

Pendekatan-pendekatan Titik Sadel: Suatu Kajian Pustaka

I Wayan Sumarjaya

*Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Udayana
Kampus Bukit Jimbaran Badung, Bali
e-mail: sumarjaya@unud.ac.id*

Abstract: Dalam banyak area riset seperti biologi dan ilmu kedokteran, sering dijumpai jumlah amatan terlalu sedikit atau informasi yang diperoleh sangat sedikit atau terbatas. Inferensi dengan menggunakan teorema limit pusat untuk menyimpulkan statistik yang diteliti mendekati normal tentu tidaklah tepat. Salah satu cara untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menggunakan pendekatan titik sadel (*saddlepoint approximation*). Artikel ini mengulas konsep dan beberapa perkembangan penting pendekatan titik sadel seperti pendekatan titik sadel untuk rata-rata, fungsi distribusi kumulatif, distribusi bersyarat, statistik umum, dan distribusi posterior.

Keywords: pendekatan titik sadel, ekspansi Edgeworth, asimptotik sampel kecil, asimptotik tingkat tinggi

1. Pendahuluan

Dalam banyak area riset seperti biologi dan ilmu kedokteran, sering dijumpai jumlah amatan terlalu sedikit atau informasi yang diperoleh sangat sedikit atau terbatas. Salah satu cara untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menggunakan teorema limit pusat untuk menyimpulkan statistik yang sedang diteliti mendekati normal. Pendekatan ini disebut asimptotik tingkat pertama (*first order asymptotics*). Namun, pendekatan ini tidaklah tepat karena tidak memberikan hasil yang akurat (lihat [11]).

Metode lain untuk menyelesaikan permasalahan di atas adalah dengan menggunakan ekspansi asimptotik (*asymptotic expansion*) atau asimptotik kemungkinan modern (*modern likelihood asymptotics*). Konsep dasar asimptotik kemungkinan modern adalah dengan memodifikasi teorema limit pusat "naif" dengan ekspansi tingkat tinggi. Secara garis besar terdapat dua ekspansi asimptotik penting dan saling berhubungan yaitu ekspansi Edgeworth dan pendekatan titik sadel (*saddlepoint approximation*).

Ekspansi Edgeworth yang berbentuk

$$\tilde{F}_n(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^k \frac{q_i(x)}{\sqrt{n^i}} + o(n^{-k/2}) \quad (1)$$

memberikan pendekatan yang baik pada pusat distribusi. Namun, ekspansi Edgeworth tidak bagus pada daerah ekor (*tail*) distribusi. Hal ini dapat dilihat dengan munculnya kenegatifan pada ekor yang disebabkan oleh suku polinomial (lihat [15]). Salah satu upaya untuk mengatasi masalah kenegatifan ini adalah menggunakan pendekatan titik sadel.

Artikel ini diatur sebagai berikut. Bagian 2 akan membahas konsep dasar pendekatan titik sadel dalam aplikasi statistika. Pada bagian 3, akan dibahas beberapa perkembangan dalam pendekatan titik sadel seperti pendekatan titik sadel untuk rata-rata, fungsi distribusi kumulatif, distribusi bersyarat, statistik umum, dan distribusi posterior. Selanjutnya, aplikasi pendekatan titik sadel yang saat ini aktif dikembangkan dan digunakan akan dibahas pada bagian 4. Isu-isu yang berhubungan dengan pendekatan titik sadel akan dibahas pada bagian 5. Akhirnya, pada bagian 6 artikel ini akan memberikan simpulan.

2. Pendekatan Titik Sadel

Pada bagian ini akan dibahas konsep dasar pendekatan titik sadel. Secara umum pendekatan titik sadel adalah bagian dari analisis asimptotik. Aplikasi titik sadel dalam konteks statistika diusulkan oleh [15]. Pengkajian tentang titik sadel dan aplikasinya dalam bidang statistika telah diulas secara mendalam oleh [8] dan [32]. Selain itu terdapat pula monograf dan buku yang membahas pendekatan titik sadel dari tingkat dasar sampai lanjut, misalnya [21], [25], [26], dan [14].

Pendekatan titik sadel dapat dilihat dari beberapa perspektif: metode Laplace, *exponential tilting*, dan ekspansi Edgeworth. Pada bagian ini akan dibahas penurunan pendekatan titik sadel menggunakan metode Laplace. Pembahasan berikut diadaptasi dari artikel [24]. Ide pendekatan titik sadel tersebut adalah sebagai berikut. Pertama, lakukan pendekatan terhadap fungsi positif $f(x)$ menggunakan deret Taylor dan ekspansikan integran dan kenali bahwa kernel dari integran adalah sama dengan kernel dari distribusi normal. Langkah ini disebut dengan pendekatan Laplace. Langkah berikutnya adalah mengombinasikan pendekatan Taylor dan pendekatan Laplace.

Misalkan akan didekati fungsi positif $f(x)$ yang tidak mesti fungsi densitas peluang. Misalkan $g(x) = \log f(x)$. Tulis $f(x) = \exp(g(x))$ dan gunakan ekspansi Taylor pada x_0 sehingga diperoleh

$$f(x) \approx \exp\left(g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}g''(x_0)\right). \quad (2)$$

Untuk menyederhanakan pendekatan pilih $x_0 = \hat{x}$ dengan $g'(\hat{x}) = 0$, sehingga ekspansi pada sisi kanan (2) menjadi

$$f(x) \approx \exp\left(g(\hat{x}) + \frac{(x - \hat{x})^2}{2}g''(\hat{x})\right). \quad (3)$$

Dapat dilihat pendekatan pada (3) adalah pasti jika $g(x)$ adalah fungsi kuadrat. Namun, jika $g(x)$ bukan fungsi kuadrat tentu saja suku-suku ekspansi tingkat yang lebih tinggi seperti $(x - \hat{x})^3$ atau $(x - \hat{x})^4$ akan berpengaruh terhadap pendekatan dan hasilnya tidak akan bagus [24]. Lakukan ekspansi integran pada (3) sehingga diperoleh

$$\int f(x) dx \approx \int \exp\left(g(\hat{x}) + \frac{(x - \hat{x})^2}{2}g''(\hat{x})\right) dx. \quad (4)$$

Jika \hat{x} pada (4) maksimum dan $g''(\hat{x})$ adalah negatif, dapat dilihat bahwa kernel dari integral tersebut adalah sama dengan kernel densitas normal $N(\hat{x}, -1/g''(\hat{x}))$. Selanjutnya dari sifat densitas normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2 diperoleh

$$\int \exp(-(x - \mu)^2/2\sigma^2) dx = (2\pi\sigma^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Lakukan ekspansi pada sisi kanan persamaan (4) sehingga diperoleh

$$\int f(x) dx \approx \exp g(\hat{x}) \left(\frac{-2\pi}{g''(\hat{x})} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Teknik yang digunakan pada (6) disebut pendekatan Laplace. Pada langkah berikut akan dikombinasikan ekspansi Taylor dan pendekatan Laplace. Tulis f sebagai

$$f(x) = \int h(x, t) dt \quad (7)$$

untuk beberapa $h(x, t)$ positif. Definisikan $k(x, t) = \log h(x, t)$ dan dengan menggunakan (3) serta (4) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \int \exp \left[k(x, \hat{t}(x)) + \frac{(t - \hat{t}(x))^2}{2} \frac{\partial^2 k(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{\hat{t}(x)} \right] dt \\ &= \exp[k(x, \hat{t}(x))] \left(-\frac{2}{\partial^2 k(x, t)/\partial t^2} \Big|_{\hat{t}(x)} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

untuk setiap x , $\hat{t}(x)$ memenuhi $\partial k(x, t)/\partial t = 0$ dan $\partial^2 k(x, t)/\partial t^2 < 0$ yang memaksimalkan $k(x, t)$. Teknik ini selanjutnya diterapkan pada densitas $f(x)$. Misalkan $\phi_X(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari $f(x)$. Formula inversi (lihat [20]) memberikan

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(it) \exp(itx) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\psi_X(it) - itx) dt, \end{aligned} \quad (9)$$

dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $\psi_X(it)$ adalah fungsi pembangkit kumulatif (*cumulant generating function*). Misalkan $t' = it$; selanjutnya persamaan (9) dapat ditulis sebagai

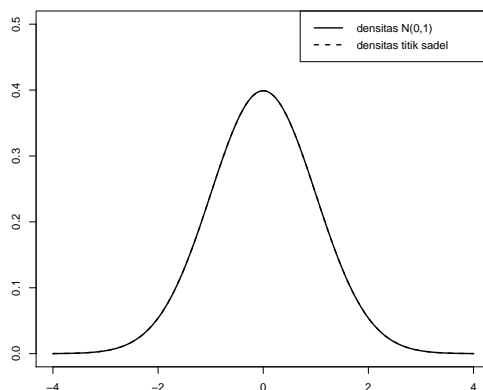
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-\infty}^{\tau+\infty} \exp(\psi_X(t) - tx) dt. \quad (10)$$

Sekarang misalkan $k(x, t) = \psi_X(it) - tx$ dan cari titik $\hat{t}(x)$ yang memenuhi

$$\psi'_X(\hat{t}(x)) = x. \quad (11)$$

Lakukan ekspansi $\psi_X(t) - tx$ di sekitar $\hat{t}(x)$ sehingga diperoleh

$$\psi_X(t) - tx \approx \psi_X(\hat{t}(x)) - \hat{t}(x)x + \frac{(t - \hat{t}(x))^2}{2} \psi''_X(\hat{t}(x)). \quad (12)$$

FIG 1. Plot densitas $N(0,1)$ dan pendekatan titik sadel.

Substitusikan (12) ke dalam (9) dan mengintegrasikan $f(x)$ diperoleh

$$\hat{f}(x) \approx \left(\frac{1}{2\pi\psi_X''(\hat{t}(x))} \right)^{1/2} \exp[\psi_X(\hat{t}(x)) - \hat{t}(x)x]. \quad (13)$$

Titik $\hat{t}(x)$ pada (11) disebut titik sadel (*saddlepoint*) dari $\psi_X(t) - tx$ dan $\hat{f}(x)$ disebut densitas titik sadel.

Contoh 1. Misalkan peubah acak X berdistribusi $N(0, 1)$. Kumulan distribusi ini adalah $\psi_X(t) = t^2/2$ untuk $t \in (-\infty, \infty)$. Titik sadel dalam hal ini adalah $\hat{t} = x$. Dengan demikian diperoleh densitas titik sadel

$$\hat{f}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (14)$$

yang dalam hal ini tepat sama dengan densitas $N(0, 1)$. Gambar 1 memperlihatkan plot densitas $N(0, 1)$ dan densitas titik sadel.

Contoh 2. Misalkan perubah acak X berdistribusi $\text{Gamma}(\theta, 1)$. Kumulan X adalah $\psi_X(t) = -\theta \log(1 - t)$, $t \in (-\infty, 1)$ dan titik sadel tunggalnya adalah $\hat{t} = 1 - \theta/x$. Selanjutnya diperoleh pendekatan titik sadel untuk $\text{Gamma}(\theta, 1)$ adalah

$$\hat{f}(x) = (\sqrt{2\pi}\theta^{\theta-1/2} \exp(-\theta))^{-1} x^{\theta-1} \exp(-x), \quad x > 0. \quad (15)$$

Gambar 2 memperlihatkan plot densitas $\text{Gamma}(2, 1)$ dan densitas titik sadel. Terlihat bahwa bentuk pendekatan titik sadel \hat{f} sama dengan f , hanya berbeda dalam konstanta penormalan. Pendekatan Stirling untuk $\Gamma(\theta)$ (lihat [2]) memberikan

$$\hat{\Gamma}(\theta) = \sqrt{2\pi}\theta^{\theta-1/2} \exp(-\theta) \approx \Gamma(\theta), \quad (16)$$

sehingga dapat dilihat

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{\Gamma}(\theta)}{\Gamma(\theta)} f(x). \quad (17)$$

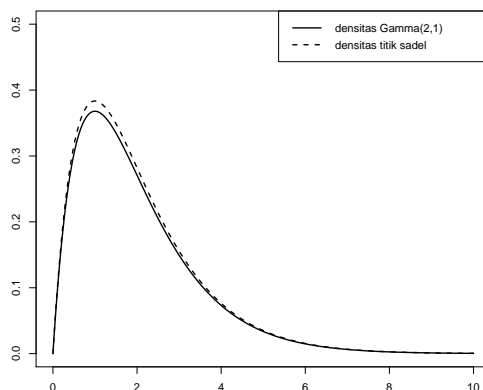


FIG 2. Plot densitas Gamma(2,1) dan pendekatan titik sadel.

3. Beberapa Perkembangan Pendekatan Titik Sadel

3.1. Pendekatan titik sadel untuk rata-rata sampel

Artikel [15] memperkenalkan penggunaan pendekatan titik sadel pada densitas rata-rata sampel untuk peubah acak bebas dan berdistribusi identik X_1, \dots, X_n . Misalkan \bar{X} adalah rata-rata sampel, $\phi_{\bar{X}}(t)$ adalah fungsi pembangkit momen sampel, dan $\psi_{\bar{X}}(t)$ adalah fungsi pembangkit kumulatif sampel. Dengan menerapkan teknik titik sadel pada bagian sebelumnya diperoleh densitas rata-rata sampel sebagai berikut

$$\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) \approx \left(\frac{n}{2\pi\psi''_{\bar{X}}(\hat{t}(\bar{x}))} \right)^{1/2} \exp\{n[\psi_{\bar{X}}(\hat{t}(\bar{x})) - \hat{t}(\bar{x})\bar{x}]\}, \quad (18)$$

dengan $\psi'_{\bar{X}}(\hat{t}(x)) = \bar{x}$.

Contoh 3. Misalkan X_1, \dots, X_n berdistribusi bebas dan identik $N(0, 1)$. Titik sadel tunggal yang menyelesaikan persamaan $\hat{t} = \bar{x}$ memberikan pendekatan

$$\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\right), \quad (19)$$

yang tepat sama dengan densitas eksak dari \bar{X} yaitu $N(0, 1/n)$.

Contoh 4. Misalkan X_1, \dots, X_n berdistribusi bebas dan identik Poisson(θ). Fungsi pembangkit momennya adalah $\phi(t) = \exp[\theta(\exp(t) - 1)]$ dan fungsi pembangkit kumulatifnya adalah $\psi(t) = \theta(\exp(t) - 1)$. Titik sadel tunggal yang menyelesaikan persamaan $\theta \exp(\hat{t}) = \bar{x}$ adalah $\hat{t} = \log(\bar{x}/\theta)$. Dengan demikian diperoleh pendekatan titik sadel

$$\hat{f}_{\bar{X}}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n}} \exp(-n\theta) \frac{\theta^{n\bar{x}}}{\bar{x}^{n\bar{x} + \frac{1}{2}}}. \quad (20)$$

3.2. Pendekatan titik sadel untuk ekor distribusi

Pada banyak aplikasi statistika biasanya yang menjadi daya tarik dalam melakukan inferensi adalah menghitung peluang ekor distribusi (*tail probability*). Sebagai contoh bidang keuangan, ilmu aktuaria, atau kejadian langka (*rare event*) biasanya yang menjadi objek penelitian adalah bagaimana menghitung peluang ekor atau fungsi distribusi kumulatif.

Beberapa pendekatan untuk fungsi distribusi telah dilakukan. Sebagai contoh pendekatan simpangan besar (*large deviation*) dari [6], transformasi Laplace dari deret Edgeworth [33], pendekatan integrasi ruang sampel [36], metode penyesuaian [7], dan metode penurunan tercuram (*method of steepest descent*) [28].

Pada bagian ini akan dibicarakan salah satu pendekatan untuk fungsi distribusi yaitu metode yang diusulkan oleh [28]. Metode ini sering disebut formula Lugannani-Rice atau formula ajaib dalam literatur statistika asimptotik. Formula ini memberikan hasil yang sangat akurat dalam mendekati fungsi distribusi. Ide pendekatan fungsi distribusi yang diusulkan [28] ini adalah sebagai berikut. Pertama, nyatakan pendekatan fungsi distribusi kumulatif sebagai integral kumulatif berhingga dari densitas titik sadel

$$f(x) \approx \left(\frac{1}{2\pi\psi_X''(\hat{t}(x))} \right)^{1/2} \exp[\psi_X(\hat{t}(x)) - \hat{t}(x)x]. \quad (21)$$

Selanjutnya, gunakan pendekatan Temme dengan bentuk

$$\int_{-\infty}^{w_0} h(w)\varphi(w) dw \approx h(0)\Phi(w_0) + \varphi(w_0) \left(\frac{h(0) - h(w_0)}{w_0} \right), \quad (22)$$

dengan Φ dan φ masing-masing menyatakan fungsi distribusi kumulatif dan fungsi densitas normal. Pendekatan terhadap fungsi distribusi kumulatif menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^y f(x) dx &= \int_{-\infty}^y \left(\frac{1}{2\pi\psi_X''(\hat{t}(x))} \right)^{1/2} \exp[\psi_X(\hat{t}(x)) - \hat{t}(x)x] dx \\ &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\psi_X''(\hat{t}(x))} \varphi(\hat{w}) dx, \end{aligned} \quad (23)$$

dengan ketergantungan terhadap \hat{t} dan \hat{w} dikendalikan (lihat [14]). Jadi diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^y \frac{1}{\psi_X''(\hat{t}(x))} \varphi(\hat{w}) dx &= \int_{-\infty}^{\hat{w}} \frac{\hat{w}}{\hat{t}\sqrt{\psi_X''(\hat{t}(x))}} f\varphi(\hat{w}) d\hat{w} \\ &= \Phi(\hat{w}y) + \varphi(\hat{w}y) \frac{1 - h(\hat{w}y)}{\hat{w}y}, \end{aligned} \quad (24)$$

dengan

$$h(0) = \lim_{\hat{t} \rightarrow 0} \frac{\hat{w}}{\hat{t}\sqrt{\psi_X''(\hat{t}(x))}} = 1. \quad (25)$$

Dengan demikian, pendekatan titik sadel untuk fungsi distribusi yang diusulkan oleh [28] adalah

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(\hat{w}) + \varphi(\hat{w}) \left(\frac{1}{\hat{w}} - \frac{1}{\hat{u}} \right), & \text{jika } x \neq \mu; \\ \frac{1}{2} + \frac{\psi_X'''(0)}{6\sqrt{2\pi}(\psi_X''(0))^{3/2}}, & \text{jika } x = \mu; \end{cases} \quad (26)$$

dengan $\hat{w} = \text{sign}(\hat{t})\sqrt{2(\hat{t}x - \psi_X(\hat{t}))}$, $\hat{u} = \hat{t}\sqrt{\psi_X''(\hat{t})}$, dan $\mu = EX$. Untuk proses penurunan untuk pendekatan fungsi distribusi secara lebih rinci dapat dilihat pada [28], [25], [26], dan [14].

3.3. Pendekatan titik sadel untuk distribusi bersyarat

Salah satu pengembangan penting dalam pendekatan titik sadel adalah pendekatan untuk distribusi bersyarat. [34] merampatkan formula Lugannani-Rice untuk distribusi bersyarat berbentuk $\Pr(\bar{Y} \geq y | \bar{X} = x)$ dengan (\bar{X}, \bar{Y}) adalah rata-rata dari n vektor acak bivariat bebas. Ide dari pendekatan ini adalah sebagai berikut. Misalkan $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ adalah peubah-peubah acak bivariat yang berdistribusi identik dan bebas dengan denstias $f(x, y)$ dan fungsi pembangkit kumulan κ yang diberikan oleh

$$\kappa(s, u) = \ln \int \int f(x, y) \exp(sx + uy) du ds, \quad s, u \in \mathbb{C}, \quad (27)$$

yang diasumsikan ada pada persekitaran $(0, 0)$. Misalkan $\bar{X} = n^{-1} \sum X_i$ dan $\bar{Y} = n^{-1} \sum Y_i$ dan tetapkan titik (\tilde{x}, \tilde{y}) . Misalkan turunan kumulan κ dituliskan sebagai berikut

$$\kappa_s(s, u) = \frac{\partial}{\partial s} \kappa(s, u), \quad (28)$$

$$\kappa_u(s, u) = \frac{\partial}{\partial u} \kappa(s, u), \quad (29)$$

$$\kappa_{ss}(s, u) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \kappa(s, u). \quad (30)$$

Selanjutnya, [34] memperoleh pendekatan titik sadel untuk distribusi bersyarat di atas

$$\Pr(\bar{Y} \geq y | \bar{X} = x) \approx 1 - \Phi(\sqrt{n}\tilde{w}) + \varphi(\sqrt{n}\tilde{w}) \left\{ \frac{[\kappa_{ss}(\tilde{s}_0, 0)]^{1/2}}{\sqrt{n}\tilde{u}|\kappa(\tilde{s}, \tilde{u})|^{1/2}} - (\sqrt{n}\tilde{w})^{-1} \right\}, \quad (31)$$

dengan \tilde{s}_0 adalah solusi dari persamaan titik sadel

$$\kappa_s(\tilde{s}_0, 0) = \tilde{x}, \quad \tilde{s}_0 \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

Φ adalah fungsi distribusi kumulatif normal, φ adalah fungsi densitas normal, $|\kappa(\tilde{s}, \tilde{u})|$ adalah determinan dari $\kappa(\tilde{s}, \tilde{u})$, dan

$$\tilde{w} = \text{sign}(\tilde{u}) \{ 2[\tilde{s}\tilde{x} + \tilde{u}\tilde{y} - \kappa(\tilde{s}\tilde{u})] - 2[\tilde{s}_0\tilde{x} - \kappa(\tilde{s}_0, 0)] \}^{1/2}. \quad (33)$$

Beberapa kondisi yang diperlukan untuk pendekatan di atas adalah sebagai berikut (lihat [34]). Pertama, beberapa pangkat positif fungsi karakteristik untuk (X_i, Y_i) adalah terintegralkan. Kedua, fungsi pembangkit kumulatif κ untuk (X_i, Y_i) ada pada persekitaran $(0, 0)$. Ketiga, matriks varians $\kappa(0, 0)$ adalah taksingular.

3.4. Pendekatan titik sadel umum

Pada subbagian sebelumnya telah dibicarakan konsep pendekatan titik sadel dan aplikasinya, terutama untuk rata-rata sampel dan fungsi distribusi. Untuk statistik tertentu, katakanlah V_n , [19] mengusulkan pendekatan titik sadel umum (*general saddle-point approximation*). Pendekatan ini menggunakan keempat kumulatif dari statistik V_n .

Konsep pendekatan titik sadel umum yang diusulkan [19] adalah sebagai berikut. Misalkan X_1, \dots, X_n adalah peubah acak real bebas dan berdistribusi identik dengan fungsi densitas peluang f dan $V_n(X_1, \dots, X_n)$ adalah statistik bernilai real dengan densitas f_n , $\phi_n(t)$ adalah fungsi pembangkit momen, dan $\psi_n(t)$ adalah fungsi pembangkit kumulatif. Anggap fungsi pembangkit momen ada untuk bilangan real t di dalam selang yang taklenyap (*non-vanishing*) yang mengandung titik asal. Misalkan

$$R_n(t) = \frac{\psi_n(nt)}{n}. \quad (34)$$

Selanjutnya akan didekati (34) dengan teknik titik sadel. Anggap ekspansi Edgeworth \tilde{f}_n untuk f_n ada dan meliputi tingkat suku (*order term*) n^{-1} , yaitu,

$$f_n(x) = \tilde{f}_n(x) + o(n^{-1}), \quad (35)$$

dengan

$$\tilde{f}_n(x) = \varphi(x) \left[1 + \frac{\kappa_{3n}}{6}(x^3 - 3x) + \frac{\kappa_{4n}}{24}(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{\kappa_{3n}^2}{72}(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \right] \quad (36)$$

serta κ_{3n} dan κ_{4n} merupakan bilangan-bilangan yang diketahui. Tujuannya adalah untuk mendekati $R_n(t)$ dengan empat kumulatif pertama dengan bentuk

$$\tilde{R}_n(t) = \mu_n t + \frac{n\sigma_n^2 t^2}{2} + \frac{\kappa_{3n}\sigma_n^3 n^2 t^3}{6} + \frac{\kappa_{4n}\sigma_n^4 n^3 t^4}{24}, \quad (37)$$

dengan μ_n adalah rata-rata dari statistik V_n , σ_n^2 adalah varians dari statistik V_n , κ_{3n} dan κ_{4n} masing-masing adalah kumulatif ketiga dan keempat dari statistik V_n . Secara umum μ_n dan σ_n tidak diketahui dengan pasti. Mensubstitusikan μ_n dan σ_n dengan

$$\mu_n = \mu + \frac{a_1}{n} + o(n^{-1}), \quad (38)$$

dan

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{n^{1/2}} + \frac{b_1}{n^{3/2}} + o(n^{-3/2}) \quad (39)$$

tidak mengubah tingkat (*order*) pendekatan [19].

Dengan menggunakan formula inversi pada [20], yaitu,

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{n}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \exp[n(\tilde{R}_n(t) - tx)] dt. \quad (40)$$

dan menerapkan teknik titik sadel pada (40), [19] memperoleh pendekatan titik sadel untuk f_n dengan galat seragam dengan tingkat n^{-1} yang berbentuk

$$\hat{g}_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi \tilde{R}_n''(\hat{t})}} \exp[n(\tilde{R}_n(\hat{t}) - \hat{t}x)], \quad (41)$$

dengan \hat{t} adalah titik sadel yang dihitung sebagai akar dari persamaan

$$\tilde{R}_n'(\hat{t}) = x, \quad (42)$$

dengan $\tilde{R}_n'(t)$ dan $\tilde{R}_n''(t)$ menyatakan turunan pertama dan kedua dari $\tilde{R}_n(t)$.

3.5. Pendekatan titik sadel untuk momen posterior

Dalam inferensi Bayes masalah utama yang biasanya dihadapi adalah menghitung distribusi posterior. Untuk analisis Bayes univariat jika prior yang dipilih adalah prior sekawan (*conjugate prior*), distribusi posteriornya juga biasanya sekawan. Namun, pada banyak aplikasi penggunaan prior sekawan seringkali tidaklah tepat atau terlalu menyederhanakan masalah. Salah satu cara untuk mendekati distribusi posterior adalah dengan pendekatan titik sadel. [37] mengusulkan pendekatan untuk rata-rata dan varians posterior dari fungsi positif dari suatu parameter real atau parameter bernilai vektor. Untuk pendekatan ini kondisi utama yang diperlukan adalah perkalian kemungkinan (*likelihood*) dengan prior bermodus tunggal (*unimodal*).

Ide pendekatan yang diusulkan [37] adalah sebagai berikut. Misalkan h adalah fungsi mulus positif pada ruang parameter. Nilai tengah posterior $h(\theta)$ dapat ditulis sebagai

$$E_n[h] = E[h(\theta)|X^{(n)}] = \frac{\int h(\theta) \exp(\ell(\theta))p(\theta) d\theta}{\int \exp(\ell(\theta))p(\theta) d\theta}, \quad (43)$$

dengan $\ell(\theta)$ adalah fungsi log-kemungkinan dan p adalah densitas prior. Sekarang misalkan $L = \log p + \ell/n$ dan $L^* = \log h + \log p + \ell/n$. Selanjutnya persamaan (43) dapat ditulis sebagai

$$E_n[h] = \frac{\int \exp(nL^*) d\theta}{\int \exp(nL) d\theta}. \quad (44)$$

Kemudian dengan pendekatan Laplace, [37] memperoleh pendekatan untuk (44)

$$\hat{E}_n[h] = (\sigma^*/\sigma) \exp[n(L^*(\hat{\theta}^*) - L(\hat{\theta}))] \quad (45)$$

dengan $\hat{\theta}$ adalah modus dari L , $\sigma^2 = -1/L''(\hat{\theta})$, $\hat{\theta}^*$ adalah modus dari L^* , dan $\sigma^{*2} = -1/L''(\hat{\theta}^*)$. Lebih lanjut [37] mengembangkan pendekatan di atas untuk kasus multiparameter, distribusi peramalan (*predictive distribution*), dan densitas posterior marginal.

4. Aplikasi Pendekatan Titik Sadel

Penelitian dan aplikasi pendekatan titik sadel beragam, baik dalam bidang statistika teoretis maupun terapannya. Berikut ini beberapa contoh pengembangan dan aplikasi pendekatan titik sadel sejak tahun 2000. Untuk ulasan aplikasi titik sadel sampai tahun 2000 silakan lihat [35]. Daftar berikut tidaklah lengkap.

Pada bidang statistika teoretis misalnya dikembangkan pendekatan titik sadel untuk pendekatan konstanta penormalan distribusi Fisher–Bingham [27]; pendekatan ekor atas statistik Bagai [29]; uji kebebasan pada kelas statistik rank [1]; peluang ekor rasio Student [3]; distribusi penduga fungsi eigen matriks kovarians dan korelasi [10]; dan pendekatan distribusi takterpusat t [12].

Pada bidang terapan misalnya pendekatan titik sadel digunakan pada metode estimasi peluang dalam analisis reliabilitas, [17], [40], [39]; bagan kendali nonparametrik berdasarkan statistik Mood [30]; distribusi jumlah klaim total diskonto [22]; pendugaan peluang distribusi peubah demografi dalam penelitian hidupan liar (*wildlife*) [16]; optimisasi jaringan sensor [4],[5]; dan penghitungan risiko portofolio [13].

5. Beberapa Isu Penting dan Solusi untuk Pendekatan Titik Sadel

Pada data yang berisi banyak nol (0) pendekatan titik sadel mungkin tidak akan memberikan hasil yang memuaskan (lihat [18]). Salah satu solusinya adalah dengan melakukan penyesuaian pada fungsi varians pangkat (*power variance function*).

Pendekatan titik sadel umum sebagai pengembangan dari pendekatan titik sadel biasa telah memungkinkan untuk mendekati densitas peluang untuk sembarang statistik V_n . Hal ini tentu saja didukung dengan asumsi hanya menggunakan keempat kumulasi dari statistik dan ekspansi Edgeworth untuk statistik tersebut ada. Sebagaimana diklaim oleh [19] tingkat besaran (*order of magnitude*) pada pendekatan titik sadel umum terjaga (*preserved*). Namun, beberapa masalah muncul. Pertama, beberapa hasil komputasi numerik dalam artikel [19] justru memperlihatkan hasil numerik yang tidak meyakinkan (lihat juga [9]). Masalah kedua yang muncul adalah tidak terdapatnya solusi tunggal pada persamaan titik sadel pada (42). Untuk memperoleh solusi tunggal [38] menyarankan mengganti (37) dengan

$$\tilde{K}_n(t; b) = \kappa_{1n}t + \frac{\kappa_{2n}}{2!}t^2 + \left(\frac{\kappa_{3n}}{3!}t^3 + \frac{\kappa_{4n}}{4!}t^4 \right) g_b(t) \quad (46)$$

dengan $g_b(t) = \exp(-\kappa_{2n}b^2t^2/2n)$ dan $b > 0$ adalah konstanta yang dipilih dengan wajar. Masalah ketiga adalah tidak selalu muncul *full support* [23]. Masalah terakhir yang muncul adalah kinerja pendekatan titik sadel umum yang hanya bagus pada *shrinking neighbourhood* nilai tengah apabila ukuran sampel dinaikkan (lihat [31]). Untuk mengatasi masalah tersebut [31] menyarankan untuk selalu menggunakan fungsi pembangkit momen sebenarnya (jika ada) untuk statistik yang ingin didekati.

6. Kesimpulan

Secara umum pendekatan titik sadel akan memberikan hasil yang sangat akurat karena pendekatan ini memiliki "tingkah laku" seperti densitas peluang. Penggunaan pen-

dekatan titik sadel umum akan lebih bagus apabila diketahui kumulasi dari statistik yang ingin diteliti.

Daftar Pustaka

- [1] Ehab F. Abd-Elfattah. 2009. Testing for Independence: Saddlepoint Approximation to Associated Permutation Distributions. *Electronic Journal of Statistics*. 3: 625–632.
- [2] Milton Abramowitz dan Irene A. Stegun (Editors). 1964. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards. Washington.
- [3] Kingsley Agho, Wen Dai, dan John Robinson. 2005. Empirical Saddlepoint Approximations of the Studentized Ratio and Regression Estimates for Finite Populations. *Statistics and Probability Letters*. 71: 237–247.
- [4] Saeed A. Aldosari dan José M. F. Moura. 2005. Saddlepoint Approximation for Sensor Network Optimization. *ICASSP 2005*. 741–744.
- [5] Saeed A. Aldosari dan José M. F. Moura. 2007. Detection in Sensor Networks: The Saddlepoint Approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 55: 327–340.
- [6] R. R. Bahadur dan R. Ranga Rao. 1960. On deviations of the sample mean. *The Annals of Mathematical Statistics*. 31: 1015–1027.
- [7] O. Barndorff-Nielsen. 1986. Inference on Full or Partial Parameters Based on the Standardized Signed Log Likelihood Ratio. *Biometrika*. 73: 307–322.
- [8] O. Barndorff-Nielsen dan D. R. Cox. 1979. Edgeworth and Saddle-point Approximations with Statistical Applications. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B(Methodological)*. 41: 279–312.
- [9] M. Bogdan. 1994. Asymptotic Distributions of Linear Combinations of Order Statistics. *Applicationes Mathematicae*. 22: 201–225.
- [10] Robert J. Boik. 2005. Second-order Accurate Inference on Eigenvalues of Covariance and Correlation Matrices. *Journal of Multivariate Analysis*. 96: 136–171.
- [11] Alessandra Brazzale, Anthony C. Davison, dan Nancy Reid. 2007. *Applied Asymptotics: Case Studies in Small-sample Statistics*. Cambridge University Press. Cambridge.
- [12] Simon Broda dan Marc S. Paoletta. 2007. Saddlepoint Approximations for the Doubly Noncentral t Distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*. 51: 2907–2918.
- [13] Simon A. Broda dan Marc S. Paoletta. 2009. CHICAGO: A Fast and Accurate Method for Portfolio Risk Calculation. *Journal of Financial Econometrics*. 7: 412–436.
- [14] Ronald W. Butler. 2007. *Saddlepoint Approximations with Applications*. Cambridge University Press. Cambridge.
- [15] H. E. Daniels. 1954. Saddlepoint Approximations in Statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*. 25: 631–650.
- [16] Stephen J. Demaso, Fidel Hernández, Leonard A. Brennan, dan Ralph L. Bingham. 2011. Application of the Simple Saddlepoint Approximation to Estimate

- Probability Distributions in Wildlife Research. *Journal of Wildlife Management*. 75: 740–746.
- [17] Xiaopin Du. 2010. System Reliability Analysis with Saddlepoint Approximation. *Struct. Multidisc. Optim.* 42: 193–208.
- [18] Peter K. Dunn dan Gordon K. Smyth. 2005. Series Evaluation of Tweedie Exponential Dispersion Model Densities. *Statistics and Computing*. 15: 267–280.
- [19] George S. Easton dan Elvezio Ronchetti. 1986. General Saddlepoint Approximations with Application to L Statistics. *Journal of the American Statistical Association*. 81: 420–430.
- [20] William Feller. 1966. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Volume II. John Wiley and Sons. New York.
- [21] Christopher Field and Elvezio Ronchetti. 1990. *Small Sample Asymptotics*. Institute of Mathematical Statistics. California.
- [22] Riccardo Gatto. 2010. A Saddlepoint Approximation to the Distribution of Inhomogenous Discounted Compounded Poisson Processes. *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 12: 533–551.
- [23] Colin S. Gillespie dan Eric Renshaw. 2007. An Improved Saddlepoint Approximation. *Mathematical Biosciences*. 208: 359–374.
- [24] Constantino Goutis dan George Casella. 1999. Explaining the Saddlepoint Approximation. *The American Statistician*. 53: 216–224.
- [25] Jens Ledet Jensen. 1995. *Saddlepoint Approximations*. Oxford University Press. Oxford.
- [26] John E. Kollassa. 2006. *Series Approximation Method in Statistics*. Edisi ketiga. Springer. New York.
- [27] A. Kume dan S. G. Walker. 2009. On the Fisher-Bingham Distribution. *Stat. Comput.* 19: 167–172.
- [28] Robert Lugannani dan Stephen Rice. 1980. Saddle Point Approximation for the Distribution of the Sum of Independent Random Variables. *Advances in Applied Probability*. 12: 475–490.
- [29] Hidetoshi Murakami. 2010. A Numerical Comparison of the Normal and Some Saddlepoint Approximations to a Distribution-Free Test for Stochastic Ordering in the Competing Risks Model. *Comput. Stat.* 25: 633–643.
- [30] Hidetoshi Murakami dan Takashi Matsuki. 2009. A Nonparametric Control Chart based on the Mood Statistic for Dispersion. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 49: 757–763.
- [31] Spiridon Penev dan John Robinson. 2012. On the Validity of the General Saddlepoint Method. Naskah tidak diterbitkan. The University of New South Wales. Australia.
- [32] N. Reid. 1988. Saddlepoint Methods and Statistical Inference. *Statistical Science*. 3: 213–238.
- [33] J. Robinson. 1982. Saddlepoint Approximations for Permutation Tests and Confidence Intervals. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 44: 91–101.
- [34] Ib M. Skovgaard. 1987. Saddlepoint Expansions for Conditional Distributions. *Journal of Applied Probability*. 24: 875–887.

- [35] Robert L. Strawderman. 2000. Higher-order Asymptotic Approximation: Laplace, Saddlepoint, and Related Methods. *Journal of the American Statistical Association*. 95: 1358–1364.
- [36] N. M. Temme. 1982. The Uniform Asymptotic Expansion of a Class of Integrals Related to Cumulative Distribution Functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 13: 239–252.
- [37] Luke Tierney dan Joseph B. Kadane. 1986. Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*. 81: 82–86.
- [38] Suojin Wang. 1992. General Saddlepoint Approximations in the Bootstrap. *Statistics and Probability Letters*. 13: 61–66.
- [39] Ning-Cong Xiao, Hong-Zhong Huang, Zhonglai Wang, Yu Liu, Xiao-Ling Zhang. 2012. Unified Uncertainty Analysis by the Mean Value First Order Saddlepoint Approximation. *Struct. Multidisc. Optim.* 46: 803–812.
- [40] Zhimin Zi, Chao Hu, dan Byeng D. Youn. 2012. A Comparative Study of Probability Estimation Methods for Reliability Analysis. *Struct. Multidisc Optim.* 45: 33–52.