Kajian Pembentukan Segitiga Sierpinski Pada Masalah *Chaos Game* dengan Memanfaatkan Transformasi Affine

Kosala Dwidja Purnomo
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
e-mail: kosala.fmipa@unej.ac.id

Rere Figurani Armana
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
e-mail: rerefiguraniarmana@gmail.com

Kusno
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
e-mail: kusno.fmipa@unej.ac.id

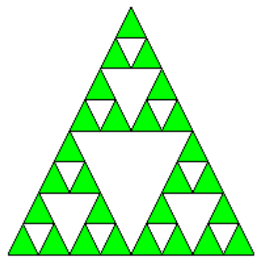
Abstract: *The collection of midpoints in chaos game at early iteration looked like a shapeless or chaos. However, at the thousands of iterations the collection will converge to the Sierpinski triangle pattern. In this article Sierpinski triangle pattern will be discussed by the midpoint formula and affine transformation, that is dilation operation. The starting point taken is not bounded within the equilateral triangle, but also outside of it. This study shows that midpoints plotted always converge at one of vertices of the triangle. The sequence of collection midpoints is on the line segments that form Sierpinski triangle, will always lie on the line segments at any next iteration. Meanwhile, a midpoint that is not on the line segments, in particular iteration will be possible on the line segments that form Sierpinski triangle. In the next iteration these midpoints will always be on the line segment that form Sierpinski triangle. So, the collection of midpoints at thousands of iteration will form Sierpinski triangle pattern.*

Keywords: *chaos game, dilation, midpoints, Sierpinski triangle*

1. Pendahuluan

Chaos game merupakan bentuk permainan menggambar suatu titik dalam segitiga sama sisi dengan aturan tertentu yang dilakukan berulang-ulang secara iteratif. Titik yang digambar tersebut merupakan titik tengah dari jarak titik awal atau sebelumnya dengan salah satu titik sudut segitiga yang diambil secara acak. Jika penggambaran titik tengah tersebut dilakukan pada jumlah iterasi kecil, maka kumpulan titik tersebut terkesan berbentuk *chaos* (kacau). Namun demikian, jika itu dilakukan pada jumlah ribuan iterasi, maka kumpulan titik-titik tengah tersebut akan mendekati bentuk segitiga Sierpinski.

Purnomo [1] menyatakan bahwa segitiga Sierpinski adalah jenis fraktal linier yang mempunyai sifat *self similarity* (keserupaan diri) yang identik dari satu iterasi ke iterasi berikutnya. Segitiga Sierpinski merupakan segitiga yang terdiri atas segitiga-segitiga lain yang berbentuk sama tetapi dengan ukuran setengahnya. Apabila bagian kecil dari segitiga tersebut diperbesar, maka akan tampak seperti bagian lain yang lebih besar (lihat Gambar 1).

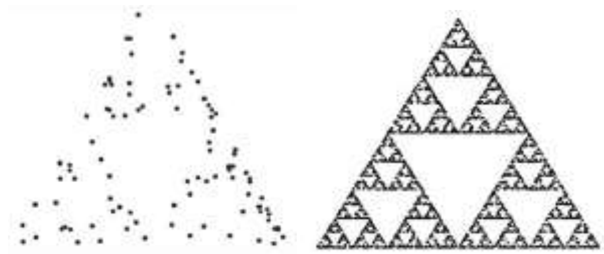


Gambar 1. Segitiga Sierpinski pada iterasi ke-3

Pembentukan segitiga Sierpinski melalui kumpulan titik-titik sudah dilakukan sebelumnya. Edgar [2] telah menunjukkan bahwa pola segitiga Sierpinski mempunyai kemiripan dengan segitiga Pascal. Dalam hal ini susunan titik-titik pada segitiga Sierpinski bisa didapatkan dengan menggantikan bilangan ganjil dalam segitiga Pascal dengan titik hitam; sedangkan bilangan genapnya dihilangkan. Semakin banyak baris yang digambarkan dalam segitiga Pascal, susunan titik-titik tersebut semakin mendekati bentuk segitiga Sierpinski.

Purnomo [2] juga telah menunjukkan bahwa segitiga Sierpinski dapat dibangkitkan diantaranya dengan menggunakan transformasi affine. Bahkan, secara umum objek awal yang dibangkitkan tidak terbatas segitiga sama sisi, tetapi dapat berupa objek sembarang. Pemberlakuan prosedur transfomasi affine pada objek sembarang ternyata juga dapat membentuk segitiga Sierpinski. Pembentukan segmen garis pada segitiga Sierpinski dapat dilakukan dengan algoritma yang menggunakan pendekatan L-System. Di dalam [1] Purnomo menyatakan bahwa bidang dalam segitiga Sierpinski juga dapat dibangun dari L-System dengan memasukkan langkah pewarnaan pada tiap segitiga yang dihasilkan.

Dalam kaitannya dengan *chaos game*, Zohuri [4] menyatakan bahwa bila titik acuan awal untuk *chaos game* terletak pada segitiga Sierpinski, maka titik yang ditandai berikutnya juga akan berada pada segitiga Sierpinski.



Gambar 2. Kumpulan titik-titik tengah pada chaos game iterasi ke-400 dan ke-30.000 (Zohuri [4])

Namun demikian, di dalamnya tidak dibahas bagaimana jika titik acuan awal tersebut tidak terletak dalam segitiga Sierpinski. Dengan demikian, dalam hal ini perlu dibahas seandainya titik acuan awal tidak terletak dalam segitiga Sierpinski. Dalam hal ini Zohuri juga telah menyajikan beberapa gambar kumpulan titik pada chaos game yang membentuk segitiga Sierpinski (Gambar 2).

Dalam artikel ini akan dibahas proses pembentukan kumpulan titik-titik tengah yang dipilih acak tersebut. Dengan menggunakan pendekatan transformasi affine akan ditunjukkan bahwa kumpulan titik-titik tengah yang dipilih dari jarak dengan titik sudut segitiga secara acak tersebut, pada awalnya memang terlihat seperti membentuk pola tidak beraturan. Akan tetapi, semakin banyak titik tengah yang digambar, maka kumpulan titik tersebut semakin terlihat akan membentuk pola yang mirip dengan segitiga Sierpinski.

2. Data dan Metode

Aturan yang digunakan dalam chaos game untuk membangkitkan titik-titik yang membentuk pola segitiga Sierpinski adalah sebagai berikut:

a. Diberikan tiga titik sudut pembentuk segitiga (sama sisi);
b. Diberikan titik acuan awal (di dalam atau di luar segitiga);
c. Digambarkan titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan titik acuan dengan salah satu sembarang titik sudut segitiga;
d. Pada iterasi berikutnya, titik tengah tersebut dipandang sebagai titik acuan;
e. Ulangi langkah c; Demikian seterusnya sampai pada sejumlah iterasi yang diinginkan.

Misalkan diberikan data tiga buah titik sembarang sebagai titik-titik sudut pembentuk segitiga sama sisi. Dengan melakukan proses translasi pada ketiga titik sudutnya dan jika titik beratnya diletakkan pada koordinat $P(x,y)$, maka titik-titik sudutnya dapat dinyatakan dalam koordinat $A(0,0)$, $B(2x,0)$, dan $C(x,3y)$. Misalkan juga diberikan sebuah titik sembarang sebagai titik awal, yaitu $T_0(x_0,y_0)$. Maka, titik tengah dari segmen garis $\overline{AT_0}, \overline{BT_0}, \overline{CT_0}$ berturut-turut adalah

$\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), \left(\frac{2x+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), \left(\frac{x+x_0}{2}, \frac{3y+y_0}{2}\right)$. Rumusan **koordinat titik tengah** dari segmen garis yang menghubungkan dua titik ini akan digunakan untuk membangkitkan kumpulan titik-titik tengah yang akan ditunjukkan membentuk pola segitiga Sierpinski.

Metode lain yang digunakan untuk menunjukkan pembentukan pola segitiga Sierpinski dalam *chaos game* adalah **transformasi affine**. Secara umum transformasi affine yang digunakan untuk membentuk segitiga Sierpinski (sebagaimana diuraikan oleh Purnomo [3]) adalah dilatasi dan translasi. Dalam hal ini dilatasi dilakukan dengan pusat di salah satu titik sudut segitiga sama sisi dengan faktor dilatasi sebesar setengah. Sedangkan, translasi dilakukan untuk menduplikasi segitiga berukuran setengah dari ukuran sebelumnya ke titik sudut lainnya. Jika hal ini dilakukan secara iteratif terhadap objek gabungan segitiga sama sisi yang terbentuk, maka akan terbentuk segitiga Sierpinski.

Kedua rumusan/metode tersebut (yaitu rumusan titik tengah dan metode transformasi affine) akan digunakan untuk menunjukkan bahwa kumpulan titik-titik tengah segmen garis penghubung sebuah titik sembarang dengan titik-titik sudut segitiga sama sisi akan membentuk pola segitiga Sierpinski.

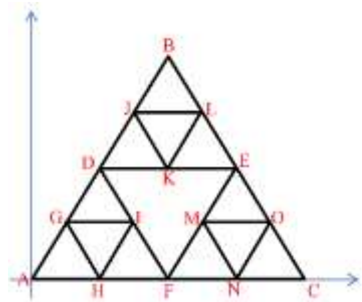
3. Hasil dan Pembahasan

Misalkan diberikan data tiga buah titik sembarang sebagai titik-titik sudut pembentuk segitiga sama sisi. Dengan melakukan proses translasi pada ketiga titik sudutnya dan jika titik beratnya diletakkan pada koordinat $P(x, y)$, maka titik-titik sudutnya dapat dinyatakan dalam koordinat $A(0,0)$, $B(2x, 0)$, dan $C(x, 3y)$.

Misalkan juga diberikan sebuah titik sembarang sebagai titik acuan awal, yaitu $T_0(x_0, y_0)$. Maka, titik tengah dari segmen garis $\overline{AT_0}, \overline{BT_0}$, dan $\overline{CT_0}$ berturut-turut adalah $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), \left(\frac{2x+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$, dan $\left(\frac{x+x_0}{2}, \frac{3y+y_0}{2}\right)$. Rumusan koordinat titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan dua titik ini akan digunakan untuk membangkitkan kumpulan titik-titik tengah yang akan ditunjukkan membentuk pola segitiga Sierpinski. Ketiga titik tengah ini dalam iterasi selanjutnya akan menjadi titik acuan untuk menentukan titik-titik tengah yang akan digambarkan.

Dapat dibuktikan bahwa setiap titik tengah yang digambarkan akan konvergen mendekati ke salah satu dari tiga titik sudut segitiga sama sisi. Ambil misalnya sebuah titik sembarang $T_0(x_0, y_0)$ dan asumsikan dalam setiap iterasi terus-menerus mendekati titik sudut $B(2x, 0)$. Maka akan didapatkan barisan dalam bentuk kumpulan koordinat titik tengah $\left\{(x_0, y_0), \left(x+\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), \left(\frac{3}{2}x+\frac{x_0}{2^2}, \frac{y_0}{2^2}\right), \dots, \left(\frac{2^k-1}{2^{k-1}}x+\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}\right)\right\}$. Suku terakhir dalam barisan tersebut identik dengan koordinat $\left(2x-\frac{x}{2^{k-1}}+\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}\right)$, yaitu jika $k \to \infty$ maka bentuk tersebut akan konvergen ke koordinat $B(2x, 0)$. Hal demikian juga akan berlaku bagi titik sudut lainnya serta titik sembarang $T_0(x_0, y_0)$ lainnya. Asumsi bahwa dalam setiap iterasi terus-menerus mendekati titik sudut tertentu ini tidak bertentangan dengan keumuman aturan dalam *chaos game* dimana titik sudut yang dipilih pada setiap iterasi adalah acak. Jika titik sudut dipilih acak, maka hanya akan berpengaruh pada beberapa suku dalam barisan titik tengahnya. Barisan titik tengahnya tetap akan konvergen ke salah satu titik sudut segitiga sama sisi.

Struktur segmen garis pada segitiga Sierpinski hakikatnya adalah kumpulan dari titik-titik dalam segitiga sama sisi dengan pola tertentu. Pada Gambar 3 terlihat bahwa ΔABC melingkupi ΔDEF.



Gambar 3. Segitiga Sierpinski pada iterasi ke-2

Pada iterasi berikutnya semua titik pada segmen garis ΔDEF akan didilatasi dengan faktor setengah pada pusat di ketiga titik sudut *A*, *B*, dan *C*, sehingga menghasilkan segitiga ΔGIH, ΔJLK, dan ΔMON. Polanya adalah sebuah segitiga akan didilatasi dengan faktor setengah dan berpusat di ketiga titik sudut segitiga yang melingkupinya.

Dengan pola dilatasi seperti ini, maka setiap titik yang terletak pada segmen garis dalam segitiga Sierpinski akan didilatasi setengahnya dengan pusat dilatasi di titik sudut manapun. Istilah "dilatasi setengahnya dengan titik sudut" memberikan pengertian yang sama dengan membangkitkan titik tengah dari segmen garis yang menghubungkan sebuah titik dengan titik sudut segitiga. Sedangkan, "di titik sudut manapun" mempunyai pengertian yang sama dengan pengambilan titik sudut secara acak salah satu diantara ketiga titik sudut segitiga utama. Pada setiap iterasi titik seperti ini akan selalu berada di segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski. Akibatnya, setiap pengambilan titik awal sembarang $T_0(x_0, y_0)$ yang terletak pada segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski, maka akan membangkitkan titik tengah yang juga terletak pada segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski. Dengan kata lain, kumpulan titik-titik tengah tersebut akan membentuk pola seperti segmen garis pada segitiga Sierpinski.

Untuk titik acuan awal $T_0(x_0, y_0)$ yang tidak terletak pada segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski, maka pada iterasi tertentu dimungkinkan titik tengah yang dibangkitkan akan menempati segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski. Hal ini disebabkan bahwa pada bagian dalam segitiga Sierpinski yang awalnya tampak tidak bersegmen garis, pada iterasi berikutnya dimungkinkan muncul segitiga yang lebih kecil disana. Akibatnya, dalam iterasi berikutnya titik tengah seperti ini akan selalu membangkitkan titik tengah lain yang berada pada segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski.

Oleh karena itu, pengambilan sembarang titik $T_0(x_0, y_0)$ di dalam sebuah segitiga sama sisi akan dapat membangkitkan sejumlah titik tengah yang mendekati pola segmen garis pembentuk segitiga Sierpinski. Titik $T_0(x_0, y_0)$ dalam hal ini tidak bergantung berada pada segmen garis segitiga Sierpinski atau tidak.

Keberadaan titik acuan awal $T_0(x_0, y_0)$ bahkan juga tidak harus di bagian dalam segitiga sama sisi utamanya. Jika titik acuan awal $T_0(x_0, y_0)$ terletak di luar segitiga sama sisi, maka pada iterasi selanjutkan akan dibangkitkan titik-titik tengah yang mendekati ke salah satu dari tiga titik sudut segitiga sama sisinya. Karena titik sudut dipilih secara acak, maka pada iterasi tertentu titik tengah yang dibangkitkan akan berada pada bagian dalam segitiga sama sisi. Pada saat titik tengah tersebut berada di bagian dalam segitiga sama sisi, maka titik tengah berikutnya yang dibangkitkan akan selalu berada di dalam segitiga sama sisi dan kumpulan titik tengahnya akan membentuk pola segitiga Sierpinski.

4. Simpulan dan Saran

Pembentukan pola segitiga Sierpinski pada masalah *chaos game* dapat dijelaskan dengan transformasi affine, khususnya konsep dilatasi dengan faktor setengah dan pusat dilatasi di salah satu titik sudut segitiga sama sisinya. Kumpulan titik-titik tengah yang membentuk pola segitiga Sierpinski pada dasarnya dapat dijelaskan melalui transformasi affine yang juga membentuk segitiga Sierpinski. Dalam hal ini titik awal sebagai acuan menentukan titik-titik tengah yang membentuk pola segitiga Sierpinski tidak harus berada di bagian dalam segitiga sama sisi, namun juga dimungkinkan berada di luarnya. Titik-titik tengah yang berada di luar segitiga sama sisi dalam iterasi tertentu akan berada di dalam segitiga sama sisinya.

Untuk pengembangan masalah *chaos game*, perlu dikaji lebih lanjut bahwa titik-titik sudut pembentuknya bukan segitiga sama sisi tetapi bisa objek geometri lainnya yang dibangun oleh lebih dari tiga titik sudut sembarang. Sifat transformasi dilatasi perlu dikaji dalam kaitan dengan pola konvergensi kumpulan titik tengahnya atau kumpulan titik yang didefinisikan dengan rumusan tertentu.

Daftar Pustaka

[1] K.D. Purnomo, "Algoritma Pembangkitan Segitiga Sierpinski dengan L-System", Prosiding Seminar Nasional Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, 2014, hal. 365-375.

[2] G. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer Science+Business Media, New York, 2008.

[3] K.D. Purnomo, "Pembangkitan Segitiga Sierpinski dengan Transformasi Affine Berbasis Beberapa Benda Geometris", Prosiding Seminar Nasional Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, 2014, hal. 41-48.

[4] B. Zohuri, *Dimensional Analysis and Self-Similarity Methods for Engineers and Scientist*. Switzerland: Springer International Publishing, 2015.