Jurnal Matematika Vol. 2 No. 1, Juni 2012. ISSN : 1693-1394

APLIKASI METODE KHUN-TUCKER DALAM PENJUALAN OLI MOBIL (Studi Kasus : PT. Anugrah Mitra Dewata)

Ni Made Asih
e-mail: sedhana2@gmail.com
I Nyoman Widana
e-mail: nwidana@yahoo.com

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Udayana

Abstract: Aplikasikan Metode Khun-Tucker dalam kasus penjualan oli mobil pada PT. Anugrah Mitra Dewata merupakan salah satu kasus optimasi bersyarat, untuk mengetahui oli apa yang harus diproduksi oleh perusahaan, agar mencapai keuntungan maksimal dan nilai-nilai ekstrim yang akan diperoleh, yang nantinya berperan dalam menentukan tingkat keuntungan yang diperoleh perusahaan. Metode Khun-Tucker ini dapat dipergunakan untuk mencari solusi optimal dari suatu fungsi tanpa memandang sifat apakah linier atau nonlinier. Dalam proses pengerjaannya Metode Khun-Tucker secara esensial melibatkan langkah-langkah yang sama seperti halnya Merode Lagrange, yaitu: Membentuk Lagrangian untuk dapat menghitung titik-titik kritisnya, mencari semua solusi (x, λ), dan menghitung nilai $f(x)$. Dalam proses pencarian semua solusi x dan λ nya dibantu dengan menggunakan program MATLAB. Hasil penelitian menunjukkan pada caturwulan I dengan memproduksi oli SMO HP sebanyak 587 liter diperoleh keuntungan maksimal perusahaan sebesar Rp 19.837.000 . Untuk caturwulan II dengan memproduksi oli SMO HP PLUS sebanyak 776 liter diperoleh keuntungan maksimal perusahaan sebesar Rp 20.112.000. Untuk caturwulan III dengan memproduksi oli SMO HP sebanyak 470 liter diperoleh keuntungan maksimal perusahaan sebesar Rp 20.029.000.

Keywords: Khun-Tucker, nilai ekstrim, titik kritis, Lagrangian.

1. Pendahuluan

Matematika adalah suatu cabang logika yang menyediakan suatu kerangka sistematis. Dalam matematika, definisi, aksioma, dan anggapan-anggapan dinyatakan secara tepat dengan mengunakan lambang-lambang sedangkan kesimpulannya dapat ditarik dengan proses analisis deduktif. Sedangkan ilmu ekonomi adalah ilmu yang memusat pada konsep-konsep kuantitatif, misalnya: harga, biaya, tingkat upah, investasi, penghasilan, dan laba (Ridwan [6]). Dari kedua hal di atas dapat disimpulkan bahwa analisis ekonomi tidak bisa dilepaskan dari matematika. Apabila variabel ekonomi dinyatakan dengan lambang-lambang maka nilainya dinyatakan secara matematis. Matematika menyediakan teknik untuk menganalisis arti diantara lambang-lambang tersebut, yang berarti juga arti dari variabel-variabel yang diwakilinya. Oleh karena itu banyak analisis ekonomi yang kemudian menggunakan analisis matematika terapan.

Dalam ekonomi dikenal juga masalah optimasi (masalah yang berhubungan dengan keputusan yang terbaik, maksimum, minimum dan yang paling baik). Dalam kehidupan sehari-hari, baik disadari maupun tidak, sebenarnya orang selalu melakukan optimasi untuk memenuhi kebutuhanya. Tetapi optimasi yang dilakukan masyarakat awam lebih banyak dilandasi oleh intuisi daripada teori optimasi.

Pada diferensial fungsi majemuk telah dikenal konsep diferensial parsial. Dalam diferensial fungsi majemuk juga dapat dilakukan penyelidikan mengenai kedudukan khusus dari sebuah fungsi seperti halnya diferensial pada sebuah fungsi dengan satu variabel bebas. Nilai-nilai ekstrim (maksimum atau minimum) dari sebuah fungsi majemuk dapat dicari dengan menggunakan konsep diferensial parsial.

Dalam penerapannya sering kali diharuskan untuk mengoptimumkan (menentukan nilai ekstrim) dari sebuah fungsi, yakni menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi, tetapi ada syarat yang harus dipenuhi. Dengan kata lain fungsi yang hendak dioptimumkan menghadapi suatu kendala (*constraint*). Kasus optimasi bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. Misalnya seseorang hendak memaksimumkan utilitas, atau tingkat kepuasannya tetapi terikat pada fungsi pendapatan, atau sebuah perusahaan yang ingin memaksimumkan labanya namun terikat pada fungsi produksi. Maka suatu cara yang dapat digunakan untuk menentukan titik ekstrim dari suatu fungsi yang bersyarat adalah dengan menggunakan metode Khun-Tucker, metode Khun-Tucker dapat berbentuk linier atau nonlinier. Berdasarkan latar belakang tersebut di atas, permasalahan dalam penelitian ini adalah: Bagaimana model fungsi tujuan serta fungsi kendala yang diperoleh dari pengiriman oli mobil? dan Bagaimana bentuk penyelesaian setelah diperoleh model fungsi tujuan beserta fungsi kendalanya dengan menggunakan metode Khun-Tucker?.

Tujuan dari penelitian ini adalah: (1) Mengetahui model fungsi tujuan serta fungsi kendala yang diperoleh dari pengiriman oli mobil dan (2) Mengetahui bentuk penyelesaian setelah model fungsi tujuan beserta fungsi kendalanya diperoleh.

Khun-Tucker (1951), mengemukakan suatu teknik optimasi yang dapat digunakan untuk pencarian titik optimum dari suatu fungsi yang berkendala. Metode Khun-Tucker ini dapat dipergunakan untuk mencari solusi yang optimum dari suatu fungsi tanpa memandang sifat apakah linier atau nonlinier. Jadi metode Khun-Tucker ini bersifat teknik yang umum dalam pencarian titik optimum dari setiap fungsi. Metode Khun-Tucker dapat digunakan untuk memecahkan persoalan baik yang nonlinier maupun linier. Jika kita menghadapi masalah optimasi dalam bentuk :

$$
\begin{aligned}
\text{Maksimumkan/Minimumkan} \quad &: \quad Z = f(x) \text{ dengan } X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^t \qquad (1)\\
\text{dengan kendala} \quad &: \quad g_i(X) \leq / \geq \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \cdots, m\\
& \quad\;\; X \geq 0\\
& \quad\;\; m \leq n \text{ (jumlah kendala lebih kecil dari variabel)}
\end{aligned}
$$

Pertama tuliskan kembali persyaratan-persyaratan yang tak negatif seperti $-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, \cdots, -x_n \leq 0$, sehingga himpunan kendalanya adalah $m+n$ persyaratan ketidaksamaan yang masing-masing dengan tanda lebih kecil dari pada atau sama dengan. Kemudian tambahkan variabel-variabel kurang $x_{n+1}^2, x_{n+2}^2, \cdots, x_{2n+m}^2$ berturut-turut pada ruas kiri dari kendala-kendala tadi, yang dengan demikian merubah tiap-tiap ketidaksamaan menjadi suatu kesamaan. Variabel-variabel kendur (*slack variabel*) yang ditambahkan disini berbentuk suku-suku kuadrat untuk menjamin bahwa mereka tak negatif. Kemudian bentuk fungsi Lagrange:

$$L = f(X) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(X) - x_{n+i}^2] - \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_1 [-x_i + x_{n+i}^2] \qquad (2)$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m+n}$ adalah pengali-pengali Lagrange. Terakhir selesaikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0 \qquad (j = 1, 2, , 2n + m) && (3)\\ \frac{\partial L}{\lambda_i} &= 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m + n) && (4)\\ \lambda_i &\geq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m + n) && (5) \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan (3),(4),(5) membentuk Persyaratan Khun-Tucker untuk aksimasi / minimasi program linier dan nonlinier.

Syarat *Khun-Tucker* untuk persamaan:

$$\begin{aligned} \text{Minimumkan} \quad & f = f(X) \text{ dengan } X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^t \\ \text{Kendala} \quad & g_j(X) \leq, \text{ dengan } j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam satu set pernyataan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i} &= 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n && (6)\\ \lambda_j g_j &= 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ g_j &\leq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \\ \lambda_j &\geq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m && (7) \end{aligned}$$

Catatan:

(i) Jika permasalahannya adalah memaksimumkan bukan meminimumkan seperti pada pers.(2.20), maka $\lambda_j \leq 0$.
(ii) Jika kendalanya adalah $g_j \geq 0$, maka $\lambda_j \leq 0$.
(iii) Jika permasalahannya adalah memaksimumkan dan jika kendalanya adalah $g_j \geq 0$, maka $\lambda_j \geq 0$.

Menentukan nilai *optimum* (nilai *maksimum* atau nilai *minimum*) suatu fungsi matematika multivariabel dalam teori optimasi dengan domain atau kendala (*constrains*) berupa suatu persamaan adalah suatu masalah optimasi yang sering ditemukan dalam teori maksimum dan minimum yang terdapat dalam kalkulus. Adapun metode matematika untuk hal tersebut dapat digunakan metode pengali Lagrange (Purcell,[5]). Sedangkan menentukan nilai optimum suatu fungsi matematika multivariabel dengan kendala berupa suatu pertidaksamaan adalah suatu hal khusus yang perlu dipelajari lebih lanjut dalam teori optimasi, diantaranya Metode Faktor Pengali *Khun-Tucker* adalah suatu metode didalam menentukan nilai optimum suatu fungsi dengan domain atau kendala berupa suatu pertidaksamaan.

Prosedur menggunakan metode Khun-Tucker untuk memecahkan suatu masalah optimasi dengan kendala berupa pertidaksamaan, secara esensial melibatkan langkah-langkah yang sama seperti halnya dalam menggunakan metode Lagrange untuk memecahkan masalah optimasi dengan kendala berupa persamaan, yaitu:

1. Bentuklah suatu '*Lagrangian*' L, maka kita dapat menghitung titik-titik kritisnya dan akhirnya kita dapat menguji nilai untuk fungsi objetif pada setiap titik kritisnya dan akhirnya kita dapat menguji nilai untuk fungsi objektif pada setiap titik-titik kritis tersebut dan menentukan titik dari titik-titik kritis tersebut yang memuat nilai fungsi objektif optimal. Jadi dalam hal ini dibentuk suatu fungsi Lagrange, yang didefinisikan dengan

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i h_i(x)$$

Selanjutnya, optimumkan fungsi objetif $f(x)$ terhadap $x \in \Delta$, misalkan akan kita gunakan dalam masalah maksimasi, yaitu maksimasi $f(x)$ terhadap $x \in Delta = U \cap \{x|h(x) \geq 0\}$.

2. Mencari semua solusi (x, λ) dalam himpunan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) &= 0, j = 1, \cdots, n && (8) \\ \text{dengan} & && (9) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) &\geq 0, \lambda_i \geq 0 \\ \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) &= 0, i = 1, \cdots, l && (10) \end{aligned}$$

Setiap solusi dari sistem persamaan ini, selanjutnya disebut titik kritis dari L. Perlu diketahui bahwa persamaan-persamaan yang mendefinisikan titik-titik kritis dari L berbeda dengan titik-titik yang bersesuaian dalam masalah dengan kendala persamaan. Selanjutnya kita misalkan M menotasikan himpunan titik-titik kritis dari L untuk $x \in U$, yaitu $M = \{(x, \lambda)|(x, \lambda)$ adalah titik kritis dari L dan $x \in U\}$.

3. Sebagai langkah terakhir, kita hitung nilai dari f pada setiap titik x dalam himpunan $\{x|$ ada λ sedemikian hingga $(x, \lambda) \in M\}$. Khususnya nilai x yang memaksimumkan f atas himpunan ini. Adapun prosedur langkah penggunaaan metode Khun-Tucker untuk masalah minimasi adalah sama prosedurnya dengan masalah maksimasi di atas, hanya saja dalam masalah minimasi.

2. Metode Penelitian

Data dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diperoleh dari PT. Anugrah Mitra Dewata yang merupakan distributor tunggal oli TOP 1 di Bali, dengan periode data 1 tahun (1 Pebruari 2010-28 Pebruari 2011). Variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Jenis Oli, yaitu oli TOP 1 yang dipergunakan untuk mobil, yang di distribusikan oleh PT. Anugrah Mitra Dewata dalam periode 1 tahun (1 Pebruari 2010-28 Pebruari 2011).
2. Harga oli, yaitu harga oli TOP 1 yang dipergunakan untuk mobil, yaitu meliputi (harga produksi oli dan harga pengambilan/pengiriman oli), yang didistribusikan oleh PT. Anugrah Mitra Dewata dalam periode 1 tahun (1 Pebruari 2010-28 Pebruari 2011).

Metode analisis data yang digunakan adalah metode deskriptif. Penelitian deskriptif yaitu penelitian yang berusaha untuk menjelaskan pemecahan masalah yang ada berdasarkan data. Penelitian ini juga menyajikan data, menganalisis, dan menginterpretasi. Tahapan analisis data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memodelkan persoalan optimasi keuntungan pengiriman oli TOP 1 kedalam sistem persamaan linier.
   a. Variabel keputusan :
      X_1 = Tingkat permintaan oli SMO HP
      X_2 = Tingkat permintaan oli SMO HP PLUS
      X_3 = Tingkat permintaan oli SDO HD
      X_4 = Tingkat permintaan oli SGO MB
      X_5 = Tingkat permintaan oli ATF
      X_6 = Tingkat permintaan oli ZENZATION
   b. Fungsi tujuan
      Tujuan yang ingin dicapai oleh perusahaan adalah untuk memaksimumkan keuntungan. Keuntungan diperoleh dari selisih antara harga pengiriman /pengambilan dengan harga produksi oli sampai pengiriman ke tempat tujuan (bengkel). Fungsi tujuan yang dapat dibentuk yaitu :

      $$\text{maks } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + C_5X_5 + C_6X_6$$

      dengan:
      C_1 = Tingkat keuntungan oli SMO HP/liter.
      C_2 = Tingkat keuntungan oli SMO HP PLUS/liter.
      C_3 = Tingkat keuntungan oli SDO HD/liter.
      C_4 = Tingkat keuntungan oli SGO MB/liter
      C_5 = Tingkat keuntungan oli ATF/liter.
      C_6 = Tingkat keuntungan oli ZENZATION/liter.
   c. Fungsi batasan
      Batasan yang diambil dalam masalah ini adalah jumlah keenam jenis oli untuk masing-masing bengkel, dan jumlah masing-masing oli untuk semua bengkel dengan kapasitas pengiriman yang dapat dilakukan oleh perusahaan. Kapasitas pengiriman perusahaan yang tersedia untuk keenam jenis

oli selama 1 bulan adalah 1344 liter, dengan batasan non nagatif adalah $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$.

Tabel 1. Bentuk Baku Data Pengiriman Oli TOP 1 Per Liter

Bengkel	Koef X_1	Koef X_2	Koef X_3	Koef X_4	Koef X_5	Koef X_6
Global motor	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
Sugeng motor	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
Sinar jaya auto	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
Gede jaya motor	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
Uluwatu motor	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
Surya auto motor	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}
Tunggal jaya	a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}
Wina motor	a_{81}	a_{82}	a_{83}	a_{84}	a_{85}	a_{86}
Bengkel wayan	a_{91}	a_{92}	a_{93}	a_{94}	a_{95}	a_{96}
Sari hati motor	a_{101}	a_{102}	a_{103}	a_{104}	a_{105}	a_{106}
We kadja	a_{111}	a_{112}	a_{113}	a_{114}	a_{115}	a_{116}

Jadi dapat di bentuk fungsi batasan, yaitu :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 &\leq p1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 &\leq p_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 &\leq p_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 &\leq p_4 \\
a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 &\leq p_5 \\
a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 &\leq p_6 \\
a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 &\leq p_7 \\
a_{81}x_1 + a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 &\leq p_8 \\
a_{91}x_1 + a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 &\leq p_9 \\
a_{101}x_1 + a_{102}x_2 + a_{103}x_3 + a_{104}x_4 + a_{105}x_5 + a_{106}x_6 &\leq p_{10} \\
a_{111}x_1 + a_{112}x_2 + a_{113}x_3 + a_{114}x_4 + a_{115}x_5 + a_{116}x_6 &\leq p_{11} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x4 + x5 + x6 &\leq 1344
\end{aligned}
$$

Dapat dilihat bentuk baku tabel dan fungsi batasan pengiriman oli yang dilakukan distributor ke bengkel-bengkel selama 1 bulan dalam kurun waktu 1 tahun. "a" adalah koefisien dari X yang diperoleh dari membagi masing-masing oli yang dipesan oleh bengkel dengan total oli yang dipesan dari semua bengkel . Dalam hal ini fungsi batasan yang akan diperoleh sebanyak 144 kendala, untuk itu fungsi batasan yang diperoleh selama 1 tahun akan dipartisi menjadi 3 bagian, dimana masing-masing bagian terdiri dari 4 bulan (caturwulan).

2. Menyelesaikan persoalan optimalisasi dengan metode Khun-Tucker dengan bantuan softwere matlab, sehingga diperoleh nilai X^*, λ^* dan $F(x)$.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Memodelkan Data Pengiriman Oli ke Dalam Sistem Persamaan linier

Berdasarkan variable keputusan dari masing-masing oli, kemudian dibentuk fungsi tujuan. Fungsi tujuan diperoleh dari selisih antara harga produksi dengan harga pengambilan/pengiriman oli sampai ke tempat tujuan. Adapun harga produksi dan harga pengiriman oli sebagai berikut:

Tabel 2. Selisih Harga Produksi dengan Biaya Pengambilan/Pengiriman Oli Rp/liter

Jenis Oli	Produksi (Rp)	Peng-ambil/kirim(Rp)	Selisih (Rp)
SMO HP	33040	47200	14160
SMO HP PLUS	39060	55800	16740
SDO HD	30030	42900	12870
SGO MB	32270	46100	13830
ATF	33810	48300	14490
ZENZATION	48020	68600	20580

Sumber : Data Distributor PT. Anugrah Mitra Dewata

Maka dari selisih harga yang diperoleh diatas dapat dibentuk fungsi tujuan berikut:

$$\text{maks} F(X) = 14.160X_1 + 16.740X_2 + 12.870X_3 + 13.830X_4 + 14.490X_5 + 20.580X_6$$

3.2. Menentukan Fungsi Batasan

Batasan yang diambil dalam masalah ini adalah jumlah keenam jenis oli untuk masing-masing bengkel, dan jumlah masing-masing oli untuk semua bengkel dengan kapasitas pengiriman yang dilakukan distributor. Kapasitas pengiriman distributor yang tersedia untuk keenam jenis oli, selama 1 bulan adalah 1344 liter. Dalam hal ini akan dicari fungsi batasan untuk masing-masing bulan, sehingga untuk fungsi batasannya akan berbeda-beda tiap bulannya, namun untuk fungsi tujuan tiap bulannya tetap. Nilai-nilai konstanta fungsi batasan masih berupa data mentah. Fungsi batasan untuk masing-masing bulan dalam 1 tahun tidak disajikan dalam tulisan ini.

Kemudian dari fungsi batasan selama 1 tahun tersebut akan dikelompokkan menjadi 3 bagian, 1 bagian terdiri dari caturwulan. Sehingga diperoleh model fungsi batasan baru dari 3 caturwulan tersebut. Berikut model fungsi batasan berdasarkan data tabel dari 3 caturwulan setelah dilakukan pengelompokkan.

Model fungsi batasan untuk caturwulan I (Februari, Maret, April, Mei)

$$\begin{aligned}
0.091X_1 + 0.109X_2 + 0.125X_3 + 0.097X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 126\\
0.051X_1 + 0.130X_2 + 0X_3 + 0.139X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 960.101\\
X_1 + 0.087X_2 + 0.140X_3 + 0.111X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 132\\
0.051X_1 + 0.087X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0.545X_5 + 0X_6 &\leq 72\\
0.040X_1 + 0.065X_2 + 0.143X_3 + 0X_4 + 0.455X_5 + 0X_6 &\leq 81\\
0.081X_1 + 0.109X_2 + 0.125X_3 + 0.056X_4 + 0X_5 + 0.053X_6 &\leq 114\\
0.091X_1 + 0.087X_2 + 0.143X_3 + 0.139X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 132\\
0.101X_1 + 0.152X_2 + 0X_3 + 0.111X_4 + 0X_5 + 0.263X_6 &\leq 141\\
0.202X_1 + 0.087X_2 + 0.179X_3 + 0.111X_4 + 0X_5 + 0.368X_6 &\leq 219\\
0.121X_1 + 0.087X_2 + 0X_3 + 0.097X_4 + 0X_5 + 0.263X_6 &\leq 132\\
0.071X_1 + 0X_2 + 0.143X_3 + 0.139X_4 + 0X_5 + 0.053X_6 &\leq 99\\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 &\leq 1344\\
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

Model fungsi batasan untuk caturwulan II (Juni, Juli, Agustus, September)

$$\begin{aligned}
0.068X_1 + 0.102X_2 + 0.156X_3 + 0.107X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 120\\
0.057X_1 + 0.082X_2 + 0X_3 + 0.133X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 84\\
0.080X_1 + 0.102X_2 + 0.125X_3 + 0.107X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 120\\
0.057X_1 + 0.082X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0.462X_5 + 0X_6 &\leq 72\\
0.057X_1 + 0.082X_2 + 0.156X_3 + 0X_4 + 0.538X_5 + 0X_6 &\leq 105\\
0.080X_1 + 0.082X_2 + 0.125X_3 + 0.107X_4 + 0X_5 + 0.227X_6 &\leq 129\\
0.080X_1 + 0.102X_2 + 0.156X_3 + 0.107X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 126\\
0.125X_1 + 0.122X_2 + 0X_3 + 0.133X_4 + 0X_5 + 0.227X_6 &\leq 147\\
0.193X_1 + 0.122X_2 + 0.125X_3 + 0.107X_4 + 0X_5 + 0.182X_6 &\leq 198\\
0.114X_1 + 0.122X_2 + 0X_3 + 0.107X_4 + 0X_5 + 0.182X_6 &\leq 132\\
0.091X_1 + 0X_2 + 0.156X_3 + 0.093X_4 + 0X_5 + 0.182X_6 &\leq 111\\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 &\leq 1344\\
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

Model fungsi batasan untuk caturwulan III (Oktober, November, Desember, Januari)

$$\begin{aligned}
0.071X_1 + 0.111X_2 + 0.118X_3 + 0.100X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 114\\
0.059X_1 + 0.111X_2 + 0X_3 + 0.125X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 90\\
0.047X_1 + 0.111X_2 + 0.118X_3 + 0.100X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 102\\
0.059X_1 + 0.089X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0.462X_5 + 0X_6 &\leq 72\\
0.059X_1 + 0.089X_2 + 0.147X_3 + 0X_4 + 0.538X_5 + 0X_6 &\leq 105\\
0.071X_1 + 0.111X_2 + 0.176X_3 + 0.150X_4 + 0X_5 + 0.222X_6 &\leq b156\\
0.094X_1 + 0.089X_2 + 0.206X_3 + 0.100X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\leq 138\\
0.165X_1 + 0.089X_2 + 0X_3 + 0.125X_4 + 0X_5 + 0.148X_6 &\leq 150\\
0.247X_1 + 0.111X_2 + 0.118X_3 + 0.100X_4 + 0X_5 + 0.185X_6 &\leq 219\\
0.047X_1 + 0.089X_2 + 0X_3 + 0.100X_4 + 0X_5 + 0.222X_6 &\leq 90\\
0.082X_1 + 0X2 + 0.118X_3 + 0.100X_4 + 0X_5 + 0.222X_6 &\leq 108\\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 &\leq 1344\\
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

3.3. Pengolahan Data

Dari model fungsi batasan di atas, kemudian dilakukan pencarian nilai X^*dan λ^* dengan menggunakan bantuan softwere matlab. Setelah data diinput pada program matlab, output untuk caturwulan I dihasilkan nilai $X*$ dan λ^*, namun dalam hal ini terdapat 2 lamda yang berperan yaitu lamda ineqlin karena dalam kasus ini semua fungsi batasannya merupakan pertidaksamaan, dan lamda upper karena kasusnya adalah memaksimumkan $F(x)$ dan lamda inilah yang menjadi syarat *Khun-Tucker* atau disebut λ^*. Apabila dilihat nilai X^* maka untuk x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 yaitu masing-masing (586.5140, 279.5016, 171.5760, 213.5521, 32.6076, 59.2151), sedangkan $\lambda*$ yaitu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 masing-masing (0, 0, 0, 0, 0, 0), dan $F(x) = -1.9837 \times 10^7$. Dengan X^*, λ^* dan $F(x)$ yang telah diperoleh, telah memenuhi syarat *Khun-Tucker* yaitu:

Maksimumkan $F(x)$, dengan syarat:

(i)	$\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{g_j}{\partial x_j} = 0$	; $i = 1, 2, \cdots, 6$
(ii)	$\lambda_j g_j = 0$	; $j = 1, 2, \cdots, 11$
(iii)	$g_j \leq 0$	; $j = 1, 2, \cdots, 11$
(iv)	$\lambda_j \leq 0$	; $j = 1, 2, \cdots, 11$

Sehingga dapat disimpulkan, untuk nilai optimum pengiriman oli meliputi oli (SMO HP, SMO HP PLUS, SDO HD, SGO MB, ATF, ZENZATION) yaitu masing-masing (119.9395 liter, 775.5155 liter, 209.8816 liter, 0 liter, 3.4008 liter, 130.2968 liter), Sedangkan untuk λ ineqlin yaitu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, λ_7, λ_8, λ_9, λ_{10}, λ_{11}, λ_{12} masing-masing $(3.8390 \times 10^4, 0, 0, 2.6341 \times 10^4, 0.4313 \times 10^4, 4.9666 \times 10^4, 0, 0, 0, 5.1130 \times 10^4, 0, 0)$. $\lambda*$ yaitu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 masing-masing $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Dan fungsi tujuan/keuntungan yang diperoleh adalah $F(x) = -2.0112 \times 10^7$ karena sebelumnya kita ubah fungsi tujuannya menjadi minimasi dengan cara mengalikannya dengan -1, maka didapat fungsi obyektif bernilai negatif. Selanjutnya kita harus kalikan hasil ini dengan -1 agar memperoleh fungsi obyektif bernilai positif, sehingga keuntungannya Rp.20.112.000.

Sedangkan untuk input data caturwulan III, yang diolah dengan bantuan program matlab, dihasilkan output nilai X^* dan λ^*. Apabila dilihat nilai X^* maka untuk x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 yaitu masing-masing $(469.6155, 452.0876, 252.0876, 0, 0, 124.7400)$. Sedangkan λ^* yaitu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 masing-masing $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ dan $F(x) = -2.0029 \times 107$. Dengan X^*, λ^* dan $F(x)$ yang telah diperoleh, telah memenuhi syarat Khun-Tucker yaitu :

Maksimumkan $F(x)$, dengan syarat:

(i) $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{g_j}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots, 6$

(ii) $\lambda_j g_j = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, 11$

(iii) $g_j \leq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, 11$

(iv) $\lambda_j \leq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, 11$

Sehingga dapat disimpulkan, untuk nilai optimum pengiriman oli meliputi oli (SMO HP, SMO HP PLUS, SDO HD, SGO MB, ATF, ZENZATION) yaitu masing-masing (469.6155 liter, 452.0876 liter, 252.0876 liter, 0 liter, 0 liter, 124.7400 liter), Sedangkan untuk λ^* yaitu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, λ_7, λ_8, λ_9, $\lambda_1 0$, $\lambda_1 1$, $\lambda_1 2$ masing-masing $(0, 0, 4.2998 \times 10^4, 0, 2.9760 \times 10^4, 0, 0, 0, 2.8995 \times 10^4, 6.8540 \times 10^4, 0, 0)$. λ^* yaitu λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 masing-masing $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Dan fungsi tujuan/keuntungan yang diperoleh adalah $F(x) = -2.0029 \times 10^7$ karena sebelumnya kita ubah fungsi tujuannya menjadi minimasi dengan cara mengalikannya dengan -1, maka didapat fungsi obyektif bernilai negatif. Selanjutnya kita harus kalikan hasil ini dengan -1 agar memperoleh fungsi obyektif bernilai positif, sehingga keuntungannya Rp. 20.029.000.

Dari ketiga caturwulan, data dapat dilihat dalam bentuk Tabel 3.

Tabel 3. Hasil Output Pengiriman Oli

	Caturwulan	**Jenis Oli X* (liter)**	**F(x)(Rp)**
I	(Feb, Mar, Apr, Mei)	SMO HP = 586.5140	**19.837.000**
		SMO HP PLUS = 279.5016	
		SDO HD = 171.5760	
		SGO MB = 213.5521	
		ATF = 32.6076	
		ZENZATION = 59.2151	
II	(Jun, Jul, Agu, Sep)	SMO HP = 119.9395	**20.112.000**
		SMO HP PLUS = 775.5155	
		SDO HD = 209.8816	
		SGO MB = 0	
		ATF = 3.4008	
		ZENZATION = 130.2968	
III	(Okt, Nop, Des, Jan)	SMO HP = 469.6155	**20.029.000**
		SMO HP PLUS = 452.0876	
		SDO HD = 252.0876	
		SGO MB = 0	
		ATF = 0	
		ZENZATION = 124.7400	

Sumber : Data Diolah, 2011

4. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, diperoleh suatu kesimpulan sebagai berikut :

1. Diperoleh model fungsi tujuan memaksimumkan $F(X)$ sebagai berikut.

$$F(X) = 14.160X_1 + 16.740X_2 + 12.870X_3 + 13.830X_4 + 14.490X_5 + 20.580X_6$$

2. Untuk caturwulan I oli yang terlaris pengirimannya adalah oli SMO HP dengan jumlah pengiriman sebanyak 587 liter dengan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan sebesar Rp 19.837.000. Untuk caturwulan II oli yang terlaris pengirimannya adalah oli SMO HP PLUS dengan jumlah pengiriman sebanyak 776 liter dengan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan sebesar Rp 20.112.000. Untuk caturwulan III oli yang terlaris pengirimannya adalah oli SMO HP dengan jumlah pengiriman sebanyak 470 liter dengan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan sebesar Rp 20.029.000.

Daftar Pustaka

[1] Amalia. 2009. *Peranan Persyaratan Karush-Khun-Tucker dalam Menyelesaikan Pemrograman Kuadratis*. Universitas Sumatra Utara. Medan.

[2] Hadley, G. 1992. *Aljabar Linier*. Jakarta: Erlangga.

[3] Leithod, L. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik* Edisi Kelima Terjemahan S.M. Nababan, dkk. Jakarta: Erlangga.

[4] Luknanto, J. 2000. *Pengantar Optimasi Nonlinier* . http://luk.staff.ugm.ac.id/optimasi/ pdf/nonlinier2003. Diunduh Tanggal 2 Pebruari 2011.

[5] Purcell, E.J.& D.Verberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis* Terjemahan I N. Susila., B. Kartasasmita, dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

[6] Ridwan. 2007. Optimasi Bersyarat dengan Menggunakan Multiplier Lagrange dan Aplikasinya pada Berbagai Kasus dalam Bidang Ekonomi Semarang: Universitas Negeri Semarang.

[7] Rao S.S. 1997. *Optimization Theory and Applications* Edisi Kedua". Dept of Mechanical Engg.San Diego State University. USA.