

Radikal Prima Bi-Ideal Dalam Semiring Ternari

Ratna Sari Widiastuti

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Udayana
e-mail: ratnasariwidiastuti@unud.ac.id

Abstract: *A ternary semiring is an additive commutative semigroup with a ternary multiplication which satisfying some condition. This paper will be discuss about prime bi-ideal radikal in semiring ternary with definition and some theorem. If B is a bi-ideal in semiring ternary T , then radical prime bi-ideal of B in semiring ternary T is an intersection of all prime bi-ideal in semiring ternary T which containing B .*

Keywords: *bi-ideal, radikal prima, semiring ternary*

1. Pendahuluan

Struktur ring apabila digeneralisasi dengan memperlemah grup komutatif atas operasi biner penjumlahan menjadi semigrup komutatif atas operasi biner penjumlahan biasa dan struktur semigrup terhadap perkalian biasa dipertahankan, maka terbentuk struktur baru yang selanjutnya disebut semiring. Hal ini dapat dilihat pada himpunan \mathbb{Z}^+ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian biasa. Sementara itu fenomena semiring ternari dapat dilihat pada himpunan semua bilangan bulat negatif yang disertai operasi penjumlahan biasa dan operasi perkalian biasa. Himpunan semua bilangan bulat negatif jika dikenakan pada operasi perkalian biasa tidak termuat kembali ke dalam himpunan semua bilangan bulat negatif, tetapi termuat dalam himpunan semua bilangan bulat positif. Namun, apabila himpunan semua bilangan bulat negatif dikenakan pada operasi ternary perkalian biasa membentuk struktur semigrup. Selanjutnya, himpunan semua bilangan bulat negatif berlaku sifat distributif kiri, sifat distributif kanan dan sifat distributif tengah penjumlahan terhadap operasi ternary perkalian. Dari sini dapat dimengerti bahwa himpunan semua bilangan bulat negatif merupakan semiring ternari.

Subsemigrup penjumlahan dari semiring ternari yang memenuhi syarat tertentu disebut sebagai ideal dari semiring ternari. Beberapa jenis ideal dalam semiring ternari adalah ideal prima, ideal prima lengkap, ideal semiprima dan ideal semiprima lengkap. Jika A ideal dari semiring ternari T , maka irisan semua ideal prima dari T yang memuat A disebut radikal prima [8]. Selanjutnya, suatu ternari subsemiring pada suatu semiring ternari disebut bi-ideal jika memenuhi syarat tertentu. Himpunan semua bilangan bulat genap negatif merupakan contoh dari bi-ideal dalam semiring ternari himpunan semua bilangan bulat negatif.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana membangun struktur radikal prima pada bi-ideal. Selain itu diselidiki sifat-sifat yang ada pada radikal prima pada bi-ideal dalam semiring ternari.

2. Dasar Teori

Pertama diberikan definisi mengenai semiring ternari.

Definisi 2.1.[4] Himpunan tak kosong T dengan operasi biner penjumlahan dan ternary perkalian disebut semiring ternari jika T merupakan semigrup komutatif terhadap penjumlahan dan memenuhi:

$$(1) (abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$$

$$(2) (a + b)cd = acd + bcd$$

$$(3) a(b + c)d = abd + acd$$

$$(4) ab(c + d) = abc + abd$$

untuk setiap $a, b, c, d, e \in T$.

Himpunan $T = \{0\}$ dengan operasi biner penjumlahan yang didefinisikan sebagai $0 + 0 = 0$ dan ternary perkalian $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ merupakan semiring ternari. Semiring ternari ini disebut semiring ternari *null* atau semiring ternari *zero*[5].

Jika A, B, C merupakan himpunan bagian dari semiring ternari T , maka himpunan ABC didefinisikan sebagai berikut:

$$ABC := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \mid a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dan himpunan $A + B$ didefinisikan sebagai berikut:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Definisi 2.2. [4] Semiring ternari T disebut semiring ternari komutatif jika $abc = bca = cab = bac = cba = acb$ untuk setiap $a, b, c \in T$.

Definisi 2.3. [2] Subsemigrup penjumlahan S pada ternary semiring T disebut subsemiring ternari jika $s_1 s_2 s_3 \in S$ untuk setiap $s_1, s_2, s_3 \in S$.

Definisi 2.4. [6] Himpunan bagian tak kosong A dari semiring ternari T disebut ideal kanan (lateral/kiri) dari T jika:

$$(1) \text{ Untuk setiap } a, b \in A \text{ berlaku } a + b \in A.$$

$$(2) \text{ Untuk setiap } b, c \in T \text{ dan untuk setiap } a \in A \text{ berlaku } abc \text{ (} bac/bca \text{)} \in A.$$

Definisi 2.5.[6] Himpunan bagian tak kosong A dari semiring ternari T disebut ideal dua sisi dari T jika:

$$(1) \text{ Untuk setiap } a, b \in A \text{ berlaku } a + b \in A.$$

$$(2) \text{ Untuk setiap } b, c \in T \text{ dan untuk setiap } a \in A \text{ berlaku } abc, bca \in A.$$

Definisi 2.6. [6] Himpunan bagian tak kosong A dari semiring ternari T disebut ideal dari T jika:

$$(1) \text{ Untuk setiap } a, b \in A \text{ berlaku } a + b \in A.$$

(2) Untuk setiap $b, c \in T$ dan untuk setiap $a \in A$ berlaku $abc, bac, bca \in A$.

Himpunan A ideal dari semiring ternari T dinotasikan dengan $A \leq T$.

Diberikan semiring ternari T dan $\emptyset \neq S \subseteq T$. Didefinisikan $\mathcal{S} = \{A | A \leq T, S \subseteq A\}$.
Dibentuk

$$\langle S \rangle = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Teorema 2.7. [8] Himpunan $\langle S \rangle$ merupakan ideal terkecil dari semiring ternari T yang memuat S .

Definisi 2.8. Diberikan semiring ternari T dan himpunan bagian tak kosong $S \subseteq T$. Ideal $\langle S \rangle$ disebut ideal yang dibangun oleh S .

Teorema 2.9. [4] Jika T semiring ternari dan $a \in T$, maka

$$\langle a \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{n_i} p_i q_i a + \sum_{j=0}^{n_j} a r_j s_j + \sum_{k=0}^{n_k} t_k a u_k + \sum_{l=0}^{n_l} v_l w_l a x_l y_l + na \right\}$$

$p_i, q_i, r_j, s_j, t_k, u_k, v_l, w_l, x_l, y_l \in T, n_i, n_j, n_k, n_l, n \in \mathbb{Z}^+$

dengan Σ menyatakan suatu jumlahan berhingga.

Definisi 2.10. [4] Diberikan semiring ternari T dan $a \in T$. Ideal $\langle a \rangle$ disebut ideal utama dari semiring ternari T .

Definisi 2.11.[6] Ideal A dari semiring ternari T disebut ideal prima lengkap dari T jika memenuhi $x, y, z \in T$ dan $xyz \in A$ maka $x \in A$ atau $y \in A$ atau $z \in A$.

Definisi 2.12. [6] Ideal A dari semiring ternari T disebut ideal prima dari T jika X, Y, Z merupakan ideal dari T dan $XYZ \subseteq A$, berlaku $X \subseteq A$ atau $Y \subseteq A$ atau $Z \subseteq A$.

Teorema 2.13. [6] Setiap ideal prima lengkap dari semiring ternari T merupakan ideal prima dari T .

Teorema 2.14. [6] Diberikan T semiring ternari komutatif. Ideal A dari T merupakan ideal prima jika dan hanya jika A merupakan ideal prima lengkap.

Definisi 2.15.[6] Ideal A dari semiring ternari T disebut ideal semiprima lengkap jika $x \in T$ sedemikian hingga $x^n \in A$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ ganjil lebih besar dari satu, maka berlaku $x \in A$.

Teorema 2.16.[6] Setiap ideal prima lengkap dari semiring ternari T merupakan ideal semiprima lengkap dari T .

Jika S merupakan himpunan bagian dari semiring ternari T , maka himpunan S^n , untuk $n \in \mathbb{N}$ ganjil lebih besar dari satu didefinisikan sebagai berikut:

$$S^n = \underbrace{S \cdot S \cdots S}_{n \text{ faktor}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i \cdot y_i \cdots z_i}_{n \text{ faktor}} \mid x_i, y_i, z_i \in S, n \in \mathbb{N} \text{ ganjil lebih besar satu} \right\}$$

Definisi 2.17. [6] *Ideal A dari semiring ternari T disebut ideal semiprima jika X ideal dari T sedemikian sehingga $X^n \subseteq A$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ ganjil, berlaku $X \subseteq A$.*

Sifat 2.18. [6] *Irisan dari semua ideal semiprima dari semiring ternari merupakan ideal semiprima.*

Teorema 2.19. [6] *Setiap ideal semiprima lengkap dari semiring ternari T merupakan ideal semiprima dari T .*

Teorema 2.20.[6] *Diberikan semiring ternari komutatif T . Ideal A dari T merupakan ideal semiprima lengkap jika dan hanya jika A merupakan ideal semiprima.*

Definisi 2.21 [2] *Suatu ternari subsemiring B pada semiring ternari S disebut bi-ideal dalam S jika $BSBSB \subseteq B$.*

Proposisi 2.22 [3] *Misalkan R , M , dan L merupakan tiga ternari subsemiring dari suatu semiring ternari S dan $B = RML$. Maka B adalah suatu bi-ideal dari S jika sedikitnya salah satu dari R , M , atau L merupakan ideal kanan, ideal lateral, atau ideal kiri dari S .*

Akibat 2.23[3] *R adalah ideal kanan, M adalah ideal lateral dan L adalah ideal kiri dari semiring ternari S . Maka suatu ternari subsemiring B dari semiring ternari S merupakan suatu bi-ideal dari S jika $B = RML$.*

Definisi 2.24 [1] *Bi-ideal B disebut bi-ideal prima jika X, Y, Z bi-ideal dalam semiring ternari T , $XYZ \subseteq B$ berakibat $X \subseteq B$ atau $Y \subseteq B$ atau $Z \subseteq B$*

Sifat 2.25 *Setiap ideal dalam semiring ternari merupakan bi-ideal dalam semiring ternari.*

Contoh 2.26

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & l \end{pmatrix} \mid k, l \in \mathbb{Z}^- \right\}$$

A merupakan bi-ideal tetapi bukan ideal dalam semiring ternari \mathbb{Z}^- .

3. Hasil dan Pembahasan

Definisi 3.1 Diberikan B bi-ideal dari semiring ternari T . Radikal Prima Bi-ideal dalam semiring ternari T merupakan irisan dari semua bi-ideal prima dalam semiring ternari T yang memuat B .

Notasi : \sqrt{B}_b

Diberikan semiring ternari T dan B merupakan bi-ideal dari semiring ternari T . Berikut diberikan notasi-notasi untuk mempermudah pembuktian teorema-teorema selanjutnya.

$B_1 =$ irisan semua bi-ideal prima dari T yang memuat B .

$B_2 = \{x \in T \mid \langle x \rangle^n \subseteq B, \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{N} \text{ ganjil}\}$.

Teorema 3.2. Jika B merupakan suatu bi-ideal dari semiring ternari T , maka $B \subseteq B_2 \subseteq B_1$.

Bukti :

$B \subseteq B_2$.

Misalkan $b \in B$. Maka $\langle b \rangle \subseteq B$ dan $b \in B_2$. Diperoleh $B \subseteq B_2$.

$B_2 \subseteq B_1$.

Misalkan $b \in B_2$. Maka $\langle b \rangle^n \subseteq B$ untuk suatu bilangan asli ganjil n . Misalkan P sebarang bi-ideal prima dari T yang memuat B . Maka $\langle b \rangle^n \subseteq B$ untuk suatu bilangan asli ganjil n , mengakibatkan $\langle b \rangle^n \subseteq P$. Karena P bi-ideal prima, $\langle b \rangle \subseteq P$ dan $b \in P$. Karena benar untuk setiap bi-ideal prima P yang memuat B , $b \in B_1$. Diperoleh $B_2 \subseteq B_1$. ■

Teorema 3.3. Jika A, B, C sebarang tiga bi-ideal dari semiring ternary T , maka

(i) $A \subseteq B$, maka $\sqrt{A}_b \subseteq \sqrt{B}_b$.

(ii) Jika $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, maka $\sqrt{ABC}_b = \sqrt{A \cap B \cap C}_b = \sqrt{A}_b \cap \sqrt{B}_b \cap \sqrt{C}_b$.

(iii) $\sqrt{\sqrt{A}_b}_b = \sqrt{A}_b$.

Bukti :

(i) Misalkan $A \subseteq B$. Jika P bi-ideal prima yang memuat B , maka P bi-ideal prima yang memuat A . Oleh karena itu, $\sqrt{A}_b \subseteq \sqrt{B}_b$.

(ii) Misalkan P bi-ideal prima yang memuat ABC . Maka $ABC \subseteq P$ dan berlaku $A \subseteq P$ or $B \subseteq P$ or $C \subseteq P$. Oleh karena itu $A \cap B \cap C \subseteq P$. Jadi, P bi-ideal prima yang memuat $A \cap B \cap C$. Diperoleh bahwa $\sqrt{A \cap B \cap C}_b \subseteq \sqrt{ABC}_b$. Misalkan P bi-ideal prima yang memuat $A \cap B \cap C$. Maka $A \cap B \cap C \subseteq P$. Karena $ABC \subseteq A \cap B \cap C \subseteq P$, $ABC \subseteq P$. Sehingga P bi-ideal prima yang memuat ABC . Diperoleh $\sqrt{ABC}_b \subseteq \sqrt{A \cap B \cap C}_b$. Jadi, $\sqrt{ABC}_b = \sqrt{A \cap B \cap C}_b$.

Karena $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, maka $A \cap B \cap C$ bi-ideal dari T . Misalkan $x \in \sqrt{A \cap B \cap C}_b$. Maka terdapat bilangan asli ganjil n sedemikian sehingga $x^n \in A \cap B \cap C$. Diperoleh $x^n \in A$, $x^n \in B$, dan $x^n \in C$. Sehingga $x \in \sqrt{A}_b$, $x \in \sqrt{B}_b$, dan $x \in \sqrt{C}_b$. Diperoleh $x \in \sqrt{A}_b \cap \sqrt{B}_b \cap \sqrt{C}_b$.

\sqrt{C}_b . Sebaliknya, misalkan $x \in \sqrt{A}_b \cap \sqrt{B}_b \cap \sqrt{C}_b$, berakibat terdapat bilangan asli ganjil n, m, p sedemikian sehingga $x^n \in A$, $x^m \in B$ dan $x^p \in C$. Jelas $x^{nmp} \in A \cap B \cap C$. Sehingga $x \in \sqrt{A \cap B \cap C}_b$. Diperoleh jika $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, maka $\sqrt{A \cap B \cap C}_b = \sqrt{A}_b \cap \sqrt{B}_b \cap \sqrt{C}_b$.

(iii) . Himpunan \sqrt{A}_b irisan dari semua bi-ideal prima dari T memuat A . Kemudian, $\sqrt{\sqrt{A}_b}$ merupakan irisan dari semua bi-ideal prima dari T memuat \sqrt{A}_b , berakibat irisan dari semua bi-ideal prima dari T memuat A adalah \sqrt{A}_b . Diperoleh $\sqrt{\sqrt{A}_b} = \sqrt{A}_b$. ■

Teorema 3.4. *Jika B bi-ideal prima dari semiring ternari T , maka $\sqrt{B^n}_b = B$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ganjil.*

Bukti :

Diberikan B merupakan bi-ideal prima dari semiring ternari T . Dengan menggunakan induksi pada n , akan ditunjukkan $\sqrt{B^n}_b = B$. Untuk $n = 1$ dan karena B bi-ideal prima, maka $B \subseteq \sqrt{B}_b \subseteq B$, sehingga diperoleh $\sqrt{B}_b = B$. Lebih lanjut, diasumsikan $\sqrt{B^k}_b = B$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ ganjil lebih besar satu. Kemudian,

$$\begin{aligned} \sqrt{B^{k+2}}_b &= \sqrt{B^k B B}_b \\ &= \sqrt{B^k}_b \cap \sqrt{B}_b \cap \sqrt{B}_b \\ &= B \cap \sqrt{B}_b \cap \sqrt{B}_b \\ &= B \end{aligned}$$

Diperoleh $\sqrt{B^{k+2}}_b = B$. Dengan induksi terbukti bahwa $\sqrt{B^n}_b = B$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ganjil. ■

4. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan dari penelitian ini adalah radikal prima bi-ideal dalam semiring ternari merupakan irisan dari semua bi-ideal prima dalam semiring ternari yang memuat bi-ideal prima tersebut. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengkontruksi radikal prima dalam bi-ideal minimal dengan menggunakan semua irisan dari bi-ideal minimal dari suatu semiring ternari.

Daftar Pustaka

[1] Dheena P. dan Elavarasan B., 2007. Prime Bi-ideals in Ternary Semiring. *Journal of the Indian Math. Soc.* Vol. 74(3-4), hal: 221-227.

- [2] Dubey M.K. dan Anuradha. 2012. On Minimal Bi-ideal in Ternary Semirings. *International Journal of Algebra*, Vol. 6(4), hal: 15-22.
- [3] Kar S., 2005. On quasi-ideals and bi-ideals in ternari semirings, *International Journal Mathematics Sciences*, Vol. 18, hal: 3015-3023.
- [4] Rao, D.M. and Rao, G.S., 2014, A Study on Ternary Semirings, *International Journal of Mathematical Archive*, 5, pp. 24-30.
- [5] Rao, D.M. and Rao, G.S., 2015, Prime Radicals and Completely Prime Radicals in Ternary Semirings, *International Journal of Basic Sciences and Applied Computing*, 1, pp. 1-5.
- [6] Rao, D.M. and Rao, G.S., 2015, Structure of Certain Bi-ideals in Ternary Semirings, *International Journal of Innovative Science and Modern Engineering (IJISME)*, 3, pp. 49-56.
- [7] Widiastuti, Ratna Sari, 2012, Bi-ideal Minimal dalam Semiring Ternary, Skripsi Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Brawijaya.
- [8] Widiastuti, Ratna Sari, 2016, Radikal Prima dan Radikal Prima Lengkap dalam Semiring Ternary, Tesis Program Studi S2 Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada.