)$  atau  $\eta(1)$  maka didefinisikan sebagai  $\varepsilon$ . Notasi  $\varepsilon$  diartikan string kosong (Ramirez dan Rubiano, 2014).

Berdasarkan definisi morfisme  $\eta$ , maka barisan *Dense Fibonacci Word* berturut-turut sebagai berikut:

102210221102110211022102211021102110221022102211021...

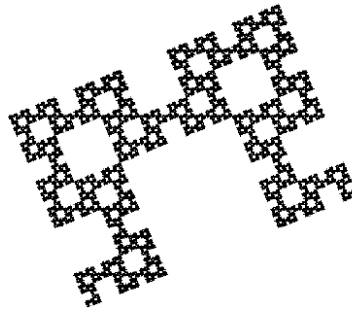
Dumaine (2009) membangkitkan kurva *Dense Fibonacci Word* menggunakan metode *natural drawing rule* yang didefinisikan sebagai aturan menggambar yang lebih sederhana dengan angka tiga digit  $\{0,1,2\}$ . Aturan konstruksi pada metode *natural drawing rule* yaitu

“0” yaitu menggambar segmen garis,

“1” yaitu menggambar segmen garis dan berbelok ke kanan,

“2” yaitu menggambar segmen garis dan berbelok ke kiri.

Kurva *Dense Fibonacci Word* yang terbentuk berdasarkan barisan *Dense Fibonacci Word* yang dihasilkan dari definisi morfisme  $\eta$  dan aturan konstruksi pada metode *natural drawing rule* dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Kurva *Dense Fibonacci Word*  $\mathcal{F}'_{23}$   
(Sumber: Dumaine, 2009)

Berdasarkan uraian di atas, maka artikel ini dikaji pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* dan morfisme yang ditetapkan akan digunakan untuk memperoleh variasi kurva *Dense Fibonacci Word* dengan menggunakan metode *L-Systems*. Selain itu, pada artikel ini juga dikaji perbandingan visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *natural drawing rule* dan *L-Systems* pada setiap morfismenya. Pada penelitian Liyani (2018) membangkitkan kurva *Dense Fibonacci Word* menggunakan *natural drawing rule* dengan menetapkan 5 morfisme yang berbeda untuk mendapatkan variasi kurva, maka pada artikel ini menggunakan morfisme yang berbeda. Morfisme yang digunakan pada artikel ini adalah morfisme  $\mu_1 : 0 \rightarrow 21, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 01$ , dan morfisme  $\mu_2 : 0 \rightarrow 210, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 1$ .

## 2. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

### 2.1 Penafsiran *Dense Fibonacci Word* dan Variasi Morfisme Berdasarkan Barisan *Fibonacci Word*

Langkah yang dilakukan untuk memperoleh barisan *Dense Fibonacci Word* adalah menafsirkan barisan *Fibonacci word* dengan morfisme  $\eta$  pada Persamaan (1) untuk menghasilkan barisan *Dense Fibonacci Word* dengan digit  $\{0,1,2\}$ . Berdasarkan hasil tafsiran yang membentuk barisan *Dense Fibonacci Word*, maka ditetapkan beberapa morfisme untuk menghasilkan variasi kurva *Dense Fibonacci Word*. Kurva *Dense Fibonacci Word* dikonstruksikan dengan metode *natural drawing rule*. Beberapa morfisme yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

1. Morfisme  $\mu_1 : 0 \rightarrow 21, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 01$
2. Morfisme  $\mu_2 : 0 \rightarrow 210, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 1$

## 2.2 Penafsiran Fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara Matematis

Langkah yang dilakukan untuk membangun fraktal *Dense Fibonacci Word* yaitu melakukan penafsiran fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara matematis. Langkah awal yang dilakukan yaitu menentukan komponen-komponen *L-Systems* dari aturan produksi. Aturan produksinya akan dimodifikasi untuk acuan penafsiran grafis kurva *Dense Fibonacci Word* yang akan dibangun. Pada langkah selanjutnya, berdasarkan komponen-komponen *L-Systems* akan diperoleh beberapa generasi *L-Systems* dari fraktal *Dense Fibonacci Word*.

## 2.3 Penafsiran Fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara Grafis

Langkah yang dilakukan pada tahap ini adalah menggambar secara grafis hasil generasi *L-Systems* dari fraktal *Dense Fibonacci Word* sesuai komponen-komponen aturan produksi yang diberikan. Pada langkah ini diartikan sebagai menggambar secara grafis barisan generasi yang dihasilkan dari aksioma dan aturan produksi yang diberikan. Penafsiran grafis fraktal *Dense Fibonacci Word* pada langkah ini akan digambarkan hingga beberapa generasi, guna untuk pembandingan dengan hasil visualisasi pada program.

## 2.4 Pembuatan Program Visualisasi Fraktal *Dense Fibonacci Word*

Pembuatan program visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* menggunakan metode *L-Systems*. Algoritma program penerapan *L-Systems* dalam membangun fraktal *Dense Fibonacci Word* diuraikan sebagai berikut:

- a. Aksioma dan aturan produksi ditentukan;
- b. Nilai generasi fraktal *Dense Fibonacci Word* ditentukan untuk divisualisasikan sebagai input. Nilai generasi dinyatakan dalam bilangan positif dan dimulai dari angka satu;
- c. Panjang segmen, sudut putar, arah dan posisi titik awal ditentukan pada fraktal *Dense Fibonacci Word*, yaitu:
  - 1) panjang segmen garis pada fraktal *Dense Fibonacci Word*:  
untuk  $B(x), C(x), F(x), G(x), J(x), L(x), O(x), P(x), R(x), S(x), T(x), W(x), Y(x)$ , dan  $Z(x)$ , simbol ini memiliki perintah menggambar segmen garis dengan panjang  $x = l$  satuan panjang.  
Sedangkan untuk  $K(x)$  dan  $Q(x)$ , simbol ini memiliki perintah yaitu menggambar segmen garis dengan panjang  $x = \frac{l}{1+\sqrt{2}}$  satuan panjang,

- 2) nilai satu satuan sudut putar ( $\theta$ ) adalah  $\frac{\pi}{2}$  radian;
- 3) perintah belok kanan dan belok kiri menggunakan asumsi empat arah yaitu utara, selatan, timur dan barat;
- 4) posisi titik awal adalah  $(X_0, Y_0) = (0,0)$ , menghadap ke arah timur.
- d. Nilai generasi hingga generasi ke- $n$  diiterasikan berdasarkan aksioma dan aturan produksi yang telah diberikan;
- e. Fraktal *Dense Fibonacci Word* digambar berdasarkan ketentuan pada point c dan generasi yang telah didapatkan pada langkah sebelumnya.

## 2.5 Analisis Hasil

Hasil yang diperoleh dari pembuatan program adalah visualisasi bentuk fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan menggunakan metode *L-Systems*, dan menghasilkan variasi kurva dengan menerapkan beberapa morfisme. Selanjutnya, program yang dibuat digunakan untuk membandingkan visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* yang dibangkitkan dengan metode *L-Systems* pada setiap morfisme.

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1 Penafsiran *Dense Fibonacci Word* dan Variasi Morfisme Berdasarkan Barisan *Fibonacci Word*

Berdasarkan morfisme  $\eta$ , maka barisan *Fibonacci word* dan barisan *Dense Fibonacci Word* berturut-turut dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Penafsiran Barisan *Dense Fibonacci Word*

<i>Fibonacci Word</i>	<i>Dense Fibonacci Word</i>
$f_1 = 1$	$f'_1 = \varepsilon$
$f_2 = 0$	$f'_2 = \varepsilon$
$f_3 = 01$	$f'_3 = 1$
$f_4 = 010$	$f'_4 = 1$
$f_5 = 01001$	$f'_5 = 10$
$f_6 = 01001010$	$f'_6 = 1022$
$f_7 = 0100101001001$	$f'_7 = 102210$
$f_8 = 010010100100101001010$	$f'_8 = 1022102211$
$f_n = 0100101001001010010100100101001001...$	$f'_n = 10221022110211021...$

Berdasarkan hasil tafsiran yang membentuk barisan *Dense Fibonacci Word*, maka ditetapkan beberapa morfisme untuk menghasilkan variasi barisan yang dibangkitkan, sehingga diperoleh variasi kurva *Dense Fibonacci Word*. Morfisme

ini merupakan aturan untuk mendefinisikan barisan *Dense Fibonacci Word* yang dinotasikan dengan morfisme  $\mu$ . Beberapa morfisme yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Morfisme  $\mu_1 : 0 \rightarrow 21, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 01$

Hasil penafsiran barisan *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_1$  dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Penafsiran morfisme  $\mu_1$

<i>Dense Fibonacci Word</i>	$\mu_1: 0 \rightarrow 21, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 01$
$f'_5 = 10$	$f'_5 = 2021$
$f'_6 = 1022$	$f'_6 = 20210101$
$f'_7 = 102210$	$f'_7 = 202101012021$
$f'_8 = 1022102211$	$f'_8 = 20210101202101012020$
$f'_9 = 10221022110211021$	$f'_9 = 2021010120210101202021012020210120$
$f'_n = 102210221102110211022102211\dots$	$f'_n = 202101012021010120202101202021012020210101202101012020\dots$

2. Morfisme  $\mu_2 : 0 \rightarrow 210, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 1$

Hasil penafsiran barisan *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_2$  dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Penafsiran morfisme  $\mu_2$

<i>Dense Fibonacci Word</i>	$\mu_2: 0 \rightarrow 210, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 1$
$f'_5 = 10$	$f'_5 = 20210$
$f'_6 = 1022$	$f'_6 = 2021011$
$f'_7 = 102210$	$f'_7 = 202101120210$
$f'_8 = 1022102211$	$f'_8 = 202101120210112020$
$f'_9 = 10221022110211021$	$f'_9 = 20210112021011202021012020210120$
$f'_n = 102210221102110211022102211\dots$	$f'_n = 20210112021011202021012020210120202101120210112020\dots$

Penafsiran barisan ini bertujuan untuk mengetahui barisan yang dihasilkan dari penafsiran morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$  yang dijadikan sebagai acuan untuk membentuk kurva *Dense Fibonacci Word* yang dibangkitkan dengan aturan *Natural Drawing Rule*. Selanjutnya, bentuk kurva *Dense Fibonacci Word* digunakan untuk menafsirkan pola fraktal secara matematis.

### 3.2 Penafsiran Fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara Matematis

Penafsiran fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara matematis dibangun dengan menentukan komponen-komponen *L-Systems* dari aturan produksi. Aturan produksi yang digunakan dimodifikasi sebagai acuan untuk penafsiran grafis dari kurva *Dense Fibonacci Word*. Aturan produksi yang dipakai pada kurva *Dense Fibonacci Word* setiap morfisme berbeda, karena hasil kurva yang terbentuk dari penafsiran barisan dengan variasi morfisme menghasilkan barisan yang berbeda. Berdasarkan hal tersebut, maka komponen-komponen *L-Systems* yaitu huruf ( $V$ ), aksioma ( $w$ ), dan aturan produksi ( $p$ ) pada fraktal *Dense Fibonacci Word* adalah sebagai berikut:

1. Komponen *L-Systems* Fraktal *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_1: 0 \rightarrow 21, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 01$  sebagai berikut:

$$V = \{L(x), B(x), C(x), F(x), R(x), S(x), T(x), K(x), Q(x), +, -\},$$

$$w = L(x),$$

$$p_1: L(x) \rightarrow +S(x) - B(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)C(x) - T(x),$$

$$p_2: B(x) \rightarrow +R(x)F(x) - B(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)C(x) - T(x),$$

$$p_3: C(x) \rightarrow +S(x) - B(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)C(x) - R(x)F(x),$$

$$p_4: R(x) \rightarrow -B(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + C(x),$$

$$p_5: S(x) \rightarrow -L(x)F(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + C(x),$$

$$p_6: T(x) \rightarrow -B(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + L(x)F(x),$$

$$p_7: K \rightarrow +L(x)F(x),$$

$$p_8: Q \rightarrow -R(x)F(x),$$

$$p_9: F(x) \rightarrow \emptyset$$

(2)

2. Komponen *L-Systems* Fraktal *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_2: 0 \rightarrow 210, 1 \rightarrow 20, 2 \rightarrow 1$  sebagai berikut:

$$V = \left\{ \begin{array}{l} L(x), B(x), F(x), G(x), C(x), J(x), O(x), P(x), R(x), S(x), \\ W(x), T(x), Y(x), K(x), Q(x), Z(x), +, - \end{array} \right\}$$

$$w = Z(x),$$

$$p_1: L(x) \rightarrow +S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x),$$

$$p_2: B(x) \rightarrow +R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x),$$

$$p_3: G(x) \rightarrow +R(x)F(x) - O(x) - Y(x),$$

$$p_4: C(x) \rightarrow +S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - R(x)F(x),$$

$$p_5: J(x) \rightarrow +W(x) - B(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)C(x) - R(x),$$

$$\begin{aligned}
 p_6: O(x) &\rightarrow +R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x)F(x) + S(x) - \\
 &G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - R(x)F(x), \\
 p_7: P(x) &\rightarrow -L(x)F(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + C(x) - R(x)F(x) - B(x) + \\
 &W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + L(x)F(x), \\
 p_8: R(x) &\rightarrow -G(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x), \\
 p_9: S(x) &\rightarrow -L(x)F(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + C(x), \\
 p_{10}: W(x) &\rightarrow -L(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x), \\
 p_{11}: T(x) &\rightarrow -B(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + L(x)F(x), \\
 p_{12}: Y(x) &\rightarrow -G(x) + P(x) + L(x)F(x), \\
 p_{13}: Z(x) &\rightarrow +S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + F(x), \\
 p_{14}: K(x) &\rightarrow +L(x)F(x), \\
 p_{15}: Q(x) &\rightarrow -R(x)F(x), \\
 p_{16}: F(x) &\rightarrow \emptyset.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Dengan aturan produksi  $F(x) \rightarrow \emptyset$  memiliki arti simbol  $F(x)$  tidak diproduksi menjadi apapun. Simbol " + " adalah perintah belok kiri atau memutar arah garis berlawanan arah jarum jam sebesar  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , sedangkan simbol " - " adalah perintah belok kanan atau memutar arah garis searah jarum jam sebesar  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Berdasarkan komponen *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word*, maka diperoleh generasi *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word* yang dapat dilihat pada Tabel 4 dan 5. Beberapa generasi *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word* yang diperoleh digunakan sebagai pembandingan dari hasil generasi *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word* menggunakan algoritma program *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word*.



Tabel 4. Beberapa Generasi *L-Systems* Fraktal *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_1$

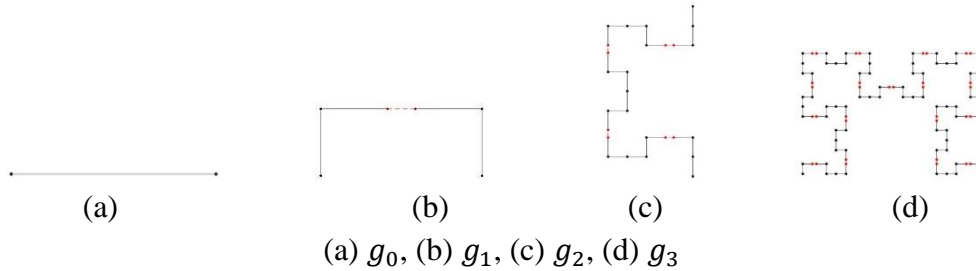
Generasi	Hasil Produksi
$g_0$	$L(x)$
$g_1$	$+S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + F(x)$
$g_2$	$+L(x)F(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + C(x) - R(x)F(x) - O(x) - Y(x) + L(x)F(x) +$ $W(x) - B(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)C(x) - R(x) - B(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + L(x)F(x)$
$g_3$	$+S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x)$ $-R(x)F(x) - G(x) + P(x) + L(x)F(x) + S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) -$ $R(x)F(x) - G(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) -$ $T(x) + L(x)F(x) + S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - R(x)F(x) - G(x) + P(x) +$ $L(x)F(x) + S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) -$ $R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x)F(x) + S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) -$ $R(x)F(x) - G(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) -$ $T(x) + L(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) - G(x) + P(x) + L(x)F(x) +$ $S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x)$

Tabel 5. Beberapa Generasi *L-Systems* Fraktal *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_2$

Generasi	Hasil Produksi
$g_0$	$Z(x)$
$g_1$	$+S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + F(x)$
$g_2$	$+L(x)F(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + C(x) - R(x)F(x) - O(x) - Y(x) + L(x)F(x)$ $+W(x) - B(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)C(x) - R(x) - B(x) + W(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)Y(x) + L(x)F(x)$
$g_3$	$+S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) -$ $G(x) + P(x) + L(x)F(x) + S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - R(x)F(x) - G(x) +$ $S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x)F(x) +$ $S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - R(x)F(x) - G(x) + P(x) + L(x)F(x) + S(x) -$ $G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) -$ $G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x)F(x) + S(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - R(x)F(x) -$ $G(x) + S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) - G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x) + L(x) +$ $S(x)Q\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)T(x) + J(x) - R(x)F(x) - G(x) + P(x) + L(x)F(x) + S(x) -$ $G(x)K\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}}\right)J(x) - T(x)$

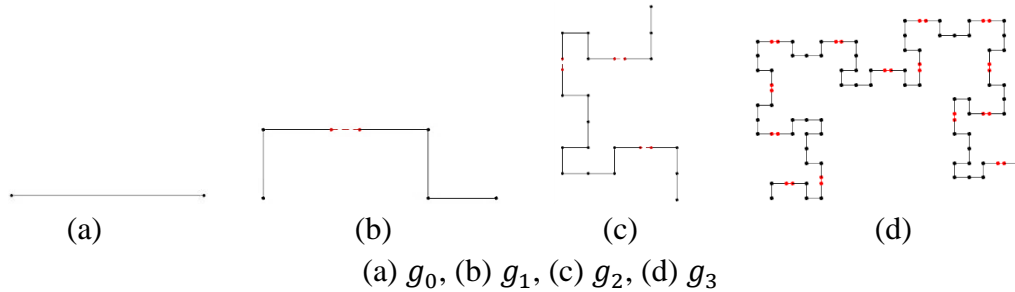
### 3.3 Penafsiran Fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara Grafis

Generasi *L-systems* fraktal *Dense Fibonacci word* pada Tabel 4 dan 5 selanjutnya digambar secara grafis sesuai dengan definisi simbol-simbol *L-Systems*. Penafsiran generasi *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word* secara grafis untuk morfisme  $\mu_1$  pada Tabel 4 dapat dilihat pada Gambar 3.



**Gambar 3.** Penafsiran *L-Systems* Fraktal *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_1$  secara Grafis

Penafsiran generasi *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word* secara grafis untuk morfisme  $\mu_2$  pada Tabel 5 dapat dilihat pada Gambar 4.



**Gambar 4.** Penafsiran *L-Systems* Fraktal *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_2$  secara Grafis

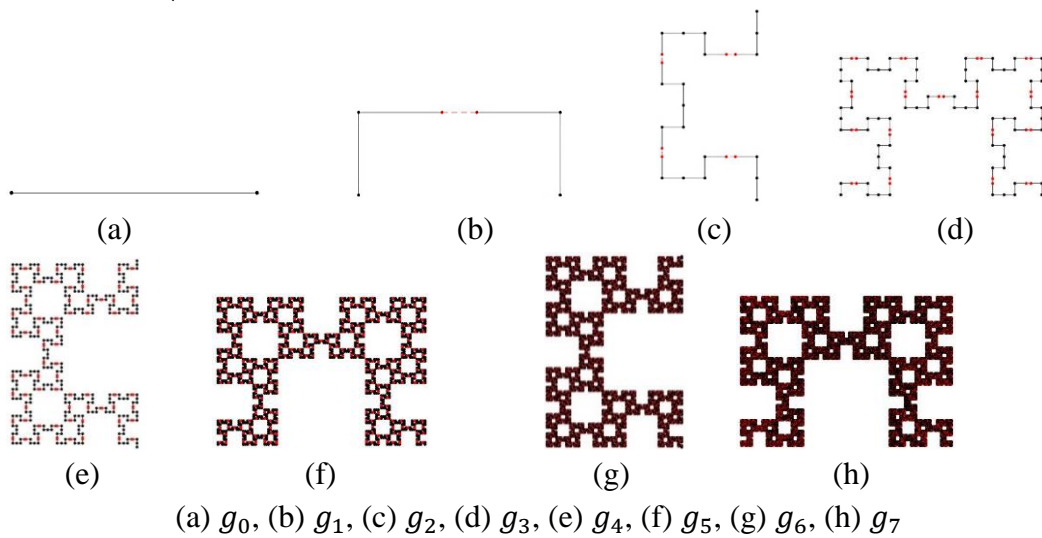
Penafsiran grafis fraktal *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$  yang dibangkitkan dengan metode *L-Systems* pada Gambar 3 dan 4 digambarkan sebagai pembandingan dari hasil visualisasi kurva pada program *L-Systems* fraktal *Dense Fibonacci Word*. Telah disebutkan bahwa ciri dari kurva *Fibonacci word* memiliki kemiripan yaitu kurva  $\mathcal{F}_n$  dengan  $\mathcal{F}_{n-3}$ , sama halnya dengan kurva *Dense Fibonacci Word* memiliki kemiripan yaitu kurva  $\mathcal{F}'_n$  dengan  $\mathcal{F}'_{n-3}$ . Generasi pertama ( $g_1$ ) dari *L-systems* fraktal *Dense Fibonacci word* adalah  $\mathcal{F}'_5$ , dengan  $\mathcal{F}'_5$  merupakan kurva dari barisan *Dense Fibonacci word* ke-5 ( $f'_5$ ). Sehingga, dapat ditulis:

- $g_1 \equiv \mathcal{F}'_5$ : kurva dari barisan *Dense Fibonacci word* ke-5 ( $f'_5$ )
- $g_2 \equiv \mathcal{F}'_8$ : kurva dari barisan *Dense Fibonacci word* ke-8 ( $f'_8$ )

$g_3 \equiv \mathcal{F}'_{11}$ : kurva dari barisan *Dense Fibonacci word* ke-11 ( $f'_{11}$ )  
 atau bisa dirumuskan dengan  $g_n \equiv \mathcal{F}'_{3n+2}$ .

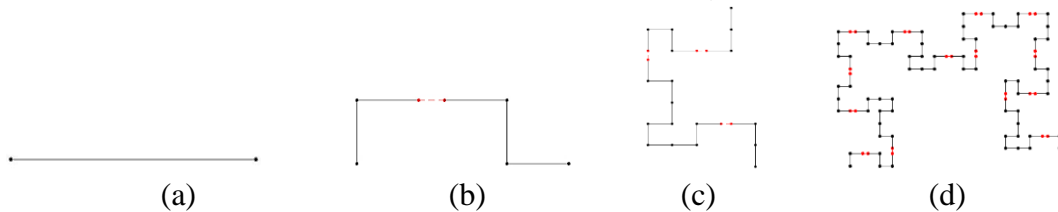
### 3.4 Pembuatan Program Fraktal *Dense Fibonacci Word*

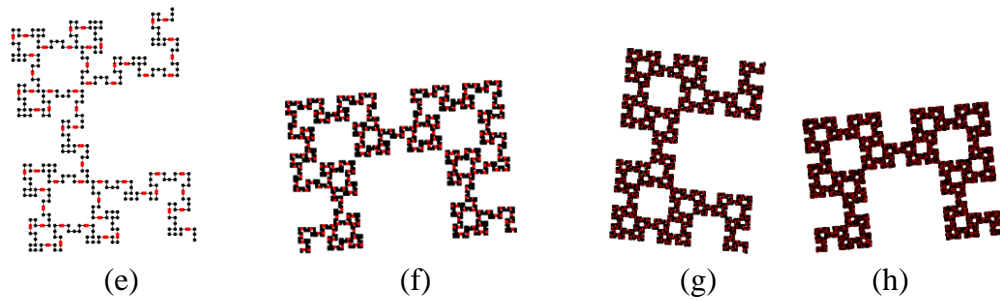
Program fraktal *Dense Fibonacci Word* yang telah dibuat kemudian dijalankan untuk mendapatkan visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* dalam beberapa generasi. Visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* tersebut dihasilkan mulai generasi ke-0 hingga generasi ke-7. Hasil visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* untuk morfisme  $\mu_1$  dapat dilihat pada Gambar 5 dengan panjang  $L = B = C = R = S = T = l$  satuan panjang, dan  $K = Q = \frac{l}{1+\sqrt{2}}$  satuan panjang.



**Gambar 5.** Hasil Visualisasi Fraktal *Dense Fibonacci Word* untuk Morfisme  $\mu_1$  pada Beberapa Generasi

Hasil visualisasi fraktal *Dense Fibonacci Word* untuk morfisme  $\mu_2$  dapat dilihat pada Gambar 6 dengan panjang  $L = B = C = G = J = O = P = R = S = T = W = Y = Z = l$  satuan panjang, dan  $K = Q = \frac{l}{1+\sqrt{2}}$  satuan panjang.





(a)  $g_0$ , (b)  $g_1$ , (c)  $g_2$ , (d)  $g_3$ , (e)  $g_4$ , (f)  $g_5$ , (g)  $g_6$ , (h)  $g_7$

**Gambar 6.** Hasil Visualisasi Fraktal *Dense Fibonacci Word* untuk Morfisme  $\mu_2$  pada Beberapa Generasi





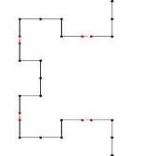
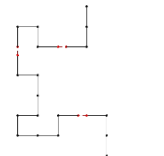
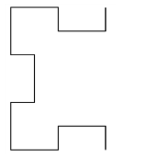
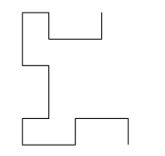
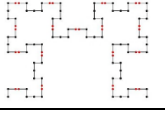
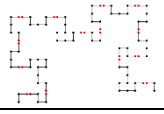
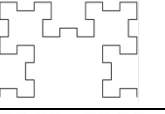
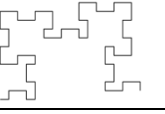




Hasil visualisasi program fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* pada morfisme  $\mu_1$  pada Gambar 5, dan morfisme  $\mu_2$  pada Gambar 6 memiliki bentuk yang sama dengan hasil penafsiran fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara grafis, begitu pula dengan hasil generasi yang dihasilkan dari program. Hasil generasi yang diperoleh dari program memiliki urutan yang sama seperti pada penafsiran fraktal *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$  dengan metode *L-Systems* secara matematis.

### 3.4 Analisis Hasil

Berdasarkan langkah-langkah yang telah dilakukan dan hasil yang diperoleh, maka metode *L-Systems* ini dapat diterapkan dalam membangkitkan fraktal *Dense Fibonacci Word*. Bentuk fraktal yang dihasilkan dengan menggunakan metode *L-Systems* sesuai dengan bentuk fraktal *Dense Fibonacci Word* yang dihasilkan dengan menggunakan metode *Natural Drawing Rule* seperti tampak pada Tabel 6. Namun kurva yang dibangkitkan metode *L-Systems* pada generasi ganjil arahnya berkebalikan dengan kurva yang dibangkitkan metode *Natural Drawing Rule*. Morfisme yang digunakan pada artikel ini ada dua, yaitu morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$ . Morfisme ini bertujuan untuk mendapatkan variasi barisan, sehingga dapat diperoleh variasi bentuk kurva yang baru. Kurva *Dense Fibonacci Word* yang dihasilkan berbeda, sehingga komponen *L-Systems* yang digunakan untuk menafsirkan fraktal *L-Systems Dense Fibonacci Word* secara matematis berbeda pula pada setiap morfismenya.

Perbedaan atau perbandingan visualisasi pada bentuk kurva *Dense Fibonacci Word* setiap morfisme yaitu morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$  yang dihasilkan dari metode pembangkitan *L-Systems* dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Perbandingan Visualisasi Kurva *Dense Fibonacci Word* pada Morfisme  $\mu_1$  dan Morfisme  $\mu_2$  dengan Metode *L-Systems* dan *Natural Drawing Rule*

Bentuk kurva Iterasi ke-	<i>L-Systems</i>		<i>Natural Drawing Rule</i>	
	Morfisme $\mu_1$	Morfisme $\mu_2$	Morfisme $\mu_1$	Morfisme $\mu_2$
$g_1 = \mathcal{F}'_5$				
$g_2 = \mathcal{F}'_8$				
$g_3 = \mathcal{F}'_{11}$				
$g_7 = \mathcal{F}'_{23}$				

Berdasarkan penafsiran grafis dan visualisasi dari program, kurva *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$  yang terbentuk dari metode *L-Systems* memiliki bentuk kurva yang berbeda pada generasi kecil, namun semakin besar generasinya pola fraktalnya sama. Jika dilihat pada bentuknya, kurva *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_2$  terlihat sedikit miring. Hal ini terjadi karena pada kurva tersebut terdapat susunan panjang segmen garis yang berbeda, ada yang tersusun dari satu segmen garis dan ada juga yang tersusun dari dua segmen garis.

#### 4. Kesimpulan dan Saran

Pembangkitan fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan menggunakan metode *Natural Drawing Rule* dapat dibangun dengan metode *L-Systems* yang menggunakan aturan penulisan kembali. Visualisasi program fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* yang telah dibuat, diperoleh hasil generasi dan visualisasi bentuk fraktal *Dense Fibonacci Word* yang sama dengan penafsiran fraktal *Dense Fibonacci Word* dengan metode *L-Systems* secara matematis dan secara grafis. Visualisasi kurva *Dense Fibonacci Word* pada morfisme  $\mu_1$  dan morfisme  $\mu_2$  menghasilkan bentuk kurva baru. Pada generasi kecil, bentuk kurva pada kedua morfisme ini berbeda. Namun, fraktal yang terbentuk dari kedua morfisme ini pada generasi besar memiliki pola yang sama.

Pada artikel ini metode yang digunakan untuk membangkitkan kurva *Dense Fibonacci Word* yaitu *L-Systems*, untuk menghasilkan kurva yang sama pada morfisme yang ditetapkan harus mengetahui pola fractal setiap generasinya. Jika pola fraktalnya sudah tahu maka bisa dilanjutkan untuk menentukan komponen *L-Systems*-nya. Kekurangan memakai *L-Systems* adalah susah dalam menyesuaikan komponen *L-Systems* yang diperlukan dan kurva *Dense Fibonacci Word* yang terbentuk. Diharapkan untuk artikel selanjutnya dalam pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* dapat dikembangkan dengan morfisme lain untuk memperoleh variasi bentuk kurva baru, dan dapat menggunakan metode pembangkitan selain *L-Systems*.

### Daftar Pustaka

- Dumaine, A. M. (2009). *The Fibonacci Word Fractal*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00367972/document>. [Diakses pada 29 Mei 2020].
- Liyani, N. (2018). *Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva Dense Fibonacci Word*. *Skripsi*. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Ochoa, G. (1998). *An Introduction to Lindenmayer Systems*. [http://www1.biologie.uni-hamburg.de/b-online/e28\\_3/lsys.html](http://www1.biologie.uni-hamburg.de/b-online/e28_3/lsys.html). [Diakses pada 25 Mei 2020].
- Purnomo, K. D., R. D. Alyagustin, dan Kusbudiono. (2015). *Variasi Fraktal Fibonacci Word*. Universitas Negeri Yogyakarta. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. ISBN 978-602-73403-0-5.
- Prusinkiewicz, P., dan A. Lindenmayer. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Springer-Verlag.
- Ramirez, J. L. dan G. N. Rubiano. (2014). Properties and Generalizations of the Fibonacci Word Fractal. *The Mathematica Journal*. Vol.16(02): 1-25.
- Romadiastri. Y. (2013). Batik Fraktal: Pengembangan Aplikasi Geometri Fraktal. *Jurnal Matematika*. Vol.1(02): 115-199.

Saefurrohman, dan D. Handayani. (2016). Desain Motif Batik dengan Metode Fraktal dan Algoritma *L-Systems* untuk Membangun Pustaka Batik Wali. *Jurnal Teknologi Informasi DINAMIK*. Vol.21(01): 42-51.

Umami, R., K. D. Purnomo, dan F. Ubaidillah. (2019). Kajian Fraktal *i-Fibonacci Word* Generalisasi Ganjil dengan Menggunakan *L-Systems*. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*. Vol.19(01): 1-8.