Jurnal Matematika Vol. 2 No. 2, Desember 2012. ISSN : 1693-1394

Produk Cartesius Semipgrup Smarandache

Yuliyanti Dian Pratiwi

Sekolah Tinggi Teknik Wiworotomo Purwokerto

e-mail: dianhilal@gmail.com

Abstract: Smarandache semigroups is an expansion of semigroup structure, by taking a proper subset of semigroups which is in form of group. But, a proper subset which is in form of group cannot always be found in semigroups. Therefore, we need necessary requirements and prosperous requirements in the Smarandache semigroups. Besides, this study also shows some kinds of Smarandache semigroups, which have specific characteristics, namely Smarandache commutative semigroups and Smarandache cyclic semigroups. Then, by the definitions, we will investigate the form of its Cartecius product.

Keywords: Smarandache semigroups, Smarandache commutative subgroups, Smarandache cyclic semigroups, Cartesius product.

1. Pendahuluan

Pendefinisian Smarandache semigrup diperkenalkan oleh Raul (1998). Semigrup Smarandache merupakan perkembangan dari struktur semigrup, dengan mengambil subhimpunan sejati dari semigrup yang berbentuk grup. Tetapi subhimpunan sejati yang berbentuk grup tidak selalu dapat ditemukan pada semigrup. Untuk itu penelitian ini dibutuhkan syarat perlu dan syarat cukup di dalam semigrup Smarandache. dijelaskan juga jenis-jenis semigrup Smarandache yang memiliki sifat khusus seperti semigrup komutatif Smarandache dan semigrup siklis Smarandache. Kemudian struktur grup yang telah dipelajari dapat dibentuk struktur baru yaitu dari produk Cartesiusnya. Dari fenomena tersebut artikel ini akan menjelaskan bentuk produk Cartesius dari dua semigrup Smarandache, apakah masih merupakan semigrup Smarandache. Dan bagaimana konvers dari pernyataan tersebut. Bagian akhir diteliti juga untuk bentuk semigrup komutatif Smarandache dan semigrup siklis Smarandache. Sehingga diperoleh hasil penelitian dari artikel ini diperoleh bahwa sifat pada produk Cartesius struktur grup diturunkan juga pada struktur semigrup Smarandache.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Semigrup

Subbab ini akan menyajikan pengertian-pengertian dasar semigrup, subsemigrup, ideal semigrup, homomorfisma semigrup, sifat-sifat yang berkaitan dengan semigrup dan contoh yang terkait didalamnya. Pertama akan diberikan definisi semigrup sebagai berikut.

Definisi 2.1. [4] Himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan operasi biner $*$, ditulis $(S, *)$ disebut **semigrup** apabila memenuhi sifat assosiatif, yaitu $(\forall x, y, z \in S)(x * y) * z = x * (y * z)$.

Jika $(\forall x, y \in S)$ $x * y = y * x$ maka S disebut semigrup komutatif. Untuk memperjelas Definisi 2.1, berikut akan diberikan beberapa contoh.

Contoh 2.1. Himpunan $Z^+ \cup \{0\}$ terhadap operasi $\times$ merupakan semigrup.

Contoh 2.2. Himpunan $S_{n \times m} = \{(a_{ij}|a_{ij} \in Z)\}$ terhadap operasi penjumlahan matriks merupakan semigrup.

Contoh 2.3. Diberikan himpunan S_n, yang merupakan himpunan semua pemetaan satu-satu dari himpunan $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ke dirinya sendiri. S_n terhadap operasi komposisi pemetaan merupakan semigrup.

Selanjutnya dalam mempelajari semigrup, terdapat beberapa elemen yang mempunyai sifat khusus. Definisi elemen-elemen dengan sifat khusus tersebut diambil dari buku Howie (1976)akan disajikan dalam definisi berikut.

Definisi 2.2. Diberikan semigrup S. Jika terdapat $e \in S$ dan berlaku $(\forall s \in S)$ $e * s = s * e = s$, maka elemen e disebut **elemen identitas** dan selanjutnya S disebut monoid.

Setelah mendefinisikan elemen identitas, selanjutnya akan diberikan definisi elemen idempoten.

Definisi 2.3. [3] Diberikan semigrup S, elemen $x \in S$ yang memenuhi $x \cdot x = x^2 = x$ disebut elemen idempoten.

Jika semigrup S memiliki elemen identitas, maka elemen identitas tersebut merupakan elemen idempotent. Untuk memperjelas definisi diatas, berikut diberikan contoh yang berkaitan dengan elemen idempotent.

Contoh 2.4. Diberikan semigrup $Z_{10} = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ terhadap operasi perkalian modulo 10. Jelas terdapat elemen idempotent, yaitu $5 \in Z_{10}$ karena berlaku $5^2 \equiv 5(\text{mod } 10)$ dan $6 \in Z_{10}$ karena berlaku $6^2 \equiv 6(\text{mod } 10)$.

Kemudian berikut akan mendefinisikan elemen pembagi, elemen unit dan elemen reguler.

Definisi 2.4. [3] Diberikan semigrup S dan $a \in S$.

1. Elemen $b \in S$ disebut pembagi kiri a jika terdapat $x \in S$ sehingga $bx = a$, dan disebut pembagi kanan a jika terdapat $y \in S$ sehingga $yb = a$.
2. Suatu elemen $b \in S$ disebut unit kiri dari a jika $ba = a$, dan disebut unit kanan dari a jika $ab = a$. Suatu elemen $b \in S$ disebut unit dari a jika b merupakan unit kiri sekaligus unit kanan dari a.
3. Elemen a disebut reguler jika terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $a \times a = a$.
4. Elemen a disebut reguler lengkap jika terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $a \times a = a$ dan $ax = xa$.
5. Elemen $a \in S$ disebut unit kiri reguler dari a jika e merupakan unit kiri dari a, dan a pembagi kiri e. Elemen $e \in S$ disebut unit kanan reguler dari a jika e merupakan unit kanan dari a, dan a pembagi kanan e. Elemen $e \in S$ disebut unit reguler dari a jika e merupakan unit dari a, dan a pembagi kiri dan kanan e.

Selanjutnya pada bagian ini akan dijelaskan definisi subsemigrup dari semigrup dan beberapa contoh dari subsemigrup.

Definisi 2.5. [3] Diketahui $(S, *)$ semigrup. Himpunan tak kosong $P \subseteq S$ disebut **subsemigrup** jika $(P, *)$ merupakan semigrup.

Untuk lebih memperjelas Definisi 2.5, berikut akan diberikan contoh sederhana dari subsemigrup.

Contoh 2.5. Diberikan semigrup $Z_{12} = \{0, 1, 2, \cdots, 11\}$ terhadap operasi perkalian modulo 12. $P = \{0, 2, 4, 8\}$ adalah subsemigrup dari S.

Selanjutnya seperti halnya struktur aljabar lainnya, dalam semigrup juga ditemukan suatu ideal. Ideal dalam semigrup sendiri didefinisikan seperti yang disajikan berikut ini.

Definisi 2.6. Diberikan semigrup S. Himpunan tak kosong $T \subseteq S$ disebut ideal kanan dari S, jika $(\forall t \in T), (\forall s \in S)$ berlaku $ts \in T$ dan T disebut ideal kiri dari S, jika $(\forall t \in T)$ dan $(\forall s \in S)$ berlaku $st \in T$. Jika T merupakan ideal kanan sekaligus merupakan ideal kiri maka T disebut **ideal** dari semigrup S.

Misalkan $A \subseteq S$ dan $A \neq 0$. Irisan semua ideal kiri dari S yang memuat A juga merupakan ideal kiri yang memuat A dan merupakan ideal kiri terkecil yang memuat A. Selanjutnya disebut ideal kiri yang dibangun oleh A. Jika S semigrup, ideal kiri di S yang dibangun oleh A tidak lain adalah $A \cup SA = S'A$ dengan $S' = S \cup \{1\}$ karena S semigrup yang tidak memuat elemen identitas, sehingga jika diambil $a \in S$ maka secara umum Sa tidak memuat a. Dan dengan cara yang sama, ideal kanan yang dibangun oleh A adalah $A \cup AS = AS'$, sedangkan ideal yang dibangun oleh A adalah $A \cup SA \cup AS \cup SAS = S'AS'$.

Secara khusus, jika $A = \{a\}$ maka ideal kiri, ideal kanan dan ideal di S yang dibangun oleh secara berturut-turut adalah $\{a\} \cup Sa = S'a$, $\{a\} \cup aS = aS'$ dan $\{a\} \cup Sa \cup aS \cup SaS = S'aS'$. Selanjutnya dari definisi ideal yang telah dikenal sebelumnya, berikut akan diberikan contoh untuk memperjelas definisi ideal dari suatu semigrup.

Contoh 2.6. Diberikan semigrup $M = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in Z\}$ terhadap operasi perkalian matriks. $N = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a \in Z\} \subseteq M$ adalah ideal dari semigrup M.

Dari definisi dan sifat yang telah dijelaskan di atas selanjutnya akan digunakan dalam mempelajari konsep semigrup Smarandache. Dimana semigrup Smarandache merupakan semigrup yang memiliki sifat khusus, yang akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

2.2. Semigrup Smarandache

Konsep baru di dalam struktur aljabar Smarandache diperkenalkan oleh Padila Raul dan Smarandache Florientine pada tahun 1998. Yang salah satunya dikembangkan dalam struktur semigrup. Yang diberi nama dengan semigrup Smarandache dan selanjutnya di notasikan dengan $S-$semigrup. Pada bagian awal akan dijelaskan tentang konsep dasar pendefinisian semigrup.

Definisi 2.7. [4] Diberikan semigrup S, semigrup S disebut semigrup Smarandache (S-semigrup) apabila memuat subhimpunan sejati A, sedemikian sehingga A merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan S.

Berikut akan diberikan contoh untuk memperjelas pendefinisan semigrup Smarandache.

Contoh 2.7. Diberikan semigrup $M_{(n\times n)} = \{(a_{ij})|a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ terhadap operasi perkalian matriks. Terdapat $P_{n\times n} = \{(a_{ij}) = A||A| \neq 0\} \subset M_{n\times n}$ yang merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks. Jadi $M_{n\times n}$ merupakan S-semigrup.

Dari pendefinisian di atas jelas bahwa tidak semua semigrup merupakan semigrup Smarandache, sehingga diperlukan syarat perlu dan cukup suatu semigrup dikatakan semigrup Smarandache. Berikut diberikan teorema-teorema yang menunjukkan karakteristik semigrup Smarandache.

Teorema 2.1. *Diberikan semigrup S. Semigrup S merupakan semigrup Smarandache jika dan hanya jika S memuat elemen idempoten.*

Bukti:
($\Rightarrow$) Diketahui S merupakan semigrup Smarandache, berarti terdapat subhimpunan sejati $G \subset S$ sedemikian hingga G merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada S. Karena G merupakan grup, maka terdapat elemen netral $e \in G$ dengan sifat $e^2 = ee = e$, yang berarti e merupakan elemen idempoten. Jadi terbukti bahwa S memuat elemen idempoten.
($\Leftarrow$) Diketahui S memuat elemen idempoten. Ambil sebarang elemen idempoten $e \in S$. Dibentuk himpunan $G_e = \{a \in S|e$ elemen unit reguler dari $a\}$. Karena e idempoten, maka e merupakan unit reguler dari e. Oleh karena itu, $e \in G_e$ dan berakibat $G_e \neq \emptyset$. Akan ditunjukkan bahwa G_e merupakan grup terhadap operasi yang sama pada S. Ambil sebarang $g_1, g_2 \in G_e$, berarti e merupakan elemen unit reguler dari g_1 dan g_2. Artinya, terdapat $u_1, u_2, v_1, v_2 \in S$ sedemikian hingga:

$$e = g_1u_1, \quad e = g_2u_2, \quad e = v_1g_1, \quad \text{dan} \quad e = v_2g_2$$

Oleh karena itu, diperoleh:

$$\begin{aligned}(g_1g_2)(u_2u_1) &= g_1(g_2u_2)u_1 = g_1eu_1 = g_1u_1 = e\\ (v_2v_1)(g_1g_2) &= v_2(v_1g_1)g_2 = v_2eg_2 = v_2g_2 = e\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(g_1g_2)e &= g_1(g_2e) = g_1g_2\\ e(g_1g_2) &= (eg_1)g_2 = g_1g_2\end{aligned}$$

Jadi e merupakan elemen unit reguler dari g_1g_2, sehingga $g_1g_2 \in G_e$. Karena $G_e \subset S$, maka sifat asosiatif dari semigrup S secara langsung diwariskan pada G_e. Jadi, G_e merupakan semigrup dengan unit e(G_e monoid). Selanjutnya klaim bahwa eu_1e merupakan invers dari g_1. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} e(eu_1e) &= (ee)u_1e = eu_1e \\ (eu_1e)e &= eu_1(ee) = eu_1e \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} e &= ee = g_1u_1e = (g_1e)u_1e = g_1(eu_1e) \\ e &= v_1g_1 = v_1(eg_1) = v_1(eeg_1) = v_1(g_1u_1)eg_1 = (v_1g_1)u_1eg_1 = eu_1eg_1 = (eu_1e)g_1 \end{aligned}$$

Dari sini diperoleh bahwa eu_1e merupakan invers kiri sekaligus invers kanan dari g_1 dan e merupakan elemen unit reguler dari eu_1e, sehingga $eu_1e \in G_e$. Karena pengambilan g_1 sebarang di G_e, maka diperoleh kesimpulan bahwa setiap elemen di G_e mempunyai invers di G_e. Jadi, $G_e \subset S$ merupakan grup terhadap operasi biner yang sama pada S. Dengan kata lain, merupakan semigrup Smarandache.

Teorema 2.3 menjelaskan bahwa syarat perlu dan cukup suatu semigrup merupakan semigrup Smarandache adalah memuat elemen idempoten. Selanjutnya akan diberikan syarat perlu dan cukup yang lain sehingga suatu semigrup merupakan semigrup Smarandache, yaitu memuat elemen regular lengkap.

Teorema 2.3 menjelaskan bahwa syarat perlu dan cukup suatu semigrup merupakan semigrup Smarandache adalah memuat elemen idempoten. Selanjutnya akan diberikan syarat perlu dan cukup yang lain sedemikian hingga suatu semigrup merupakan semigrup Smarandache, yaitu memuat elemen regular lengkap.

Teorema 2.2. *Diberikan semigrup S. Semigrup S merupakan semigrup Smarandache jika dan hanya jika S memuat elemen reguler lengkap.*

Selanjutnya apabila subhimpunan sejati yang merupakan grup tersebut bersifat komutatif maka S tersebut disebut dengan semigrup komutatif Smarandache, seperti dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.8. Diberikan semigrup Smarandache S. Jika S terdapat paling sedikit satu subhimpunan sejati dari S yang merupakan grup komutatif terhadap operasi yang sama pada S, maka S disebut semigrup komutatif Smarandache ($S-$semigrup komutatif).

Begitupula jika subhimpunan sejati dari S merupakan grup merupakan grup siklis, maka dapat didefinisikan semigrup siklis Smarandache sebagai berikut.

Definisi 2.9. Diberikan semigrup Smarandache S. Jika terdapat paling sedikit satu subhimpunan sejati dari S yang merupakan grup siklis terhadap operasi yang sama pada S, maka S disebut semigrup siklis Smarandache (S-semigrup siklis).

Kemudian pada bagian ini juga akan dijelaskan sifat-sifat dan teorema dasar dalam jenis-jenis semigrup Smarandache yang telah dijelaskan pada penjelasan sebelumnya.

Teorema 2.3. *Jika S S-semigrup siklis kuat, maka S merupakan S-semigrup komutatif kuat.*

Konvers dari Theorem 2.3 di atas, tidak berlaku. Sebagaimana dijelaskan pada teorema di bawah ini.

Teorema 2.4. *Diketahui S S-semigrup komutatif. Secara umum S belum tentu merupakan S-semigrup siklis.*

Penelitian selanjutnya akan menganalisis bentuk produk Cartesius dari dua grup dibawa ke bentuk semigrup Smarandache dan dapat diturunkan menjadi suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 2.5. *Jika S_1 dan S_2 merupakan S-semigrup maka $S_1 \times S_2$ juga merupakan S-semigrup.*

Bukti: Dari sifat grup, diperoleh jika G dan H grup, maka $G \times H$ merupakan grup terhadap operasi untuk setiap $(s_1, p_1), (s_2, p_2) \in S \times P$ yaitu:

$$(s_1, p_1)(s_2, p_2) = (s_1 s_2, p_1 p_2) \tag{1}$$

Selanjutnya diambil sembarang S-semigrup S dan P, terdapat subhimpunan $G \subset S$ dan $H \subset P$ yang merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan semigrupnya. Himpunan $G \times H$ merupakan subhimpunan sejati $S \times P$ dan sesuai dengan sifat grup, diperoleh $G \times H$ berbentuk grup. Jadi produk Cartesius $S \times P$ merupakan S-semigrup. Konvers dari Teorema 2.5 dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.6. *Diketahui S_1 dan S_2 semigrup yang terdapat elemen yang tidak memiliki elemen invers. Jika $S_1 \times S_2$ S-semigrup terhadap operasi (2.1), maka S_1 merupakan S-semigrup atau S_2 merupakan S-semigrup.*

Bukti: Karena terdapat $X \subset S_1 \times S_2$ yang berbentuk grup terhadap operasi (3.1) maka $(\forall x \in X)(\exists S_1 \wedge s_2 \in S_2) x = (s_1, s_2)$. Kemudian dibentuk $X = G \times H$ dengan $G = \{s_1 \in S_1 | (\exists h \in S_2)(s_1, h)\} \subseteq S_1$, $H = \{s_2 \in S_2 | (\exists S_1)(h, s_2) \in X\} \subseteq S_2$. Untuk setiap $s_1, s_2 \in G$ terdapat $h_1, h_2 \in S_2$ sedemikian sehingga $(s_1, h_1)(s_2, h_2) = (s_1 s_2, h_1 h_2) \in G \times H$, jadi $s_1 s_2 \in G$ dan $h_1 h_2 \in H$. Sifat assosiatif diturunkan dari grup $X = G \times H$. Kemudian terdapat $(e, f) \in G \times H$ sedemikian sehingga untuk setiap $(s_1, h) \in G \times H$ berlaku $(e, f)(s_1, h) = (s_1, h) = (s_1, h)(e, f)$, akibatnya $es_1 = s_1 = s_1 e$. Selanjutnya untuk elemen invers dari $s_1 \in G$ maka terdapat $h \in S_2$, sehingga $(e, f) = (s_1 s_1^{-1}, hh^{-1}) = (s_1, h)(s_1^{-1}, h^{-1})$. Jadi untuk setiap $s_1 \in G$ tedapat $s_1^{-1} \in G$, $s_1 s_1^{-1} = s_1^{-1} s_1 = e$. Dari sini diperoleh G merupakan grup di S_1. Begitupula dengan H juga merupakan grup di S_2. Karena S_1 atau S_2 bukan grup, maka $G \neq S_1$ dan $H \neq S_2$. Menggunakan Theorema 2.6 diperoleh kesimpulan S_1 atau S_2 merupakan S-semigrup.

Selanjutnya akan diselidiki untuk produk Cartesius dari S-semigrup yang memiliki sifat khusus yaitu masing-masing merupakan S-semigrup komutatif dan S-semigrup siklis sebagai berikut.

Teorema 2.7. *Jika S_1 dan S_2 merupakan S-semigrup komutatif (siklis), maka $S_1 \times S_2$ merupakan S-semigrup komutatif (siklis).*

Konvers dari Teorema 2.11 dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.8. *Diketahui S_1 dan S_2 semigrup yang terdapat elemennya tidak memiliki elemen invers. Jika $S_1 \times S_2$ merupakan S-semigrup komutatif, maka S_1 merupakan S-semigrup komutatif atau S_2 merupakan S-semigrup komutatif.*

3. Kesimpulan

Beberapa hasil penting atau sifat-sifat yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Struktur semigrup Smarandache merupakan kejadian khusus dari struktur semigrup.
2. Jika S_1 dan S_2 merupakan S-semigrup maka $S_1 \times S_2$ juga merupakan S-semigrup.
3. Diketahui S_1 dan S_2 bukan grup. Jika $S_1 \times S_2$ merupakan S-semigrup, maka S_1 merupakan S-semigrup atau S_2 merupakan S-semigrup.

Daftar Pustaka

[1] Adkins, W. A. danWeintraub, S. H.,1992,Algebra An Approach via Module Theory, Spinger-Verlag, New York.
[2] Clifford, A.H. dan Preston, G.B.,1961, The Algebraic Theory OfSemigroups.Volume 1, American Mathematical Society.
[3] Howie, J.M., 1976, Introduction To Semigroup Theory. Academic Press.
[4] Kandasamy, W. B. ,2002, Smarandache Semigroups, American Researh Prees.
[5] Kandasamy, W. B., 2009, Smarandache Special Definite Algebraic Structures.Infolearquest.
[6] Kandasamy, W. B., Sujatha, J. dan John, M.M., 2002, SmarandacheGrupoids, National Symposium on Mathematical Method and Applications, Indian Institute of Technology, India.
[7] Kandasamy, W. B., Sujatha, J. dan John, M.M., 2004, SmarandacheDobleCosets in a S-Semigroups, National Symposium on Mathematical Method and Applications, Indian Institute of Technology, India.
[8] Rao. C. S..On Smarandache Semigroups. Department of Mathematics. DNR College. Bhimavaram. India.