

Analisis Stabilitas Model SIR (*Susceptibles, Infected, Recovered*) Pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Provinsi Maluku

Zeth Arthur Leleury

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Email: zetharthur82@gmail.com

Yopi Andry Lesnussa

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura
Email: yopi_a_lesnussa@yahoo.com

Johan Bruiyf Bension

Fakultas Kedokteran Universitas Pattimura
Email: hutagalung_joe@yahoo.com

Yulia S. Kakisina

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Pattimura

ABSTRACT

*Abstract: Health is an investment to support economic development and has an important role in efforts to reduce poverty and improve the quality of human resources. One of the diseases that often become serious problem in health sector that is Dengue Hemorrhagic Fever (DHF). In Indonesia, many mosquitoes cause dangerous DHF such as *Aedes aegypti*, *Aedes albopictus*, *Aedes africanus*, *anopheles* and others. In this study, we analyzed and applied SIR (Susceptible, Infection, Recovered) mathematical models and their interpolation to determine whether a contagious disease (DHF) can become endemic or not. Therefore, in this study aimed to determine the a special form of model of SIR to analyze the spread of DHF in Maluku Province and the stability analysis of this model and also interpolating the data of DHF transmission in Maluku Province. Furthermore, it can be obtained the characteristics of equilibrium point of each sub population. Based on the research conducted it can be concluded that from the entire population of Maluku Province is 1.686.469 vulnerable people infected with DHF and endemic disease with the basic reproduction value is 3,44.*

Keywords: *Dengue Hemorrhagic Fever (DHF), SIR Model, Interpolation*

1. Pendahuluan

Pembangunan kesehatan harus dipandang sebagai suatu investasi untuk meningkatkan kualitas sumber daya manusia. Dalam pengukuran Indeks Pembangunan Manusia (IPM), kesehatan adalah salah satu komponen utama selain pendidikan dan pendapatan. Dalam Undang-undang Nomor 23 tahun 1992 tentang Kesehatan

ditetapkan bahwa kesehatan adalah keadaan sejahtera dari badan, jiwa dan sosial yang memungkinkan setiap orang hidup produktif secara social dan ekonomi. Kondisi pembangunan kesehatan secara umum dapat dilihat dari status kesehatan dan gizi masyarakat, yaitu angka kematian bayi, kematian ibu melahirkan, prevalensi gizi kurang dan umur angka harapan hidup. Kondisi umum kesehatan dipengaruhi oleh berbagai factor yaitu lingkungan, perilaku, dan pelayanan kesehatan. Dari factor inilah muncul masalah kesehatan, yaitu penyakit. Tak terkecuali di Indonesia, banyak sekali penyakit yang muncul baik menular maupun tidak menular. Salah satunya demam berdarah. Penyakit demam berdarah merupakan salah satu masalah kesehatan di Indonesia dengan kematian terbesar yang dapat muncul kapan saja untuk sepanjang tahun dan dapat pula menyerang mulai dari balita hingga yang berusia lanjut. Penyakit ini merupakan bentuk infeksi dengue yang disertai dengan manifestasi perdarahan dari ringan sampai berat [1].

Demam Berdarah Dengue (DBD) selalu meningkat pada setiap awal musim hujan. Di Indonesia banyak hidup nyamuk yang berbahaya diantaranya *Aedes aegypti*, *Aedes albopictus*, *Aedes africanus*, *Anopheles* dan lainnya. Namun *Aedes aegypti* yang paling berbahaya dan banyak ditemukan disekitar lingkungan. Nyamuk ini yang merupakan penyebab penyakit demam berdarah dengue. Tak terkecuali di Provinsi Maluku, penyebaran penyakit ini sudah meluas ke berbagai kabupaten di Provinsi Maluku. Banyak cara dilakukan salah satunya karena mensosialisasikan dan membuat kesepakatan dengan kabupaten/kota tentang penanggulangan kasus dan penyakit yang berpotensi ini. Penyebaran penyakit DBD yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis. Model epidemic merupakan model yang cocok untuk penyebaran penyakit ini. Model epidemic membagi populasi menjadi populasi *susceptible* (rentan), populasi *infected* (terinfeksi) dan populasi *recovered* (sembuh)[2].

Untuk mengetahui apakah suatu penyakit menular dapat menjadi endemic atau tidak, dikenal beberapa model penyebaran penyakit baik model yang bersifat deterministic maupun yang bersifat stokastik, salah satunya model SIR. Dari model ini akan terbentuk suatu persamaan differensial. Persamaan itu digunakan untuk mengetahui titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya. Berdasarkan uraian diatas maka pada penelitian ini akan menerapkan analisis stabilitas pada penyebaran penyakit DBD di Provinsi dengan model epidemic SIR.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik dan Dinas Kesehatan Provinsi Maluku, serta beberapa literatur yang berhubungan dengan penyebaran penyakit DBD dan model SIR. Adapun langkah-langkah yang ditempuh dalam penelitian ini yaitu: 1. Pengumpulan data penyebaran

penyakit DBD di Provinsi Maluku, 2. Menganalisis model Matematika SIR yang berkaitan dengan data penyebaran., 3. Menghitung nilai-nilai parameter yang diperoleh dari data, 4. Mendapatkan bentuk khusus Model Matematika SIR untuk kasus penyebaran DBD di Provinsi Maluku, 5. Menganalisis kedinamikan/analisis stabilitas dari model (menghitung titik stasioner, matriks jacobian dan nilai eigen) untuk mendapatkan titik kesetimbangan, 6. Menghitung nilai Bilangan Reproduksi Dasar, 7. Melakukan interpolasi dan simulasi untuk mendapatkan trayektori dari setiap variable sehingga dapat dilihat karakteristiknya.

3. Hasil dan Pembahasan

Data Penderita DBD di Provinsi Maluku

Demam Berdarah Dengue (DBD) merupakan salah satu penyakit yang berbahaya di Indonesia. Secara Nasional di beberapa Provinsi di Indonesia, pasien DBD cukup tinggi dan ditetapkan sebagai Kejadian Luar Biasa (KLB), namun Provinsi Maluku sendiri tidak termasuk. Untuk mencegah penyebaran DBD agar tidak semakin meluas, Dinas Kesehatan Provinsi Maluku di masing-masing kabupaten telah melakukan sosialisasi kepada warga setempat mengenai cara pencegahan yang tepat. Di bawah ini merupakan data penderita DBD di Provinsi Maluku perbulan dari tahun 2010 - 2015.

Tabel 1. Data Jumlah Penderita DBD di Provinsi Maluku Tahun 2010-2015

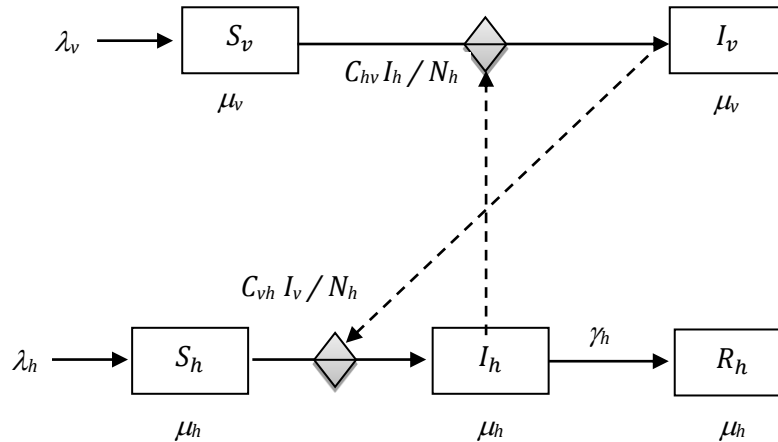
Tahun \ Bulan	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Januari	1	10	24	1	4	4
Februari	3	6	54	3	0	9
Maret	2	13	44	12	2	6
April	2	5	16	7	1	0
Mei	2	4	16	3	1	2
Juni	1	1	5	2	0	3
Juli	0	3	4	2	0	0
Agustus	1	3	11	2	2	2
September	0	0	4	0	0	1
Oktober	0	0	0	1	0	5
November	0	0	0	1	0	17
Desember	0	0	0	0	1	34

Sumber: *Dinas Kesehatan Provinsi Maluku 2016.*

Model SIR DBD dan Parameter

a. Model SIR Penyebaran Penyakit DBD

Dibawah ini bagan penyebaran penyakit DBD [2]



Gambar 1. Model SIR penyebaran penyakit DBD

Dari bagan (kompartmen) diatas dapat dibentuk formulasi untuk model SIR Penyebaran penyakit DBD, sebagai berikut :

Model Matematika Populasi Manusia

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - (\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h}) S_h \quad (1)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{c_{vh} I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h \quad (2)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = p S_h + \gamma_h I_h - \mu_h R_h \quad (3)$$

Model Matematika Populasi Nyamuk

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - (\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h}) S_v \quad (4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{c_{hv} I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v \quad (5)$$

$$S_h + I_h + R_h = N_h \text{ dan } S_v + I_v = N_v$$

Keterangan :

S_v : populasi nyamuk yang rentan terinfeksi

I_v : populasi nyamuk yang terinfeksi

S_h : populasi manusia yang rentan terinfeksi

I_h : populasi manusia yang terinfeksi

R_h : populasi manusia yang sembuh

N_h : total populasi manusia

- N_v : total populasi nyamuk
- λ_h : laju kelahiran manusia
- λ_v : laju kelahiran nyamuk
- μ_h : laju kematian manusia
- μ_v : laju kematian nyamuk
- p : fraksi acak manusia rentan imunisasi
- γ_h : proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh
- C_{hv} : peluang terjadinya kontak antara nyamuk rentan dengan manusia terinfeksi
- C_{vh} : peluang terjadinya kontak antara nyamuk terinfeksi dengan manusia rentan

b. Populasi Manusia

Populasi manusia dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu manusia rentan (*susceptible*), manusia terinfeksi (*infected*), dan manusia sembuh (*recovered*). Manusia rentan adalah manusia yang bukan imun dan belum tertular virus dengue. Manusia terinfeksi adalah manusia yang telah tertular virus dan dapat menularkan virus tersebut. Manusia sembuh dianggap tidak dapat tertular lagi. Nyamuk rentan adalah nyamuk yang belum tertular virus.

Laju kelahiran (λ_h) dapat dihitung berdasarkan angka kelahiran bayi yang lahir per tahun. Angka kelahiran bayi di Provinsi Maluku pada tahun 2015 yaitu 39.393 bayi. Jadi rata-rata kelahiran bayi perbulan adalah 3282 (Badan Pusat Statistik, 2015). Sedangkan untuk laju kematian (μ_h) dapat dihitung berdasarkan angka harapan hidup Provinsi Maluku. Menurut data dari Badan Pusat Statistik Provinsi Maluku, angka harapan hidup provinsi Maluku adalah 68 tahun. Jadi laju kematian manusia adalah:

$$\begin{aligned}\mu_h &= \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} \\ &= \frac{1}{68 \text{ tahun}} = \frac{1}{816 \text{ bulan}} \\ &= 0,00122/\text{bulan}\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk proporsi perpindahan manusia rentan ke manusia terinfeksi dipengaruhi oleh peluang kontak antara nyamuk terinfeksi dan manusia rentan (C_{hv}). Nilai peluang ini diperoleh dengan mengalikan nilai peluang transmisi virus dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan (p_{vh}) dengan rata-rata gigitan nyamuk terinfeksi (b_i). Dengan nilai transmisi virus dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan (p_{hv}) dan nilai transmisi virus dari manusia terinfeksi ke nyamuk (p_{vh}) adalah 0,75 [3], sedangkan nilai parameter lainnya dapat dilihat pada tabel 2.

Tabel 2. Nilai Parameter Gigitan Nyamuk dan Kontak Nyamuk dan Manusia

Parameter	Notasi	Nilai
Gigitan nyamuk rentan perhari	b_i	1 gigitan
Gigitan nyamuk terinfeksi perhari	b_s	0,5 gigitan
Kontak antara nyamuk rentan dengan manusia terinfeksi	C_{hv}	22,5
Kontak antara nyamuk terinfeksi dengan manusia rentan	C_{vh}	11,25

Selanjutnya pada tahun 2015 jumlah penduduk Provinsi Maluku yang sembuh dari penyakit DBD yaitu 78 jiwa (Dinas Kesehatan Provinsi Maluku, 2015). Dengan rata-rata masa infektivitas untuk penyakit DBD pada manusia adalah 4 hari = 0.133/bulan. Sehingga proporsi perpindahan manusia terinfeksi ke manusia sembuh

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \frac{1}{\text{masa infektivitas}} \\ &= \frac{1}{0.133 \text{ bulan}} = 7.52/\text{bulan} \end{aligned}$$

Data jumlah populasi nyamuk *Aedes aegypti* (N_v) di Provinsi Maluku tidak tersedia, sehingga diasumsikan jumlah nyamuk *Aedes aegypti* di Provinsi Maluku pada tahun 2015 didasarkan pada asumsi jumlah larva di Provinsi Maluku sekitar 30 ekor. Jadi jumlah nyamuk *Aedes aegypti*:

$$\begin{aligned} N_v &= \text{Jumlah larva (bulan)} \times \text{jumlah kecamatan} \times \text{jumlah bulan} \\ &= 30 \text{ ekor} \times 58 \times 12 \text{ bulan} \\ &= 20.880 \text{ ekor} \end{aligned}$$

Sehingga probabilitas penularan nyamuk ke manusia adalah:

$$\begin{aligned} \beta_{vh} &= \frac{R_h}{N_v \times D_h} \\ &= \frac{78}{20.880 \times 0.133 \text{ bulan}} \\ &= 0,02808/\text{bulan} \end{aligned}$$

c. Populasi Nyamuk

Populasi nyamuk dibagi atas dua subpopulasi, yaitu nyamuk rentan dan nyamuk terinfeksi. Nyamuk rentan adalah nyamuk yang belum tertular virus sedangkan nyamuk terinfeksi adalah nyamuk yang telah tertular dan dapat menularkan virus tersebut. Nyamuk *Aedes aegypti* merupakan vektor utama penyebab DBD. Dengan umur nyamuk *Aedes aegypti* adalah 2 minggu, tetapi sebagian dapat hidup 2-3 bulan. Jadi rata-ratanya adalah 5,5 minggu [4]. Berdasarkan Aryunita [5], melakukan penelitian di Kecamatan

Patrang ditemukan larva *Aedes aegypti* 81 ekor perbulannya. Karena di Provinsi Maluku jumlah data tidak tersedia dan penyakit karena *Aedes aegypti* masuk kategori aman sehingga diasumsikan bahwa jumlah rata-rata larva 30 perbulannya. Karena terdapat 58 kecamatan di Provinsi Maluku sehingga jumlah larva nyamuk *Aedes aegypti* di Provinsi Maluku diasumsikan sebanyak 1740 ekor perbulan. Dengan laju kematian pada nyamuk (μ_v) dapat dihitung dari angka harapan hidup nyamuk.

$$\begin{aligned}\mu_v &= \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} \\ &= \frac{1}{38,5 \text{ hari}} = \frac{1}{1,28 \text{ bulan}} \\ &= 0,78/\text{bulan}\end{aligned}$$

Jumlah populasi manusia (N_h) di Provinsi Maluku pada tahun 2015 adalah 1.686.469 jiwa (Badan Pusat Statistik, 2015). Biasanya nyamuk menggigit manusia dimulai dari 08.00 – 12.00 di pagi hari dan pukul 15.00 – 17.00 pada sore hari. Dalam sehari ada 142 ekor nyamuk yang menggigit manusia (Dinas Kesehatan Provinsi Maluku). Jadi $R_v = 142$ ekor. Masa hidup untuk nyamuk adalah 26 hari atau 0,866 bulan. Jadi peluang penularan dari manusia terinfeksi ke nyamuk.

$$\begin{aligned}\beta_{hv} &= \frac{R_v}{N_h \times D_v} \\ &= \frac{142}{1.686.469 \times 0.866 \text{ bulan}} \\ &= 0,000097/\text{bulan}\end{aligned}$$

Sehingga model epidemik SIR DBD Provinsi Maluku dapat ditulis dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang ada ke dalam persamaan (1), (2), (3), (4) dan (5), sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = 0,00122 \times 1.686.469 - \left(0,00122 + 0,75 + \frac{22,5I_v}{1.686.469}\right)S_h \quad (6)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{22,5I_v}{1.686.469}S_h - (0,00122 + 7,52)I_h \quad (7)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = 0,75S_h + 7,52I_h - 0,00122R_h \quad (8)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = 0,78 \times 20.880 - \left(0,78 + \frac{11,25I_h}{1.686.469}\right)S_v \quad (9)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{11,25I_h}{1.686.469}S_v - 0,78I_v \quad (10)$$

Dengan $S_h(0) = 1.686.308, I_h(0) = 83, R_h = 78$
 $S_v(0) = 19.140, I_v(0) = 1.740$

Titik Keseimbangan Model Epidemik DBD

Untuk titik keseimbangan dari suatu penyakit DBD diperoleh pada saat *steady state* atau jika $\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dI_h}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0, \frac{dI_v}{dt} = 0$. Titik keseimbangan bebas penyakit diperoleh jika $I_h = 0$ dan $I_v = 0$, sedangkan titik keseimbangan endemik diperoleh jika $I_h \neq 0$ dan $I_v \neq 0$.

a. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit Model Epidemik DBD

Jika $I_v = 0$ maka semua nyamuk masuk ke populasi manusia rentan dan tidak ada nyamuk yang terinfeksi. Artinya tidak ada nyamuk yang dapat menularkan penyakit. Jika $I_h = 0$ maka semua manusia masuk ke populasi rentan dan sembuh serta tidak ada manusia yang terinfeksi dan tidak ada manusia yang dapat menularkan penyakit.

Untuk $\frac{dS_v}{dt} = 0$, didapat :

$$\mu_v N_v - \left(\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h} \right) S_v = 0 \quad \text{maka} \quad S_v = N_v$$

Untuk $\frac{dS_h}{dt} = 0$, didapat :

$$\mu_h N_h - \left(\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h} \right) S_h = 0 \quad \text{maka} \quad S_h = \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p}$$

Sehingga diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit dari model epidemik DBD adalah $E^0 = (S_{v0}, I_{v0}, S_{h0}, I_{h0}) = (N_v, 0, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p}, 0)$.

b. Titik Keseimbangan Endemik Model Epidemik DBD

Jika $I_v \neq 0$ akan diperoleh ada nyamuk yang terinfeksi DBD dan dapat menyebabkan endemik. Jika $I_h \neq 0$ maka akan diperoleh ada manusia yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit serta menyebabkan endemik. Titik keseimbangan endemik $E^1 = (S_{v1}, I_{v1}, S_{h1}, I_{h1})$ adalah sebagai berikut

Untuk $\frac{dS_v}{dt} = 0$, didapat :

$$\mu_v N_v - \left(\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h} \right) S_v = 0 \quad \text{maka} \quad S_v = \frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h}}$$

Untuk $\frac{dI_v}{dt} = 0$, didapat :

$$\frac{c_{hv} I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v = 0 \quad \text{maka} \quad I_v = \frac{c_{hv} I_h}{N_h \mu_v} S_v$$

Untuk $\frac{dS_h}{dt} = 0$, didapat :

$$\mu_h N_h - \left(\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h} \right) S_h = 0 \quad \text{maka} \quad S_h = \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h}}$$

Untuk $\frac{dI_h}{dt} = 0$, didapat :

$$\frac{c_{vh} I_v}{N_h} S_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h = 0 \quad \text{maka} \quad I_h = \frac{c_{vh} I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)}$$

Sehingga diperoleh titik endemik model epidemik DBD:

$$E^1 = \left(\frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h}}, \frac{c_{hv} I_h}{N_h \mu_v} S_v, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h}}, \frac{c_{vh} I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right)$$

Analisis Kestabilan Sistem

Setelah diperoleh titik kesetimbangan, selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit. Dari menggunakan persamaan (1), (2), (4) dan (5) dengan melakukan proses linerisasi maka diperoleh:

$$f(S_v, I_v, S_h, I_h) = \mu_v N_v - \left(\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h} \right) S_v \quad (11)$$

$$g(S_v, I_v, S_h, I_h) = \frac{c_{hv} I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v \quad (12)$$

$$h(S_v, I_v, S_h, I_h) = \mu_h N_h - \left(\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h} \right) S_h \quad (13)$$

$$i(S_v, I_v, S_h, I_h) = \frac{c_{vh} I_v}{N_h} S_h - ((\mu_h + \gamma_h) I_h) \quad (14)$$

Persamaan (11) sampai dengan (14) dilinearisasikan dan hasil dari linearisasi merupakan matriks Jacobian J dengan mencari turunan masing-masing fungsi.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S_v} & \frac{\partial f}{\partial I_v} & \frac{\partial f}{\partial S_h} & \frac{\partial f}{\partial I_h} \\ \frac{\partial g}{\partial S_v} & \frac{\partial g}{\partial I_v} & \frac{\partial g}{\partial S_h} & \frac{\partial g}{\partial I_h} \\ \frac{\partial h}{\partial S_v} & \frac{\partial h}{\partial I_v} & \frac{\partial h}{\partial S_h} & \frac{\partial h}{\partial I_h} \\ \frac{\partial i}{\partial S_v} & \frac{\partial i}{\partial I_v} & \frac{\partial i}{\partial S_h} & \frac{\partial i}{\partial I_h} \end{bmatrix}$$

Kemudian hasil turunan masing-masing fungsi disubstitusikan ke matriks Jacobian J sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\mu_v + \frac{c_{hv}I_h}{N_h}\right) & 0 & 0 & -\frac{c_{hv}S_v}{N_h} \\ \frac{c_{hv}I_h}{N_h} & -\mu_v & 0 & \frac{c_{hv}S_v}{N_h} \\ 0 & -\frac{c_{vh}S_h}{N_h} & -\left(\mu_h + p + \frac{c_{vh}I_v}{N_h}\right)S_h & 0 \\ 0 & \frac{c_{vh}S_h}{N_h} & \frac{c_{vh}I_v}{N_h} & -(\mu_h + \gamma_h) \end{bmatrix}$$

Karena titik kesetimbangan bebas penyakit $E^0 = \left(N_v, 0, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p}, 0\right)$ maka nilai titik kesetimbangan penyakit disubstitusikan ke matriks Jacobian J sehingga diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -\left(\mu_v + \frac{c_{hv}0}{N_h}\right) & 0 & 0 & -\frac{c_{hv}N_v}{N_h} \\ \frac{c_{hv}0}{N_h} & -\mu_v & 0 & \frac{c_{hv}N_v}{N_h} \\ 0 & -\frac{c_{vh}S_h}{N_h} & -\left(\mu_h + p + \frac{c_{vh}0}{N_h}\right)S_h & 0 \\ 0 & \frac{c_{vh}S_h}{N_h} & \frac{c_{vh}0}{N_h} & -(\mu_h + \gamma_h) \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen λ matriks Jacobian yang berukuran 4×4 dituliskan sebagai

$$(\lambda I - J) = 0 \tag{15}$$

Dengan I adalah matriks identitas. Agar λ mempunyai nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan (15). Persamaan (15) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - J) = 0 \tag{16}$$

Persamaan (16) adalah polinom karakteristik J . Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobian adalah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu_v & 0 & 0 & -\frac{c_{hv}N_v}{N_h} \\ 0 & \lambda + \mu_v & 0 & \frac{c_{hv}N_v}{N_h} \\ 0 & \frac{c_{vh}S_h}{N_h} & \lambda + (\mu_h + p) & 0 \\ 0 & -\frac{c_{vh}S_h}{N_h} & 0 & \lambda + (\mu_h + \gamma_h) \end{vmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut:

$$\lambda^4 + \lambda^3(2\mu_h + \gamma_h + 2\mu_v + p) + \lambda^2(\mu_v^2 + \mu_h^2 + 4\mu_v\mu_h + 2\mu_v\gamma_h + \mu_h\gamma_h + p\mu_h + p\gamma_h + 2p\mu_h) + \lambda(2\mu_h\mu_v\gamma_h + 2p\mu_v\mu_h + 2p\mu_v\gamma_h + 2\mu_h^2\mu_v + 2\mu_h\mu_v^2 + \mu_v^2\gamma_h + \mu_v^2p) + \mu_v^2\mu_h^2 + \mu_v^2\mu_h\gamma_h + \mu_v^2p\mu_h + \mu_v^2p\gamma_h = 0$$

Selanjutnya, analisis kestabilan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*.

Misalkan:

$$a = 2\mu_h + \gamma_h + 2\mu_v + p$$

$$b = \mu_v^2 + \mu_h^2 + 4\mu_v\mu_h + 2\mu_v\gamma_h + \mu_h\gamma_h + p\mu_h + p\gamma_h + 2p\mu_h$$

$$c = 2\mu_h\mu_v\gamma_h + 2p\mu_v\mu_h + 2p\mu_v\gamma_h + 2\mu_h^2\mu_v + 2\mu_h\mu_v^2 + \mu_v^2\gamma_h + \mu_v^2p$$

$$d = \mu_v^2\mu_h^2 + \mu_v^2\mu_h\gamma_h + \mu_v^2p\mu_h + \mu_v^2p\gamma_h$$

Sehingga dapat diperoleh tabel *Routh* seperti berikut

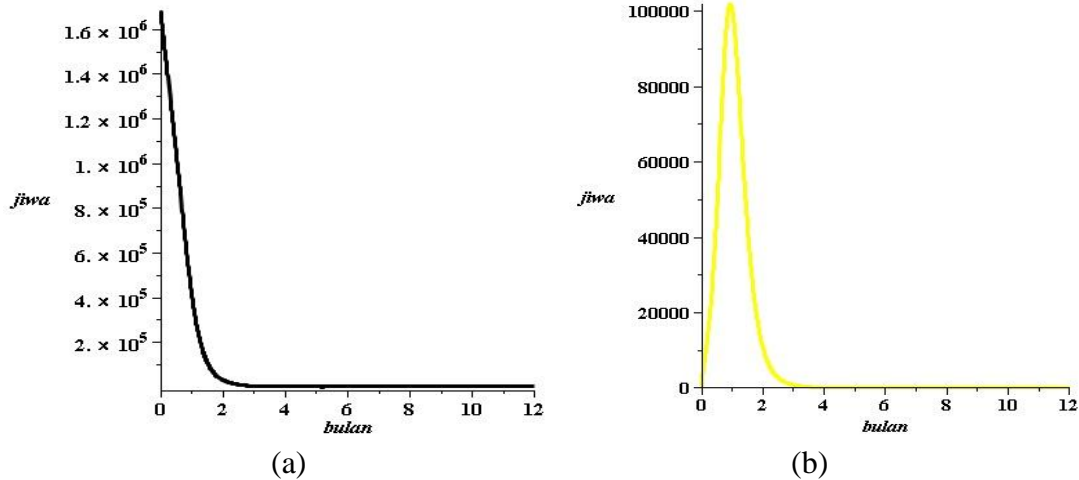
Table 3. *Routh-Hurwitz*

λ^4	1	b	D
λ^3	A	c	0
λ^2	$\frac{ab - c}{a}$	$\frac{ad}{a} = d$	
λ^1	$\frac{\left(\frac{ab - c}{a}\right)c - ad}{\frac{ab - c}{a}} = c - \frac{a^2d}{ab - c}$		
λ^0	D		

Karena semua suku positif maka sistem tersebut stabil dan didapat bilangan reproduksi dasar $R_0 = \mu_v^2\mu_h^2 + \mu_v^2\mu_h\gamma_h + \mu_v^2p\mu_h + \mu_v^2p\gamma_h$

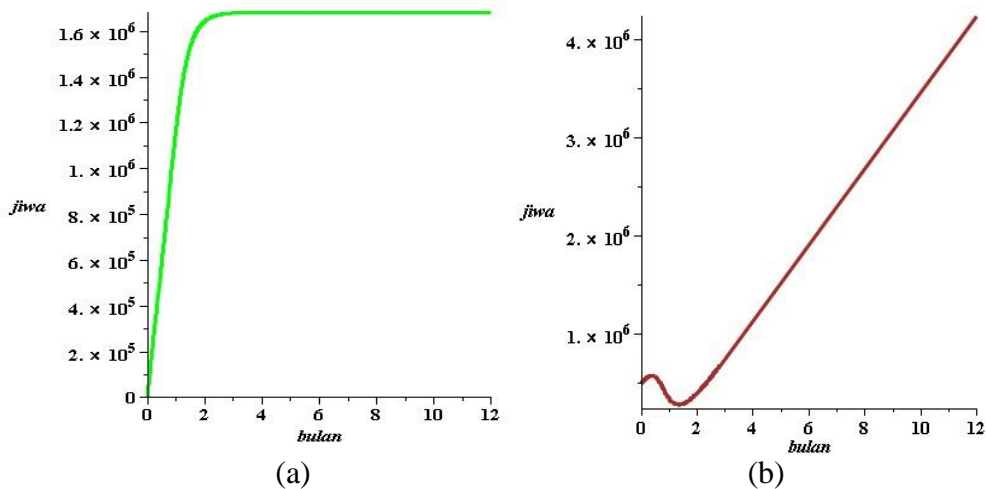
Simulasi Model SIR DBD di Provinsi Maluku

Simulasi Model SIR DBD di Provinsi Maluku, menggunakan software Maple 12, pada persamaan (5) sampai (11), maka diperoleh grafik populasi manusia rentan, grafik populasi manusia terinfeksi, grafik populasi manusia sembuh, grafik populasi nyamuk rentan dan grafik populasi nyamuk terinfeksi dari model epidemik DBD di Provinsi Maluku seperti pada Gambar 2 sampai 8, sebagai berikut:



Gambar 2. Plot Populasi Manusia (a) Rentan, (b) Terinfeksi

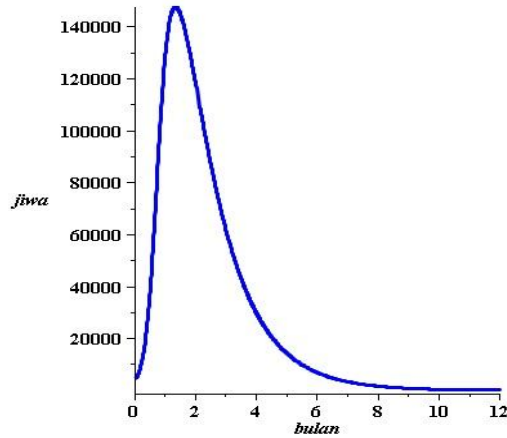
Pada Gambar 2(a), terlihat bahwa di awal bulan sub populasi manusia yang rentan tampak berada di puncak tetapi seiring berjalannya waktu jumlah manusia rentan semakin menurun bahkan sampai mendekati nilai nol. Hal ini karena sub populasi manusia rentan masuk dalam sub populasi manusia terinfeksi (terinfeksi penyakit DBD). Sedangkan pada Gambar 2(b) untuk sub populasi manusia terinfeksi tampak mencapai puncak pada 1,5 bulan pertama kemudian menurun mendekati nilai nol setelah bulan ke-3, ini dikarenakan manusia yang terinfeksi masuk pada sub populasi manusia sembuh.



Gambar 3(a). Plot Populasi Manusia Sembuh, 3(b). Plot Populasi Nyamuk Rentan

Pada Gambar 3(a) populasi manusia sembuh pada bulan pertama meningkat kemudian memuncak dan stabil pada bulan kedua sampai bulan terakhir. Pada Gambar 3(b) populasi nyamuk yang rentan pada bulan pertama awalnya sedikit memuncak kemudian

menurun dan setelah bulan ke-2 kembali memuncak lagi sampai bulan ke-12, dikarenakan dalam sub populasi nyamuk rentan perlahan terinfeksi.



Gambar 4. Plot Populasi Nyamuk Terinfeksi

Pada Gambar 4 untuk populasi nyamuk terinfeksi yang awalnya meningkat dan mencapai jumlah maksimum menjelang bulan ke-2 dan kemudian menurun setelah bulan ke-2 mendekati nol pada bulan sepuluh sampai bulan kedua belas.

Dari proses perhitungan sebelumnya telah diperoleh rumusan bilangan reproduksi dasar:

$$R_0 = \mu_v^2 \mu_h^2 + \mu_v^2 \mu_h \gamma_h + \mu_v^2 p \mu_h + \mu_v^2 p \gamma_h$$

Dengan:

$$\begin{aligned} \mu_v &= 0,00122 & \mu_h &= 0,78 \\ p &= 0,75 & \gamma_h &= 7,52 \end{aligned}$$

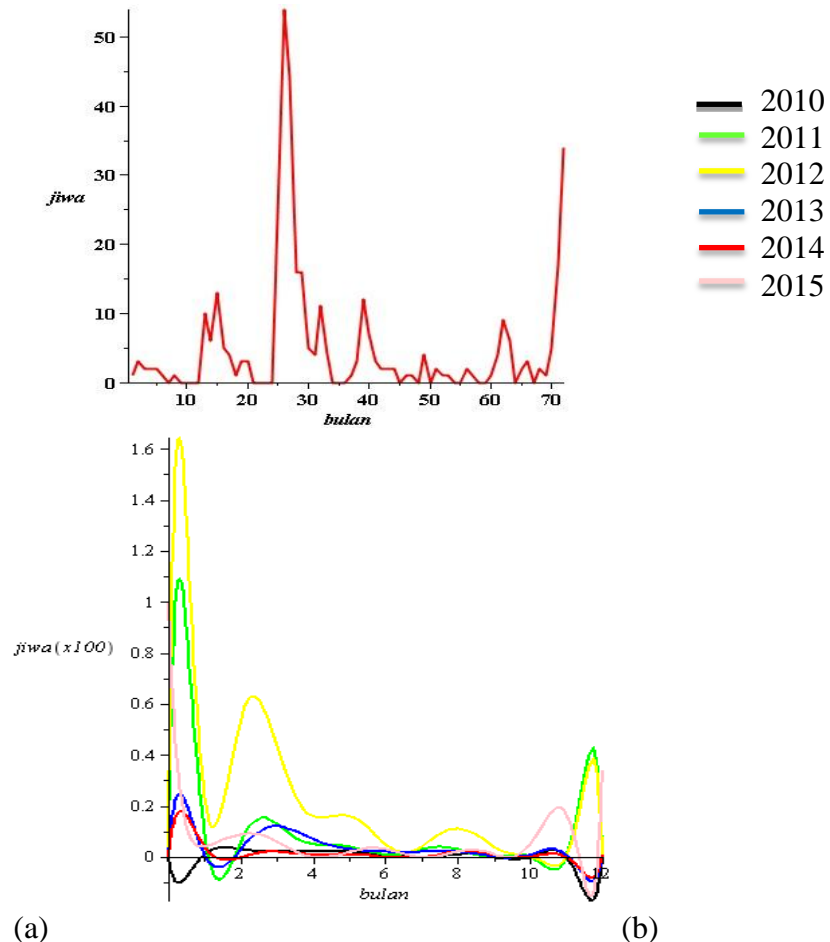
Dengan demikian, setelah mensubstitusikan nilai dari setiap parameter ke persamaan bilangan reproduksi dasar maka diperoleh bahwa model epidemik DBD memiliki nilai R_0 sebesar 3,44. Karena $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik.

$$\begin{aligned} E^1 &= (S_{v1}, I_{v1}, S_{h1}, I_{h1}) \\ &= \left(\frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h}}, \frac{c_{hv} I_h}{N_h \mu_v} S_v, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h}}, \frac{c_{vh} I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right) \\ &= (20.850, 40, 27, 17, 2.738, 87, 2602, 38) \end{aligned}$$

Dimana titik kesetimbangan endemik tersebut stabil asimtotik dan penyakit tersebut tidak hilang dari populasi serta menjadi endemik di Provinsi Maluku. Nilai $R_0 > 1$ artinya setiap penderita dapat menularkan penyakit DBD kepada lebih dari satu penderita baru, sehingga dapat menyebarkan penyakit yang lebih luas.

Proses Interpolasi

Dengan menggunakan data berupa penderita DBD di Provinsi Maluku dari tahun 2009-2015, dan software Maple 12 maka diperoleh plot manusia terinfeksi selama 72 bulan atau 6 tahun seperti berikut:



Gambar 5. Plot Manusia Terinfeksi (a) karakteristik rata-rata selama 72 bln atau 6 tahun, (b) Karakteristik tiap tahun dari 2010-2015 selama 12 bln

Pada Gambar 5(a), tampak bahwa jumlah manusia terinfeksi tertinggi di Provinsi Maluku terjadi pada bulan Februari 2012 yaitu 54 jiwa. Tiga tahun kemudian pada bulan Desember 2015 terjadi kenaikan sejumlah 34 jiwa. Jadi dapat dikatakan bahwa siklus penyakit DBD di Provinsi Maluku akan mencapai puncaknya setiap tiga tahun sekali. Pada Gambar 5(b) Setelah dilakukan proses interpolasi manusia terinfeksi pada tahun 2010-2015, tampak bahwa rata-rata manusia yang terinfeksi DBD berada di bulan Januari, Februari, Maret, November dan Desember cenderung bertambah. Tetapi berlaku sebaliknya untuk bulan April, Mei, Juni, Juli, Agustus, September dan Oktober

yaitu menurun. Dan juga dapat dilihat bahwa dari rata-rata individu yang terinfeksi DBD di Provinsi Maluku yang memuncak adalah pada tahun 2011 dan 2012.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan, sebagai berikut:

- a. Penyakit DBD di Provinsi Maluku memiliki titik kesetimbangan endemik

$$\begin{aligned} E^1 &= (S_{v1}, I_{v1}, S_{h1}, I_{h1}) \\ &= \left(\frac{\mu_v N_v}{\mu_v + \frac{c_{hv} I_h}{N_h}}, \frac{c_{hv} I_h}{N_h \mu_v} S_v, \frac{\mu_h N_h}{\mu_h + p + \frac{c_{vh} I_v}{N_h}}, \frac{c_{vh} I_v S_h}{N_h (\mu_h + \gamma_h)} \right) \\ &= (20.850, 40, 27, 17, 2.738, 87, 2602, 38) \end{aligned}$$

- b. Hasil analisis model SIR dan interpolasi menunjukkan bahwa penyakit DBD bersifat endemik di Provinsi Maluku, dengan siklus penyakit DBD di Provinsi Maluku meningkat tiga tahun sekali dengan puncak individu terinfeksi DBD pada tahun 2011 dan 2012.

Daftar Pustaka

- [1] Sofro, A. M. *Penanganan Demam Berdarah*.
- [2] Effendy. 2013. *Analisis Stabilitas penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Jember dengan Metode Model SIR Stokastik*.
- [3] Derouich, M., Boutayeb, A., & Twizell, E. H. 2003. *A Model Dengue Fever*.
- [4] Rohmani A., Anggraeni M. T., 2012. *Pemakaian Antibiotik pada Kasus Demam Berdarah Dengue Anak di Rumah Sakit Roemani Semarang Tahun 2010, Seminar Hasil Penelitian-LPPM UNIMUS, ISBN: 978-602-18809-0-6, Hal. 218-227*.
- [5] Ariyunita, S.2009. *Kepadatan Populasi Larva Nyamuk Aedes aegypti L. (Diptera: Culicidae) pada Sekolah-sekolah di Kecamatan Patrang Kabupaten Jember, Jember*.