

MODEL SIKLUS BISNIS IS-LM DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN

Ni Ketut Tari Tastrawati

*Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Udayana
Kampus Bukit Jimbaran Badung, Bali
e-mail: taritastrawati@yahoo.com*

Abstract: Sistem dinamik dapat dikembangkan dalam berbagai bidang kehidupan. Seperti dalam bidang ekonomi, salah satu sistem dinamik dalam bidang ini adalah model siklus bisnis. Ada beberapa model siklus bisnis, diantaranya model IS-LM. Dalam penelitian ini akan dianalisa model siklus bisnis IS-LM dengan parameter *time delay*. Perbedaan antara keputusan investasi dengan implementasinya menganjurkan untuk merumuskan model siklus bisnis IS-LM yang baru, yang memperlihatkan bahwa dinamika model sangat bergantung pada parameter *time delay* (waktu persiapan periode investasi). Dalam penelitian ini akan digunakan teorema bifurkasi Hopf untuk memprediksi kejadian dari *limit cycle* untuk parameter *time delay*, yang menggambarkan siklus dari model IS-LM.

Keywords: bifurkasi Hopf, model IS-LM, siklus bisnis, *time delay*

1. Pendahuluan

Sistem dinamik dapat dikembangkan dalam berbagai bidang kehidupan, seperti bidang teknik, biologi, ekonomi, dan ilmu-ilmu sosial lainnya. Umumnya sistem dinamik dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial, dan dianalisa kestabilan lokal dan global dari sistem tersebut. Salah satu model yang merupakan sistem dinamik dalam bidang ekonomi, khususnya dalam ekonomi makro adalah model siklus bisnis. Model siklus bisnis ada beberapa macam, salah satunya adalah model siklus bisnis IS-LM yang melibatkan beberapa fungsi, seperti investasi (I), *saving*(S), permintaan akan uang (L), dan persediaan uang (M). Model ini telah banyak dikembangkan, salah satunya oleh Torre [14] yang menganalisa keberadaan orbit tertutup dengan menggunakan teorema bifurkasi Hopf. Dari model tersebut, keputusan investasi hanya mempertimbangkan kejadian pada saat sekarang. Pada banyak aplikasi, diasumsikan suatu sistem yang menjadi perhatian, bahwa keadaan mendatang dari sistem tidak tergantung pada keadaan sebelumnya dan hanya ditentukan oleh keadaan saat ini. Apabila sistem tersebut dimodelkan dengan suatu persamaan yang menyatakan keadaan beserta percepatan perubahan keadaan tersebut, maka umumnya digunakan persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial. Prinsip hubungan sebab akibat sering hanya merupakan suatu pendekatan awal untuk situasi sebenarnya, dan model yang lebih realistik harus meliputi keadaan sistem pada waktu sebelumnya [6]. Oleh karena itu dalam model siklus bisnis Kalecki [7], Kalecki mengasumsikan bahwa bagian yang disimpan dari keuntungan adalah investasi dan pertumbuhan modal bergantung pada keputusan investasi sebelumnya. Ini merupakan periode persiapan atau *time delay*. Dalam penelitian ini,

dengan menggunakan ide dari Kalecki maka Cai [1] memperumum perumusan model siklus bisnis seperti berikut:

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \alpha(I(Y, K, r) - S(Y, r)) \\ \dot{r} &= \beta(L(y, r) - \bar{M}) \\ \dot{K} &= I(Y(t - T), K, r) - \sigma K\end{aligned}\tag{1}$$

dengan T adalah parameter time delay.

Investasi bergantung pada pendapatan pada waktu keputusan investasi dibuat dan juga pada stok modal pada waktu investasi berakhir. Stok modal pada waktu investasi berakhir merupakan konsekuensi dari fakta bahwa pada waktu $t - T$ terdapat beberapa investasi yang akan berakhir antara waktu $t - T$ dan t . Diasumsikan bahwa hasil stok modal dalam periode ini menjadi pertimbangan ketika investasi baru direncanakan. Dalam penelitian ini akan diaplikasikan teorema bifurkasi Hopf untuk memprediksi kejadian dari *limit cycle* untuk parameter *time delay*. Yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menganalisa kestabilan linier model siklus bisnis IS-LM untuk parameter time delay yang kecil serta menyelidiki keberadaan *limit cycle* dari model siklus bisnis IS-LM dengan analisa bifurkasi Hopf. Dengan mengetahui keberadaan *limit cycle* dari parameter time delay, maka dapat ditentukan periode sistem. Dalam hal ini dinamika ekonomi makro yang salah satunya ditunjukkan dalam model siklus bisnis IS-LM mempunyai periode tertentu.

2. Tinjauan Pustaka

Model yang terdapat dalam [1], [9], dan [11] mengandung persamaan diferensial fungsional. Persamaan diferensial fungsional adalah suatu persamaan diferensial yang memuat ketergantungan pada masa lalu [6].

Dalam [6] diberikan tiga tipe persamaan, yaitu tipe *retarded*, tipe *neutral* dan tipe *advance*. Pada penerapannya, variabel bebas (sebut saja dengan t) biasanya menyatakan waktu. Persamaan tipe *retarded* menyatakan perilaku suatu sistem dengan laju perubahan kuantitas yang diamati tergantung pada kuantitas yang lalu atau sekarang. Tipe *neutral* menyajikan suatu sistem dengan laju perubahan kuantitas sekarang tergantung pada laju perubahan yang lalu dan juga kuantitas sekarang atau yang lalu. Sedangkan tipe *advance* menyatakan suatu sistem dengan kuantitas sekarang tergantung pada keadaan yang lalu dan laju perubahan yang lalu. Selanjutnya persamaan diferensial fungsional tipe *retarded* akan disebutkan dengan persamaan diferensial tun-
daan.

2.1. Kriteria Routh-Hurwitz [2, 3]

Nilai eigen dari matriks Jacobian ditentukan melalui polynomial karakteristik yang diperoleh dari persamaan $|\lambda I - A| = 0$ yaitu

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0\tag{2}$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan real dan A adalah matriks Jacobian. Seringkali tidak mudah menentukan akar-akar karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, untuk itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz yaitu:

Didefinisikan

$$\begin{aligned} D_1 &= |a_1| \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \\ D_k &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dengan $k = 1, 2, \dots, n$. Elemen $a_j = 0$ jika $j > n$. Sistem dikatakan stabil jika akar-akar karakteristiknya di titik setimbang $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ mempunyai bagian real negatif. Akar-akar karakteristik dari (2) mempunyai bagian real negatif jika $D_k > 0$, untuk setiap k .

2.2. Bifurkasi

Dalam sistem dinamik tak linear akan sering dijumpai transisi dari keadaan stabil ke suatu keadaan tidak stabil ataupun sebaliknya yaitu transisi dari keadaan tidak stabil ke keadaan stabil. Kondisi seperti ini disebut dengan bifurkasi. Analisa bifurkasi adalah bagian terpenting dari suatu sistem. Misal diberikan medan vektor sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (3)$$

dengan $x \in R^n$ adalah variabel serta $\mu \in R$ adalah parameter. Sebagai konsekuensi adanya parameter dapat mempengaruhi perubahan kestabilan titik setimbang maka dikatakan strukturnya tidak stabil. Nilai parameter yang mempengaruhi sifat kualitatif sistem berubah sesuai dengan nilai bifurkasi. Dengan demikian bifurkasi dapat didefinisikan sebagai perubahan kualitatif yang terjadi pada penyelesaian persamaan diferensial. Perubahan kualitatif meliputi perubahan stabilitas dan perubahan jumlah titik setimbang yang diakibatkan perubahan parameter.

Untuk menganalisis bifurkasi dari medan vektor dapat digunakan bidang parameter, sehingga didapatkan berbagai jenis bifurkasi seperti bifurkasi Hopf, bifurkasi sadel node, dan yang lainnya.

2.3. Bifurkasi Hopf

Pandang sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) \end{aligned} \quad (4)$$

dengan parameter μ . Diasumsikan sistem (4) mempunyai titik setimbang (x_0, y_0) dan $\mu = \mu_0$ adalah nilai parameter yang menyebabkan terjadinya bifurkasi. Bifurkasi Hopf terjadi jika titik setimbang x_0, y_0 mempunyai sepasang nilai eigen kompleks yaitu $\lambda(\mu_0) = \alpha(\mu_0) + i\omega(\mu_0)$ dan $\lambda(\mu_0) = \alpha(\mu_0) - i\omega(\mu_0)$ dengan $\alpha(\mu_0) = 0$, $\omega(\mu_0) \neq 0$ dan memenuhi syarat transversal [5].

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Model IS-LM

Diasumsikan bahwa fungsi Investasi I , fungsi *Saving* S , dan permintaan akan uang L bergantung secara linear pada argumen-argumennya. Suku bunga r mempunyai hubungan yang berbanding terbalik dengan investasi sehingga semakin tinggi tingkat suku bunga maka investasi semakin turun. Stok modal mengalami penyusutan nilai sebesar δ , sehingga fungsi investasi (I) dapat dinyatakan sebagai besarnya pendapatan (dalam hal ini *gross product*) dikurangi modal dan suku bunga. *Saving* atau simpanan merupakan besarnya pendapatan ditambah suku bunga. Sedangkan permintaan uang di pasar berbanding terbalik dengan suku bunga, semakin tinggi tingkat suku bunga semakin turun permintaan akan uang di pasar, sehingga fungsi permintaan akan uang (L) dapat dinyatakan sebagai besarnya pendapatan (*gross product*) dikurangi besarnya suku bunga. Secara singkat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$I = \eta Y - \delta_1 K - \beta_1 r \quad (5)$$

$$S = l_1 Y + \beta_2 r \quad (6)$$

$$L = l_2 Y - \beta_3 r \quad (7)$$

dengan $\eta, \delta_1, l_1, l_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ adalah konstanta-konstanta positif dalam interval $[0, 1]$.

3.2. Persamaan Karakteristik Model IS-LM

Berdasarkan persamaan (5), (6), dan (7), maka sistem (1) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha((\eta - l_1)Y - (\beta_1 + \beta_2)r - \delta_1 K) \\ \dot{r} &= \beta(l_2 Y - \beta_3 r - \bar{M}) \\ \dot{K} &= \eta Y(t - T) - \beta_1 r - (\delta + \delta_1)K \end{aligned} \quad (8)$$

Titik setimbang sistem (8), diperoleh dengan membentuk $\dot{Y} = 0$, $\dot{r} = 0$, $\dot{K} = 0$, serta $T = 0$, sehingga didapatkan titik setimbang trivial $S_0(0, 0, 0)$, sedangkan titik setimbang nontrivialnya adalah $S_1 = (\bar{Y}, \bar{r}, \bar{K})$, dengan

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= -\frac{(\delta\beta_2 + \delta_1\beta_2 + \delta\beta_1)\bar{M}}{-\beta_3 l_1 \delta_1 - \beta_3 l_1 \delta - \beta_1 l_2 \delta + \beta_3 \eta \delta - \beta_2 l_2 \delta_1 - \beta_2 l_2 \delta} \\ \bar{r} &= -\frac{(-l_1 \delta_1 - l_1 \delta + \eta \delta)\bar{M}}{-\beta_3 l_1 \delta_1 - \beta_3 l_1 \delta - \beta_1 l_2 \delta + \beta_3 \eta \delta - \beta_2 l_2 \delta_1 - \beta_2 l_2 \delta} \\ \bar{K} &= -\frac{(l_1 \beta_1 + \eta \beta_2)\bar{M}}{-\beta_3 l_1 \delta_1 - \beta_3 l_1 \delta - \beta_1 l_2 \delta + \beta_3 \eta \delta - \beta_2 l_2 \delta_1 - \beta_2 l_2 \delta} \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari persamaan karakteristik dari sistem (8). Persamaan karakteristik dibentuk melalui:

$$\begin{vmatrix} \alpha(\eta - l_1) - \lambda & -\alpha(\beta_1 + \beta_2) & -\alpha\delta_1 \\ \beta l_2 & -\beta\beta_3 - \lambda & 0 \\ \eta e^{-\lambda T} & -\beta_1 & -(\delta + \delta_1) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristik dari persamaan (8) berbentuk:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C + D\lambda e^{-\lambda T} + Ee^{-\lambda T} = 0 \quad (9)$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= \delta + \delta_1 + \beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1) \\ B &= (\delta + \delta_1)(\beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1)) + \alpha\beta l_2(\beta_1\beta_2) - \alpha\beta\beta_3(\eta - l_1) \\ C &= -\alpha\beta\beta_1 l_2 \delta_1 - (\delta + \delta_1)\alpha\beta(\beta_3(\eta - l_1) - l_2(\beta_1 + \beta_2)) \\ D &= \alpha\eta\delta_1 \\ E &= \alpha\beta\beta_3\eta\delta_1 \end{aligned}$$

Persamaan transendental (9) tidak dapat diselesaikan secara eksak sehingga mempunyai banyak akar. Untuk itu perlu dilakukan pendekatan lain yaitu dengan pendekatan linear dan pendekatan dalam ruang kompleks.

3.3. Pendekatan Linear

Untuk time delay T yang kecil, pendekatan linear sangat cocok untuk memperoleh titik bifurkasi. Untuk T yang sangat kecil maka

$$e^{-\lambda T} \approx 1 - \lambda T$$

, sehingga persamaan (9) menjadi

$$\lambda^3 + (A - DT)\lambda^2 + (B + D - ET)\lambda + C + E = 0 \quad (10)$$

Dengan teorema bifurkasi Hopf dan kriteria Routh-Hurwitz, maka terjadi bifurkasi Hopf pada nilai $T = T_0$ dengan

$$A_D T_0 > 0, \quad B + D - E T_0 > 0, \quad C + E > 0 \quad (11)$$

dan

$$(A - D T_0)(B + D - E T_0) = C + E \quad (12)$$

Misalkan

$$g(\lambda, T) = \lambda^3 + (A - DT)\lambda^2 + (B + D - ET)\lambda + C + E = 0$$

maka dapat ditentukan g pada $T = T_0$

$$g(\lambda, T) = \lambda^3 + s\lambda^2 + k^2\lambda + k^2s$$

dengan

$$s = (A_D T_0), k^2 = (B + D - E T_0)$$

Nilai eigen dari persamaan (10) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_0(T_0) &= -s = -(A - D T_0) \\ \lambda_{1,2}(T_0) &= \pm i k = \pm i (B + D - E T_0)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa syarat transversal terpenuhi, yaitu

$$Re \left(\frac{d}{dt}(\lambda(T)) \Big|_{T=T_0} \right) \neq 0$$

Diferensiasi total $g(\lambda(T), T)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dT} &= - \frac{\frac{\partial g}{\partial T}}{\frac{\partial g}{\partial \lambda}} \\ &= - \frac{-D\lambda^2 - E\lambda}{3\lambda^2 + 2(A - DT)\lambda + B + D - ET} \end{aligned}$$

Dihitung turunan g untuk $\lambda = \lambda_1$ pada saat T_0 , diperoleh

$$\frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \Big|_{T=T_0} = - \frac{(Dk^2 - iEk)(-3k^2 + B + D - ET_0 - i2k(A - DT_0))}{P^2 + R^2} \quad (13)$$

dengan

$$\begin{aligned} P &= -3k^2 + B + D - ET_0 \\ R &= 2k(A - DT_0) \end{aligned}$$

Bagian real dari (13) adalah

$$Re \left(\frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \Big|_{T=T_0} \right) = - \frac{Dk^2(-3k^2 + B + D - ET_0) - 2Ek^2(A - DT_0)}{P^2 + R^2}$$

Ada dua kemungkinan yang terjadi, yaitu:

1. Kemungkinan pertama

$$\begin{aligned} Re \left(\frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \Big|_{T=T_0} \right) &> 0 \\ - \frac{Dk^2(-3k^2 + B + D - ET_0) - 2Ek^2(A - DT_0)}{P^2 + R^2} &> 0 \end{aligned}$$

karena $P^2 + R^2$ pasti positif, maka haruslah

$$\begin{aligned} -Dk^2 &< E(A - DT_0) \\ -D(B + D - ET_0) &< E(A_D T_0) \end{aligned} \quad (14)$$

Perhatikan bahwa untuk D dan E positif, pertidaksamaan (14) terpenuhi jika kondisi $(A_D T_0) > 0$ dan $(B + D - ET_0) > 0$ terpenuhi

$$2. \operatorname{Re} \left(\frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \Big|_{T=T_0} \right) < 0$$

Dengan cara yang sama seperti kemungkinan pertama, ternyata kemungkinan yang kedua tidak sesuai dengan kriteria Routh-Hurwitz, sehingga yang memenuhi adalah kemungkinan pertama yaitu $\operatorname{Re} \left(\frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \Big|_{T=T_0} \right) > 0$, dan dapat disimpulkan bahwa $\operatorname{Re} \left(\frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \Big|_{T=T_0} \right) \neq 0$. Menurut teorema bifurkasi Hopf, hal ini menjamin adanya limit *cycle* pada saat $T = T_0$

3.4. Pendekatan Dalam Ruang Kompleks (Analisa Bifurkasi Hopf)

Untuk *time delay* yang lebih panjang, pendekatan linear tidak efektif lagi digunakan, sehingga diperlukan pendekatan yang lain. Dengan mengambil $\lambda = \sigma + i\omega$, persamaan (9) dapat ditulis dalam bentuk bagian real dan bagian imajiner.

$$\begin{aligned} &(\sigma^3 - 3\sigma\omega + A\sigma^2 + B\sigma + C + e^{\sigma T}(D\omega \cos \omega T + D\omega \sin \omega T + E \cos \omega T)) + \\ &i(3\sigma^2\omega - \omega^2 + 2A\sigma\omega + B\omega + e^{-\sigma T}(D\omega \cos \omega T - D\sigma \sin \omega T - E \sin \omega T)) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Sehingga bagian real persamaan (15) berbentuk

$$\sigma^3 - 3\sigma\omega + A\sigma^2 - A\omega^2 + B\sigma + C + e^{-\sigma T}(D\sigma \cos \omega T + D\omega \sin \omega T + E \cos \omega T) = 0$$

Sedangkan bagian imajinernya adalah

$$3\sigma^2\omega - \omega^2 + 2A\sigma\omega + B\omega + e^{-\sigma T}(D\omega \cos \omega T - D\sigma \sin \omega T - E \sin \omega T) = 0$$

Untuk mendapatkan titik bifurkasi yang pertama, diambil $\sigma = 0$. Sehingga bagian real dan bagian imajiner diatas direduksi menjadi

$$-A\omega^2 + C + D\omega \sin \omega T + E \cos \omega T = 0 \quad (16)$$

$$-\omega^3 + B\omega + D\omega \cos \omega T - E \sin \omega T = 0 \quad (17)$$

Kemudian kedua persamaan (16) dan (17) dibentuk menjadi

$$-A\omega^2 + C = -D\omega \sin \omega T - E \cos \omega T \quad (18)$$

$$-\omega^3 + B\omega = -D\omega \cos \omega T + E \sin \omega T \quad (19)$$

Dengan mengkuadratkan persamaan (18) dan (19), kemudian menjumlahkannya akan menghasilkan

$$\omega^6 + (A^2 - 2B)\omega^4 + (B^2 - 2AC - D^2)\omega^2 + C^2 - E^2 = 0 \quad (20)$$

Jika titik bifurkasi pertama adalah $\omega_{\text{bif}}, T_{\text{bif}}$, maka titik bifurkasi yang lain ω, T harus memenuhi

$$\omega T = \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} + 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Persamaan (20) merupakan persamaan kubik dalam ω^2 dan sisi kiri dari persamaan ini bernilai positif untuk nilai ω^2 yang besar dan akan bernilai negatif untuk $\omega = 0$ dan $C^2 < E^2$. Oleh karena itu, jika kondisi diatas terpenuhi, maka persamaan (20) mempunyai paling sedikit satu akar real positif.

Lemma 3.1. *Syarat perlu dan cukup bahwa persamaan kubik*

$$z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$$

dengan $a_3 > 0$, mempunyai paling sedikit satu akar positif adalah:

1. berlaku salah satu dari

a. $a_1 < 0$, $a_2 \geq 0$ dan $a_1^2 > 3a_2$ atau

b. $a_2 < 0$

2. $\Delta < 0$, dengan $\Delta = \frac{4}{27}a_2^3 - \frac{1}{27}a_1^2a_2^2 + \frac{4}{27}a_1^3a_3 - \frac{2}{3}a_1a_2a_3 + a_3^3$

Untuk membuktikan terjadi bifurkasi Hopf pada $T = T_{\text{bif}}$, maka perlu ditunjukkan bahwa

$$\text{Re} \left(\left. \frac{d}{dT}(\lambda(T)) \right|_{T=T_{\text{bif}}} \right) \neq 0$$

Misalkan $G(\lambda(T), T) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C + D\lambda e^{\lambda T} + Ee^{-\lambda T}$, maka diferensiasi $G(\lambda(T), T)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dT} &= - \frac{\frac{\partial G}{\partial T}}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}} \\ &= \frac{(D\lambda^2 + E\lambda)e^{-\lambda T}}{3\lambda^2 + 2A\lambda + B + (D - T\lambda - ET)e^{-\lambda T}} \end{aligned} \quad (21)$$

Dihitung turunan G pada saat $T = T_{\text{bif}}$ dan $\lambda = i\omega_{\text{bif}}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}(\lambda(T)) &= [(-D\omega_{\text{bif}}^2 \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} + E\omega_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}}) + i(D\omega_{\text{bif}}^2 \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \\ &+ E\omega_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}})] \cdot [(-3\omega_{\text{bif}}^2 + B + D \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \\ &- D\omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} - ET_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}}) - i(2A\omega_{\text{bif}} \\ &- D \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} - D\omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} + ET_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}})] / \\ &[(-3\omega_{\text{bif}}^2 T_{\text{bif}} + B + D \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} - D\omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \\ &- ET_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}}) + i(2A\omega_{\text{bif}} - D \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} - D\omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \\ &+ ET_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}})] \cdot [(-3\omega_{\text{bif}}^2 + B + D \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \\ &- D\omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} - ET_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}}) - i(2A\omega_{\text{bif}} \\ &- D \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} - D\omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} + ET_{\text{bif}} \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}})] \end{aligned}$$

sehingga bagian real dari persamaan (21) pada saat $T = T_{\text{bif}}$ dan $\lambda = i\omega_{\text{bif}}$, adalah

$$\text{RE} \left(\frac{d}{dT}(\lambda(T)) \right) = \frac{\omega_{\text{bif}}^2(3\omega_{\text{bif}}^4 + 2\omega_{\text{bif}}^2(A^2 - 2B) + B^2 - 2AC - D^2)}{P_1^2 + Q_1^2}$$

dengan

$$\begin{aligned} P_1 &= -3\omega_{\text{bif}}^2 + B + T_{\text{bif}}(-A\omega_{\text{bif}}^2 + C) + D \cos \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \\ Q_1 &= 2A\omega_{\text{bif}} + T_{\text{bif}}(-\omega_{\text{bif}}^3 + B\omega_{\text{bif}}) - D \sin \omega_{\text{bif}} T_{\text{bif}} \end{aligned}$$

Misalkan $x = \omega_{\text{bif}}^2$, maka persamaan (20) menjadi

$$f(x) = x^3 + (A^2 - 2B)x^2 + (B^2 - 2AC - D^2)x + C^2 - E^2$$

dan

$$f'(x) = 3x^2 + 2(A^2 - 2B)x + (B^2 - 2AC - D^2)$$

Jika ω_{bif} adalah akar positif terkecil dari persamaan (20) (kecuali jika merupakan akar kembar maka dipilih akar terkecil berikutnya), maka

$$f'(x) \Big|_{T=T_{\text{bif}}} > 0$$

oleh karena itu

$$\frac{d\sigma}{dT} \Big|_{T=T_{\text{bif}}} = \frac{\omega_{\text{bif}}^2 f'(\omega_{\text{bif}}^2)}{P_1^2 + Q_1^2} > 0$$

yang memperlihatkan bahwa syarat transversal terpenuhi, sehingga terbukti terjadi bifurkasi Hopf pada saat $T = T_{\text{bif}}$.

Dari analisa bifurkasi Hopf diatas, jika Lemma 3.1 terpenuhi dan ω_{bif} adalah akar positif terkecil dari persamaan (20) (kecuali jika merupakan akar kembar maka dipilih akar terkecil berikutnya), maka bifurkasi Hopf terjadi pada saat T melewati T_{bif} .

Contoh

Jika

$$\begin{aligned} \alpha &= 3, \beta = 2, \sigma = 0.1, \sigma_1 = 0.5, \eta = 0.31, l_1 = 0.2, l_2 = 0.1 \\ \bar{M} &= 0.05, \beta_1 = \beta_2 = 0.2 \end{aligned}$$

maka sistem (1) menjadi

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= 0.3Y - 1.2r - 1.5K \\ \dot{r} &= 0.2Y - 0.4r - 0.1 \\ \dot{K} &= 0.3Y(t - T) - 0.2r - 0.6K \end{aligned} \tag{22}$$

Persamaan karakteristik (22) akan berbentuk:

$$\lambda^3 + 0.7\lambda^2 + 0.18\lambda + 0.012 + 0.45\lambda^{\lambda T} = 0$$

Jika Lemma 3.1 terpenuhi dan ω_{bif} adalah akar positif terkecil dari persamaan (20) (kecuali jika merupakan akar kembar maka dipilih akar terkecil berikutnya), maka bifurkasi Hopf terjadi pada saat T melewati $T_{\text{bif}} = 0.740471$, dengan nilai eigen

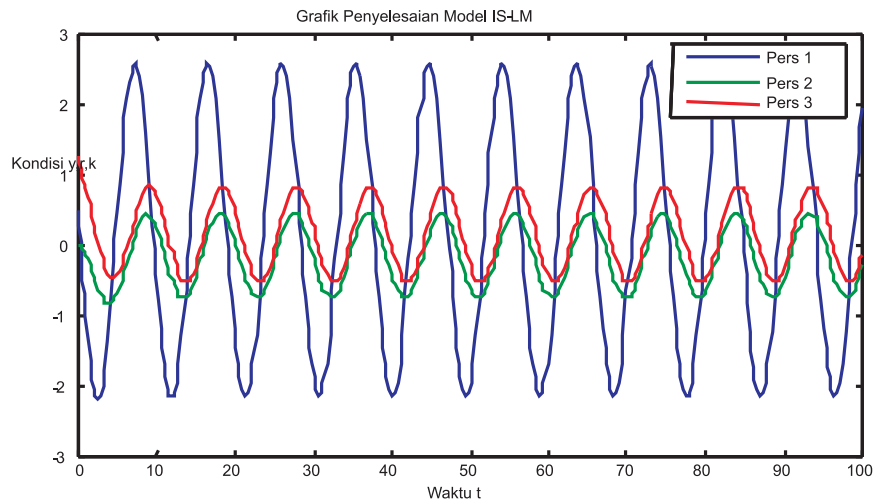
$$\begin{aligned} \lambda_0(T_{\text{bif}}) &= -0.382583 \\ \lambda_{1,2}(T_{\text{bif}}) &= \pm 0.6993i \end{aligned}$$

Oleh karena itu periode dari *limit cycle* adalah

$$T = \frac{2\pi}{|\lambda(T_{bif})|} = \frac{2\pi}{0.6993} = 8.98496$$

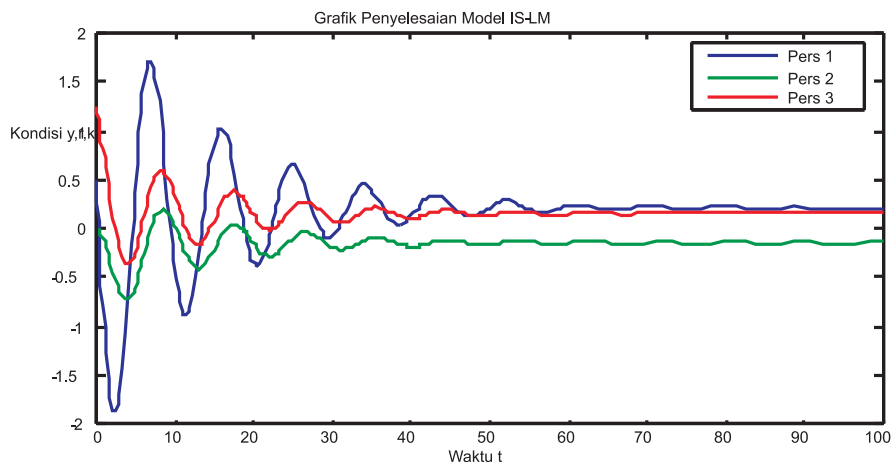
yang menggambarkan bahwa periode dari sistem ekonomi (dalam hal ini model IS-LM) adalah sekitar 9.

Berikut ini hasil plotting time series dari **Contoh**:

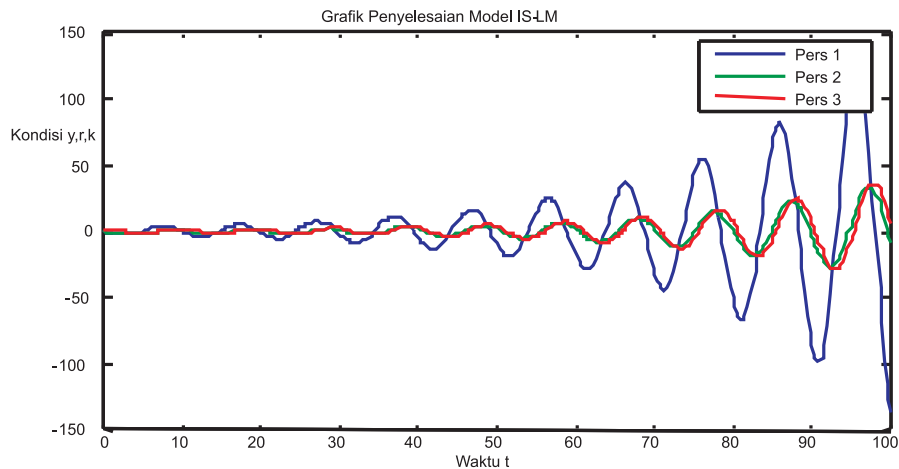


Gambar 1. Grafik kestabilan Model IS-LM pada $T_{bif} = 0.740471$, dengan history $[0.5; 0.015; 1.25]$

Untuk T diluar $T_{bif} = 0.740471$, grafiknya sebagai berikut:

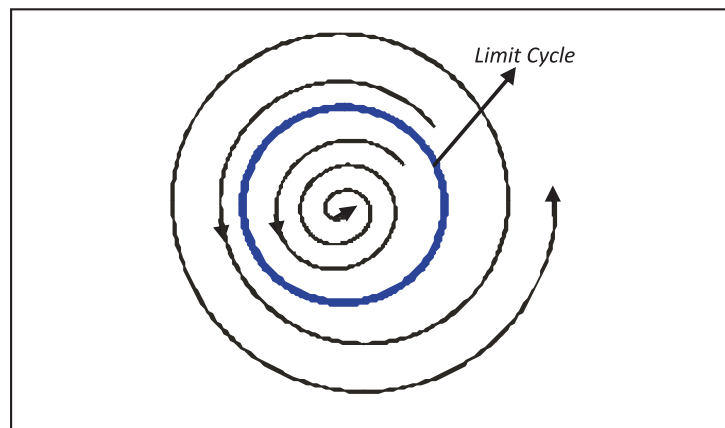


Gambar 2. Grafik kestabilan Model IS-LM pada $T = 0.4$, dengan history $[0.5; 0.015; 1.25]$



Gambar 3. Grafik kestabilan Model IS-LM pada $T = 1$, dengan history $[0.5; 0.015; 1.25]$

Gambar 1. menunjukkan terjadi *limit cycle* pada $\omega = 0.740471$, hal ini menggambarkan periode dari model IS-LM sekitar 9. Gambar 2. menunjukkan struktur orbit di dalam *limit cycle* akan menjauhi *limit cycle* (terlihat bahwa osilasinya teredam), sedangkan Gambar 3 menunjukkan struktur orbit di luar *limit cycle* akan menjauhi *limit cycle* (osilasinya semakin membesar). Secara sederhana dapat digambarkan bahwa *limit cycle*-nya tidak stabil (Gambar 4.).



Gambar 4. Ilustrasi sederhana dari *limit cycle* yang tidak stabil

Lingkaran biru menunjukkan limit cycle dari model IS-LM (Gambar 1), sedangkan orbit spiral di dalam limit cycle menunjukkan Gambar 2 dan orbit spiral di luar limit cycle menunjukkan Gambar 3. Sehingga dapat dikatakan bahwa bifurkasi Hopf yang terjadi dalam **Contoh** merupakan bifurkasi Hopf Subkritisal (tidak stabil).

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari analisa dan aplikasi bifurkasi Hopf pada model siklus bisnis IS-LM adalah

1. Dari model diperoleh persamaan karakteristik yang tidak dapat diselesaikan secara eksak, sehingga perlu pendekatan lain yaitu pendekatan linear dan pendekatan dalam ruang kompleks (analisa bifurkasi Hopf).
2. Dengan pendekatan linear diperoleh tiga nilai eigen dengan sepasang nilai eigen kompleks yang bagian realnya nol atau imajiner murni yang merupakan syarat terjadinya bifurkasi Hopf. Dan dengan terpenuhinya syarat transversal yaitu

$$\operatorname{Re} \left(\left. \frac{d}{dT}(\lambda_1(T)) \right|_{T=T_0} \right) \neq 0,$$

maka bifurkasi Hopf terjadi pada nilai $T = T_0$ yang menjamin adanya *limit cycle* pada nilai ini.

3. Pada pendekatan dalam ruang kompleks (analisa bifurkasi Hopf), bifurkasi Hopf terjadi pada saat T melewati T_{bif} .

4.2. Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dianalisa di bidang mana letak dari *limit cycle* yaitu dengan analisa *center manifold*.

Daftar Pustaka

- [1] Cai, J. (2005). *Hopf Bifurcation in The IS-LM Business Cycle Model with Time Delay*. Electronic Journal of Differential Equations. 15. 1-6.
- [2] Cronin, J., (1994). *Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory*. Second Edition. Marcel Dekker, Inc. New York.
- [3] Deo, S.G., Raghavendra, V. (1980). *Ordinary Differential Equations and Stability Theory*. Tata McGraw-Hill. New Delhi.
- [4] Golubitsky, M., Dellnitz, M. (1998). *Linear Algebra and Differential Equations Using Matlab*. Brooks/Cole Publishing Company. California.
- [5] Guckenheimer, J. dan Holmes, P. (1990). *Nonlinear Oscillations Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields*. Springer-Verlag. New York.
- [6] Hale, J.K., Lunel, S.M.V. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [7] Kalecki, M. (1935). *A Macrodynamical Theory of Business Cycle*. *Econometrica*. 3. 327-344.
- [8] Khan, Q.J.A. (2000). *Hopf Bifurcation in Multiparty Political Systems with Time Delay in Switching*. *Applied Mathematics Letters*. 13. 43-52.

- [9] Krawiec,A. Szydłowski,M. (2001). *The Kaldor-Kalecki Model of Business Cycle as A Two-dimensional Dynamical System*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 8. 266-271.
- [10] Kuang, Y. (1993). *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc. New York.
- [11] Neamtu,M., Opris,D., Chilarescu,C. (2005). *Hopf Bifurcation in A Dynamic IS-LM Model with Time Delay*. arXiv:math.DS/0511322. 1. 1-13
- [12] Perko,L. (1998). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Second Edition. Springer-Verlag New York,Inc
- [13] Subiono. (2003). *Matematika Sistem*. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.
- [14] Torre,V. (1977). *Existence of Limit Cycle and Control in Complete Keynesian Systems by Theory of Bifurcation*. Econometrica. 45. 1457-1466.
- [15] Wiggins,S.(1990). *Introduction to Applied Non Linear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. Springer - Verlag. New York