Jurnal Matematika Vol. 10, No.1, Juni 2020, pp. 32-43 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2020.v10.i01.p121

Dimensi Metrik Pada Graf *Starbarbell* dan Hasil Operasi *Edge Corona* Pada Graf *Cycle* dan Graf *Path*

Putri Dea Sari
Universitas Sebelas Maret
e-mail: pdeasari@gmail.com

Tri Atmojo Kusmayadi
Universitas Sebelas Maret
e-mail: tri.atmojo.kusmayadi@staff.uns.ac.id

Abstract: *Let G be a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. Distance between vertex u and v is the shortest path from u to v, denoted by $d(u,v)$. For an ordered set $W \subset V(G)$, W is resolving set of G if every pair of vertices in G are resolved by some vertex of W. Resolving set with minimum cardinality is called metric basis of G. The number of element from some basis in G is called metric dimension, denoted by $\dim(G)$. In this research, we determine the metric dimension of starbarbell graph and edge corona graph $C_m \diamond P_n$. The results show that the metric dimension of starbarbell graph is $\dim(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$; $\dim(C_m \diamond P_n) = 2$ for $n = 1$, $m = 3$, or m even ($m \geq 4$); $\dim(C_m \diamond P_n) = 3$ for $n = 1$ and m odd ($m \geq 5$); $\dim(C_m \diamond P_n) = 2\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ for $m = 3$ and$n \geq 2$; and also $\dim(C_m \diamond P_n) = m\left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ for $m > 3$ and $n \geq 2$.*

Keywords*: metric dimension, resolving set, starbarbell graph, $C_m \diamond P_n$ graph*

Abstrak: *Misal G adalah graf terhubung dengan himpunan vertex $V(G)$ dan himpunan edge $E(G)$. Jarak di antara dua vertex u dan v adalah panjang path terpendek dari u ke v, yang dinyatakan dengan $d(u,v)$. Untuk suatu himpunan terurut $W \subset V(G)$, W adalah himpunan pembeda dari G jika setiap pasang vertex dalam G dibedakan oleh suatu vertex dari W. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik dari G. Banyaknya elemen dari suatu basis dalam G disebut dimensi metrik, dinyatakan dengan $\dim(G)$. Dalam penelitian ini ditentukan dimensi metrik dari graf starbarbell dan graf edge corona $C_m \diamond P_n$. Hasilnya menunjukkan bahwa dimensi metrik dari graf starbarbell adalah $\dim(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$; $\dim(C_m \diamond P_n) = 2$ untuk $n = 1$, $m = 3$, atau m genap ($m \geq 4$); $\dim(C_m \diamond P_n) = 3$ untuk $n = 1$ dan m ganjil ($m \geq 5$); $\dim(C_m \diamond P_n) = 2\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ untuk $m = 3$dan $n \geq 2$; dan juga $\dim(C_m \diamond P_n) = m\left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ untuk $m > 3$ dan $n \geq 2$.*

Kata kunci*: dimensi metrik, himpunan pembeda, graf starbarbell, graf $C_m \diamond P_n$*

1. Pendahuluan

Tahun 1975, konsep dimensi metrik muncul dari himpunan pembeda yang diperkenalkan oleh Slater [9], yang mendefinisikan himpunan pembeda atau *locating set* W sebagai himpunan dari *vertex-vertex* pada suatu graf G sedemikian sehingga untuk setiap *vertex* di G akan dihasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap *vertex* di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda W. Kemudian Harary dan Melter [6] pada tahun 1976 menyebutkan himpunan pembeda sebagai *resolving set*. Hasil operasi *edge corona* dari graf *cycle* dan graf *path* dinotasikan dengan $C_m \diamond P_n$. Graf ini terbentuk dari salinan graf *cycle* C_m dan m salinan graf *path* P_n kemudian menggabungkan dengan dua *vertex* ujung dari $e_i \in E(C_\mathrm{m})$ ke setiap *vertex* $v_j \in V(P_\mathrm{n})$ pada salinan ke-i dengan $i = 1,2,...,m_1$ dan $j = 1, 2, ..., n_2$.

Beberapa peneliti telah menemukan dimensi metrik pada beberapa kelas graf. Tahun 2000, Chartrand *et al.* [5] meneliti dimensi metrik graf *path* P_n, graf *cycle* C_n, dan graf lengkap K_n. Tahun 2005, Caceres *et al.* [3] meneliti dimensi metrik graf *fan*. Tahun 2009, Caceres *et al.* [4] meneliti dimensi metrik pada graf tak hingga. Tahun 2011, Bača *et al.* [1] meneliti dimensi metrik pada graf bipartit k-reguler. Tahun 2016, Kusmayadi *et al.* [8] meneliti dimensi metrik pada graf *sunflower*, graf *t-fold wheel*, dan graf $K_1 + (P_n \odot P_m)$. Widodo [10] menentukan dimensi metrik dari *helm graph* dan *double cones graph.* Hasil penelitian tersebut membuat penulis tertarik untuk mencari dimensi metrik pada kelas graf lain yang belum pernah ditentukan, yaitu dimensi metrik pada graf *starbarbell* dan graf $C_m \diamond P_n$.

2. Metode Penelitian

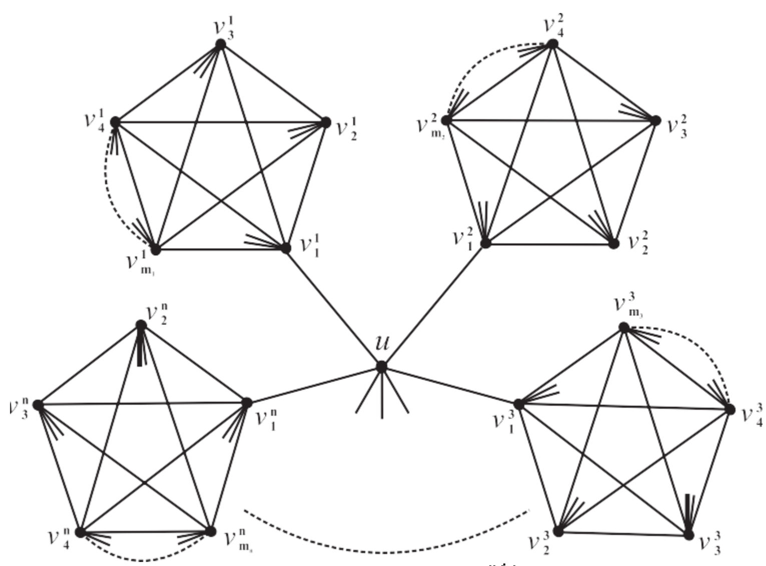
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku, jurnal maupun tulisan-tulisan yang dimuat di situs web. Dari metode ini, dapat ditentukan dimensi metrik pada graf *starbarbell* dan graf $C_m \diamond P_n$. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1) Menentukan himpunan pembeda W pada graf *starbarbell* dan graf $C_m \diamond P_n$.
2) Menghitung jarak setiap *vertex* dengan W yang telah ditentukan, sedemikian sehingga setiap dua *vertex* berbeda pada graf *starbarbell* dan graf $C_m \diamond P_n$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap W.
3) Menentukan dimensi metrik berdasarkan hasil yang diperoleh pada Langkah 2) pada graf *starbarbell* dan graf $C_m \diamond P_n$.
4) Membuat pembuktian dengan menyusun lema dan teorema berdasarkan hasil yang diperoleh.
5) Membuat kesimpulan

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Dimensi Metrik pada Graf *Starbarbell*

Budianto dan Kusmayadi [2] mendefinisikan graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ merupakan graf yang terbentuk dari sebuah graf *star* $K_{1,n}$ dan n graf *lengkap* K_{m_i} kemudian menggabungkan satu *vertex* dari masing-masing K_{m_i} dengan *leaf* ke-i pada $K_{1,n}$ dengan $m_i \geq 3$, $1 \leq i \leq n$, dan $n \geq 2$. Ilustrasi dari graf *starbarbell* dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}$

Lemma 3.1. *Vertex pusat* u *tidak termuat dalam basis manapun pada suatu graf starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}$.

BUKTI. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andai P adalah basis pada graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ yang memuat *vertex* pusat u. Karena $P \setminus \{u\}$ bukan basis, terdapat *vertex* $v, v' \in V(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n})$ sedemikian sehingga $d(v,x) = d(v',x)$ untuk setiap $x \in P \setminus \{u\}$. Jelas bahwa $P = \{u\}$ bukan basis, sehingga $P \setminus \{u\} \neq \emptyset$. Jika tidak berlaku $v = u$ dan $v' = u$ maka $d(v,u) = d(v',u)$ dan P bukan basis pada graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$. Misal diasumsikan $v' = u$ dan tanpa mengurangi keumuman, v adalah *vertex* v_2^2. Pada kasus ini, diperoleh $d(v_2^2,x) = d(u,x)$ untuk setiap $\in P$. Artinya P bukan basis. Sehingga terbukti bahwa *vertex* pusat u tidak termuat dalam basis manapun. □

Teorema 3.2. *Untuk setiap graf starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ *dengan* $m_i \geq 3$ *untuk setiap* $1 \leq i \leq n$ *dan* $n \geq 2$ *berlaku*

$$\dim(SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2).$$

BUKTI. Diberikan graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ dengan $m_i \geq 3$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $n \geq 2$.

i) Akan ditunjukkan bahwa $\dim(SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}) \leq \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$.

Dengan Lema 3.1, dipilih himpunan $W = \{v_j^i\}$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $2 \leq j \leq m_i - 1$. Kardinalitas dari *W* yaitu $\sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$. Diperoleh representasi dari setiap *vertex* pada $SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ terhadap W sebagai berikut

$r(v_1^1|W) = (1,1,\cdots,1,3,3,\cdots,3,\cdots,3,3,\cdots,3),$

$r(v_2^1|W) = (0,1,\cdots,1,4,4,\cdots,4,\cdots,4,4,\cdots,4),$

$\vdots$

$r(v_{m_1}^1|W) = (1,1,\cdots,1,4,4,\cdots,4,\cdots,4,4,\cdots,4),$

$\vdots$

$r(v_1^n|W) = (3,3,\cdots,3,3,3,\cdots,3,\cdots,1,1,\cdots,1),$

$r(v_2^n|W) = (4,4,\cdots,4,4,4,\cdots,4,\cdots,0,1,\cdots,1),$

$\vdots$

$r(v_{m_n}^n|W) = (4,4,\cdots,4,4,4,\cdots,4,\cdots,1,1,\cdots,1),$

$r(u|W) = (2,2,\cdots,2,2,2,\cdots,2,\cdots,2,2,\cdots,2).$

Karena setiap *vertex* mempunyai representasi yang berbeda terhadap *W*, sehingga *W* merupakan himpunan pembeda.

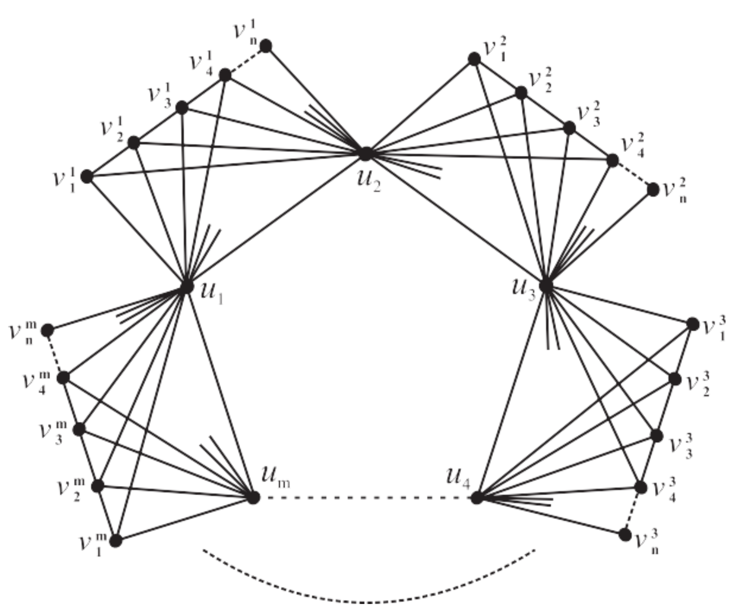
Jurnal Matematika Vol. 10, No.1, Juni 2020, pp. 32-43 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2020.v10.i01.p121

ii) Akan ditunjukkan bahwa $\dim(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}) \geq \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$. Ditunjukkan dengan kontradiksi, andaikan W adalah himpunan pembeda dari graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ dengan $|W| < \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$. Jika dipilih himpunan $W = \{v_x^1, v_z^y\}$ dengan $2 \leq x \leq m_i - 2$, $2 \leq y \leq n$, dan $2 \leq z \leq my - 1$, maka terdapat *vertex* $v_{m1-1}^1, v_{m1}^1 \in V(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n})$ sedemikian sehingga terdapat representasi yang sama yaitu $r(v_{m_1-1}^1|W) = r(v_{m_1}^1|W) = (1,1,\cdots,1,4,4,\cdots,4,\cdots,4,4,\cdots,4)$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian, sehingga $\dim(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}) \geq \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$.

Dari i) dan ii), terbukti bahwa $\dim(SB_{m_1,m_2,\dots,m_n}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2)$. □

3.2 Dimensi Metrik pada Graf $C_m \diamond P_n$

Definisi dari *edge corona* dua buah graf diambil dari Hou and Shiu [7]. Graf $C_m \diamond P_n$ adalah suatu graf yang diperoleh dari hasil operasi *edge corona* graf *cycle* C_m dengan graf *path* P_n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 1$. Ilustrasi graf $C_m \diamond P_n$ dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $C_m \diamond P_n$

Berikut ini diberikan hasil dimensi metrik pada graf $C_m \diamond P_n$.

Lema 3.3. *Vertex* $u_i \in V(C_m)$ *dengan* $1 \leq i \leq m$ *dan* $m \geq 3$ *tidak termuat dalam basis manapun pada graf* $C_m \diamond P_n$.

BUKTI. Dibuktikan dengan kontradiksi. Andai P adalah basis pada graf $C_m \diamond P_n$ yang memuat u_i. Karena $P \backslash \{u_i\}$ bukan basis, terdapat *vertex* $v, v' \in V(C_m \diamond P_n)$ sedemikian sehingga $d(v,x) = d(v',x)$ untuk setiap $x \in P \backslash \{u_i\}$. Jelas bahwa $P = \{u_i\}$ bukan basis, sehingga $P \backslash \{u_i\} \neq \emptyset$. Jika tidak berlaku $v = u_i$ dan $v' = u_i$ maka $d(v,u_i) = d(v', u_i)$ dan P bukan basis pada graf $C_m \diamond P_n$.. Misal diasumsikan $v' = u_i$ dan tanpa mengurangi keumuman, v adalah *vertex* v_2^i. Pada kasus ini, diperoleh $d(v_2^i, x) = d(u_i, x)$ untuk setiap $x \in P$. Artinya P bukan basis. Sehingga terbukti bahwa *vertex* u_i dengan $1 \leq i \leq m$ tidak termuat dalam basis manapun. □

Teorema 3.4. *Untuk setiap graf* $C_m \diamond P_n$ *dengan* $m \geq 3$ *dan* $n \geq 1$ *berlaku*

$$\dim(C_m \diamond P_n) = \begin{cases} 2, & m = 3 \vee genap\ (m \geq 4), n = 1; \\ 3, & m\ ganjil\ (m \geq 5), n = 1; \\ 2\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil, & m = 3, n \geq 2; \\ m\left\lceil \frac{2n-2}{5} \right\rceil, & m > 3, n \geq 2. \end{cases}$$

BUKTI Pembuktian rumus umum dimensi metrik pada graf $C_m \diamond P_n$ terbagi menjadi empat kasus sebagai berikut.

Kasus 1. $m = 3$ atau m genap $(m \geq 4)$, $n = 1$.

1. Misalkan m bilangan bulat, $m = 3$. Pilih $W = \{v_1^1, v_1^2\} \subset V(P_1)$, diperoleh representasi semua *vertex* $V(C_3 \diamond P_1)$ terhadap W sebagai berikut

$$r(u_1|W) = (1,2), \quad r(u_3|W) = (2,1), \quad r(v_1^2|W) = (2,0),$$
$$r(u_2|W) = (1,1), \quad r(v_1^1|W) = (0,2), \quad r(v_1^3|W) = (2,2).$$

2. Untuk m genap ($m \geq 4$) dan $n = 1$.

Misalkan m bilangan bulat genap $m \geq 4$. Pilih $W = \{v_1^1, v_1^{\frac{m}{2}}\} \subset V(P_1)$, diperoleh representasi semua *vertex* $V(C_m \diamond P_1)$ terhadap W sebagai berikut

Jurnal Matematika Vol. 10, No.1, Juni 2020, pp. 32-43 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2020.v10.i01.p121

$$r(u_i|W) = \begin{cases} \left(1, \frac{m}{2}\right), & i = 1; \\ \left(\frac{m}{2}, 1\right), & i = \frac{m+2}{2}; \\ \left(i-1, \frac{m}{2}+1-i\right), & 2 \le i \le \frac{m}{2}; \\ \left(m+2-i, i-\frac{m}{2}\right), & \frac{m+4}{2} \le i \le m; \end{cases}$$

$$r(v_1^i|W) = \begin{cases} \left(0, \frac{m}{2}\right), & i = 1; \\ \left(i, \frac{m}{2}+1\right), & 2 \le i \le \frac{m-2}{2}; \\ \left(i-1, \frac{m}{2}+1-i\right), & i = \frac{m}{2}; \\ \left(2-i+m, 1+i-\frac{m}{2}\right), & \frac{m+2}{2} \le i \le m. \end{cases}$$

Dari 1 dan 2, setiap *vertex* $V(C_3 \diamond P_1)$ dan $V(C_m \diamond P_n)$ dengan m genap ($m \ge 4$) dan $n = 1$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W maka W adalah himpunan pembeda dengan 2 elemen. Berdasarkan karakterisasi dari Chartrand *et al.* [5] yang menyatakan $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n (n \ge 2)$, karena $C_3 \diamond P_1 \neq P_n (n \ge 2)$ maka diperoleh $dim(C_3 \diamond P_1) = 2$. Hal ini berlaku pula untuk $C_m \diamond P_n$ dengan m genap ($m \ge 4$) dan $n = 1$. □

Kasus 2. m ganjil $(m \ge 5)$, $n = 1$.

Misalkan m bilangan bulat, $m \ge 5$. Pilih $W = \{v_1^m, v_1^1, v_1^{\frac{m-2}{2}}\} \subset V(P_n)$, diperoleh representasi semua *vertex* $V(C_m \diamond P_n)$ terhadap W sebagai berikut

$$r(u_i|W) = \begin{cases} \left(1,1, \frac{m-1}{2}\right), & i = 1; \\ \left(i, i-1, \frac{m+1}{2}-i\right), & 2 \le i \le \frac{m-1}{2}; \\ (i, i-1, 1), & i = \frac{m+1}{2}; \\ \left(m+1-i, m+2-i, i-\frac{m-1}{2}\right), & \frac{m+3}{2} \le i \le m; \end{cases}$$

1. Untuk $m = 5$.

$$r(v_1^i|W) = \begin{cases} (2,0,2), & i = 1; \\ (3,2,0), & i = 2; \\ \left(m - i + 1, m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, i - 1\right), & i = 3,4; \\ (0,2,3), & i = 5. \end{cases}$$

2. Untuk $m > 5$.

$$r(v_1^i|W) = \begin{cases} (2,0,2), & i = 1; \\ (3,2,0), & i = 2; \\ (i+1, i, i-1), & 3 \le i \le \frac{m-1}{2}; \\ \left(m - i + 1, m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, i - 1\right), & \frac{m+1}{2} \le i \le \frac{m+3}{2}; \\ (m-i+1, m-i+2, m-i+3), & \frac{m+5}{2} \le i \le m-1; \\ (0,2,3), & i = m. \end{cases}$$

Setiap *vertex* $V(C_m \diamond P_n)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W maka W adalah himpunan pembeda dengan 3 elemen. Selanjutnya ditunjukkan $C_m \diamond P_n$ tidak memiliki himpunan pembeda dengan 2 elemen. Andaikan $C_m \diamond P_n$ memiliki himpunan pembeda W dengan 2 elemen, terdapat 3 kemungkinan pemilihan *vertex* dari W . Akan tetapi, berdasarkan Lema 3.3 *vertex* $u_i \in V(C_m)$ dengan $1 \le i \le m$ dan $m \ge 3$ tidak termuat dalam basis manapun sehingga $W \subset V(P_n)$. Sehingga hanya ada 1 kemungkinan pemilihan *vertex* dari *W* yaitu kedua *vertex* dari *W* termasuk dalam $\{v_1^m : 1 \le m \le n\} \subset V(P_1)$

Misalkan salah satu *vertex* dalam *W* adalah v_1^1 dan *vertex* lainnya adalah v_1^s, dengan ($2 \le s \le m$). Diperoleh representasi yang sama yaitu

$r(u_m|W) = r(v_1^m|W) = (2, s+1), 2 \le s \le \frac{m-1}{2}$;

$r(u_{m-1}|W) = r(v_1^3|W) = (3, s-2), s = \frac{m+1}{2}$;

$r(u_{m-1}|W) = r(v_1^4|W) = (3, s-2), s = \frac{m+3}{2}$; dan

$r(u_3|W) = r(v_1^2|W) = (2, m-s+2), \frac{m-5}{2} \le s \le m$.

Untuk $W = \{v_1^t, v_1^s\}$, dengan $2 \le t < s \le m$, selalu diperoleh dua *vertex* $V(C_m \diamond P_n)$ yang memiliki representasi sama terhadap W . Hal ini kontradiksi

Jurnal Matematika Vol. 10, No.1, Juni 2020, pp. 32-43 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2020.v10.i01.p121

dengan pengandaian. Diperoleh representasi yang sama terhadap W. Oleh karena itu, $V(C_m \diamond P_n)$ tidak memiliki himpunan pembeda dengan 2 elemen. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari $V(C_m \diamond P_n)$ adalah 3 elemen, sehingga terbukti $dim(C_m \diamond P_n) = 3$, untuk m ganjil $(m \geq 5)$ dan $n = 1$. □

Kasus 3. $m = 3$ dan $n \geq 2$.

Graf $C_m \diamond P_n$ dengan $m = 3$ dan $n \geq 2$ mempunyai himpunan *vertex* $V(C_m \diamond P_n) = \{u_1, u_2, u_3, v_1^1, v_2^1, \ldots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \ldots, v_n^3\}$. Berdasarkan Lema 3.2, *vertex* $u_i \in V(C_m)$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $m \geq 3$ tidak termuat dalam basis manapun sehingga $W \subset V(P_n)$. Pembuktian dibagi menjadi 2 bagian yaitu untuk *path* P_s dengan $s = 1,2$ dan *path* P_i dengan $i = 3$

1. *Path* P_s dengan $s = 1,2$.
   (a) Satu dari dua *vertex* v_1^s, v_2^s dengan $s = 1,2$ merupakan elemen W. Jika $v_1^s, v_2^s \notin W$ maka $d(v_1^s, u_p) = d(v_2^s, u_p) = 1$ dan $d(v_1^s, v_q^p) = d(v_2^s, v_q^p) = 2$ dengan $p = 2,3$ dan $q = 1,2$ sehingga $r(v_1^s|W) = r(v_2^s|W)$. Dipilih *vertex* v_2^s.
   (b) Jika setiap *vertex* $v_3^s, v_4^s, v_5^s \notin W$ maka $r(v_1^s|W) = r(v_3^s|W)$ dan $r(v_4^s|W) = r(v_5^s|W)$. Sehingga salah satu dari ketiga *vertex* tersebut merupakan elemen W. Misal dipilih $v_3^s \in W$, terdapat dua *vertex* dengan representasi sama yaitu $r(v_5^s|W) = r(v_1^s|W)$. Jika dipilih $v_5^s \in W$ maka $r(v_1^s|W) = r(v_3^s|W)$. Sehingga $v_3^s, v_5^s \notin W$, dipilih $v_4^s \in W$.
   (c) Dari (a) dan (b), jika W himpunan pembeda maka setidaknya terdapat 2 elemen dari setiap 5 *vertex*. Tanpa mengurangi keumuman misal dipilih $n = 9$, terdapat 4 elemen W. Jika dipilih $v_2^s, v_4^s, v_7^s, v_9^s \in W$ maka diperoleh 2 pasang *vertex* dengan representasi berbeda terhadap W sehingga *vertex* tesebut merupakan elemen W. Pada *path* P_s, *vertex* v_n^s dengan $n \equiv 1,3 (mod\ 5)$ harus menambahkan *vertex* $v_{n_{max}}^s$ ke dalam elemen W. Jika $v_{n_{max}}^s \notin W$ maka
   (d) $r(v_{n_{max}}^1|W) = r(v_{n_{max}}^2|W)$.

   Dari (a), (b), dan (c) diperoleh pengambilan $W = \{v_{2+5p}^s, v_{4+5r}^s\}$ dengan $p = 0,1, \cdots, \lceil\frac{n-5}{5}\rceil$ dan $r = 0,1, \cdots, \lceil\frac{n-7}{5}\rceil$. Jika terdapat $v_{2+5\lceil\frac{n-5}{5}\rceil}^s = v_{n+1}^s$ atau

$v^s_{4+5\lceil\frac{n-7}{5}\rceil} = v^s_{n+1}$ maka $v^s_{n_{max}}$ elemen W. Akibatnya kardinalitas pada *path* P_s adalah $2\left(\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil\right) = 2\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil$.

2. *Path* P_i dengan $i = 3$.

(a) Jika setiap *vertex* $v^i_1, v^i_2, v^i_3 \notin W$ maka $r(v^i_1|W) = r(v^i_2|W) = r(v^i_3|W)$. Sehingga salah satu dari ketiga *vertex* tersebut adalah elemen W. Misal dipilih $v^i_1 \in W$, terdapat dua *vertex* dengan representasi sama yaitu $r(v^i_2|W) = r(v^i_3|W)$. Sama halnya jika dipilih $v^i_2 \in W$ maka $r(v^i_1|W) = r(v^i_3|W)$. Sehingga $v^i_1, v^i_2 \notin W$, dipilih $v^i_3 \in W$.

(b) Jika setiap *vertex* $v^i_4, v^i_5 \notin W$ maka $r(v^i_4|W) = r(v^i_5|W)$. Sehingga salah satu dari kedua *vertex* tersebut adalah elemen W. Dipilih $v^i_4 \in W$, terdapat dua *vertex* dengan representasi sama yaitu $r(v^i_1|W) = r(v^i_6|W)$. Berarti $v^i_4 \notin W$, sehingga dipilih $v^i_5 \in W$.

(c) Dari (a) dan (b), terdapat setidaknya 2 elemen himpunan pembeda W dari setiap 5 *vertex*. Tanpa mengurangi keumuman misal dipilih $n = 10$, terdapat 4 elemen W. Jika dipilih $v^i_3, v^i_5, v^i_8, v^i_{10} \in W$. Diperoleh 2 pasang *vertex* dengan representasi berbeda terhadap W sehingga *vertex* tesebut merupakan elemen W. Pada *path* P_i, *vertex* v^i_n dengan $n \equiv 2,4(mod\ 5)$ harus menambahkan *vertex* $v^i_{n_{max}}$ ke dalam elemen W. Jika $v^i_{n_{max}} \notin W$ maka $r(v^i_{n_{max}}|W) = r(v^i_{n_{max}-2}|W)$.

Dari (a), (b), dan (c) diperoleh pengambilan $W = \{v^i_{3+5p}, v^i_{5r}\}$ dengan $p = 0,1,\cdots,\lceil\frac{n-6}{5}\rceil$ dan $r = 1,2,\cdots,\lceil\frac{n-3}{5}\rceil$. Jika terdapat $v^i_{3+5\lceil\frac{n-6}{5}\rceil} = v^i_{n+1}$ atau $v^i_{5\lceil\frac{n-8}{5}\rceil} = v^i_{n+1}$ maka $v^i_{n_{max}}$ elemen W. Akibatnya kardinalitas pada *path* P_i adalah $\left\lceil\frac{n-1}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{n-3}{5}\right\rceil = \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$.

Dari 1 dan 2 berakibat kardinalitas dari W adalah jumlahan dari kardinalitas W pada kedua *path* yaitu P_s dan P_i. Diperoleh kardinalitas dari W adalah $2\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$. Sehingga $\dim(C_3 \circ P_{\varpi}) = 2\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ untuk $n \geq 2$. □

Jurnal Matematika Vol. 10, No.1, Juni 2020, pp. 32-43 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2020.v10.i01.p121

Kasus 4. $m > 3$ dan $n \geq 2$.

Graf $C_m \diamond P_n$ dengan $m > 3$ dan $n \geq 2$ mempunyai himpunan *vertex* $V(C_m \diamond P_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, v^1_1, v^1_2, \ldots, v^1_n, v^2_1, v^2_2, \ldots, v^2_n, v^3_1, v^3_2, \ldots, v^m_n\}$. Misal dipilih suatu himpunan tak kosong $W \subset V(P_n)$. Analog dengan Kasus 3 poin 2, untuk *path* P_i dengan $1 \leq i \leq m$, diperoleh pula pengambilan $W = \{v^i_{3+5p}, v^i_{5r}\}$ dengan $p = 0,1,\cdots,\lceil\frac{n-6}{5}\rceil$ dan $r = 1,2,\cdots,\lceil\frac{n-3}{5}\rceil$. Jika terdapat $v^i_{3+5\lceil\frac{n-6}{5}\rceil} = v^i_{n+1}$ atau $v^i_{5\lceil\frac{n-3}{5}\rceil} = v^i_{n+1}$ maka $v^i_{n_{max}}$ elemen W . Terdapat m *copy* graf P_n pada $C_m \diamond P_n$. Sebanyak $\left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ *vertex* pada setiap *copy* dari graf P_n merupakan elemen W. Akibatnya kardinalitas W adalah $m\left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$. Sehingga terbukti bahwa $\dim(C_m \diamond P_n) = m\left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil$ untuk $m > 3$ dan $n \geq 2$. □

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik pada graf *starbarbell* $SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ adalah

$$\dim\left(SB_{m_1,m_2,\ldots,m_n}\right) = \sum_{i=1}^{n}(m_i - 2).$$

Dimensi metrik pada graf $C_m \diamond P_n$ adalah

$$\dim(C_m \diamond P_n) = \begin{cases} 2, & m = 3 \vee genap\ (m \geq 4), n = 1; \\ 3, & m\ ganjil\ (m \geq 5), n = 1; \\ 2\left\lceil\frac{2n}{5}\right\rceil + \left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil, & m = 3, n \geq 2; \\ m\left\lceil\frac{2n-2}{5}\right\rceil, & m > 3, n \geq 2. \end{cases}$$

Saran yang diberikan adalah untuk menentukan dimensi metrik pada kelas graf yang belum pernah diteliti, misalnya graf *king* dan hasil operasi *edge corona* pada graf *path* dan graf lengkap.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih atas dukungan dana penelitian anggaran tahun 2019 dari Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Surakarta, Indonesia.

Daftar Pustaka

[1] Bača M, Baskoro E T, Salman A N M, Saputro S W and Suprijanti D, *The metric dimension of regular bipartite graphs*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome **54**, 15-28, 2011.

[2] Budianto W T and Kusmayadi T A, *The local metric dimension of starbarbell graph, $K_m \odot P_n$ graph, and Möbius ladder graph*, J. Phys.: Conf. Ser. **1008**, 012050, 2018.

[3] Caceres J, Hernando C, Mora M, Pelayo I M, Puertas M L and Seara C, *On the metric dimension of some families of graphs*, Electronic Notes in Discrete Math. **22**, 129-133, 2005.

[4] Caceres J, Hernando C, Mora M, Pelayo I M and Puertas M L, *On the metric dimension of infinite graphs*, Electronic Notes in Discrete Math. **35**, 1-17, 2009.

[5] Chartrand G, Eroh L, Johnson M and Oellermann O, *Resolvability in graphs and the metric dimension of graph*, Discrete Appl. Math **105**, 98-113, 2000.

[6] Harary F and Melter R A, *On the metric dimension of a graph*, Ars Combinatoria **2,** 191-195, 1976.

[7] Hou Y and Shiu W, *The spectrum of the edge corona of two graphs*, Electronic Journal of Linear Algebra **20,** 586-594, 2010.

[8] Kusmayadi T A, Kuntari S, Fikri A F, Rahmadi D and Pradana H C, *The metric dimension of sunflower, t-fold wheel, and $K_1 + (P_n \odot P_m)$*, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) **99,** 687-698, 2016.

[9] Slater P J, *Dominating and reference sets in a graph*, J. Math. Phys. Sci. **22,** 445-455, 1988.

[10] Widodo B J, Kusmayadi T A and Kuntari S, *Metric dimension of helm graph and double cones graph*, AIP Conference Proceedings **1746,** 020049, 2016.

.