

**PEMODELAN ALJABAR *MAX-PLUS* DAN EVALUASI KINERJA
JARINGAN ANTRIAN *FORK-JOIN* TAKSIKLIK
DENGAN KAPASITAS PENYANGGA TAKHINGGA**

¹M. ANDY RUDHITO, ²SRI WAHYUNI, ³ARI SUPARWANTO, DAN ⁴F. SUSILO
¹Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FKIP Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
^{2,3}Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
⁴Jurusan Matematika, FST Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta
Email : ¹rudhito@staff.usd.ac.id, ²swahyuni@ugm.ac.id, ³ari_suparwanto@yahoo.com, ⁴fsusilo@staff.usd.ac.id

INTISARI

Makalah ini membahas tentang pemodelan dan penentuan waktu penyelesaian siklus (*cycle*) layanan jaringan antrian fork-join taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga, dengan menggunakan aljabar *max-plus*. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa dinamika jaringan antrian fork-join taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan matriks atas aljabar *max-plus*. Dapat ditunjukkan pula bahwa waktu siklus layanan jaringan antrian merupakan eigennilai *max-plus* dari matriks pada persamaan tersebut.

Kata kunci: aljabar max-plus, eigennilai max-plus, jaringan antrian fork-join, waktu penyelesaian siklus layanan.

**MAX-PLUS ALGEBRA MODELLING AND PERFORMANCE EVALUATION OF
QUEUEING NONCYCLIC FORK-JOIN NETWORK WITH INFITE BUFFER CAPACITY**

¹M. ANDY RUDHITO, ²SRI WAHYUNI, ³ARI SUPARWANTO, DAN ⁴F. SUSILO
¹PhD Students at Mathematics Department, FMIPA, UGM and Lecturer at FKIP, Sanata Dharma University, Yogyakarta
^{2,3}Mathematics Department, FMIPA, Gadjah Mada University, Yogyakarta
⁴Mathematics Department, FST, Sanata Dharma University, Yogyakarta
Email : ¹rudhito@staff.usd.ac.id, ²swahyuni@ugm.ac.id, ³ari_suparwanto@yahoo.com, ⁴fsusilo@staff.usd.ac.id

ABSTRACT

This paper aims to model and determine the service cycle completion time of noncyclic fork-join queueing networks with infinite buffer capacity, using max-plus algebra. The finding show that the dynamics of the noncyclic fork-join queueing networks with infinite buffer capacity can be modeled into a matrix equation over max-plus algebra. We can also show that the service cycle completion time of queueing networks is a max-plus eigenvalues of the matrix in the equation.

Keywords: max-plus algebra, max-plus eigenvalues, fork-join queueing networks, service cycle completion time.

1. PENDAHULUAN

Jaringan *fork-join* merupakan salah satu sistem antrian yang memungkinkan pelanggan (*customer*) terpecah menjadi beberapa bagian, dan digabung kembali menjadi satu setelah pelanggan melalui sistem tersebut. Sistem seperti ini banyak dijumpai pada proses produksi dalam industri, pengiriman pesan dalam jaringan komunikasi, dan pemrosesan data dalam sistem komputer multiprosesor. Sebagai gambaran dalam jaringan komunikasi, pesan terpecah menjadi paket-paket yang disampaikan melalui jalur

terpisah, kemudian digabungkan kembali di titik tujuan jaringan tersebut hingga diperoleh pesan seperti semula.

Dalam pembahasan jaringan antrian dapat diasumsikan bahwa kapasitas penyangga (*buffer*) takhingga atau berhingga. Pemodelan dinamika jaringan dengan menggunakan aljabar *max-plus* dapat memberikan deskripsi yang lebih kompak dan terpadu (Baccelli *et al.*, 1992). Di samping itu pemodelan ini juga memudahkan dalam hal komputasi numeriknya. Pemodelan jaringan antrian dengan menggunakan aljabar *max-plus* telah mulai

dibahas dalam Krivulin (1994, 1995, 1996a, 1996b). Dalam Krivulin (1994) telah dibahas pemodelan untuk antrian jenis G/G/1. Pemodelan dan evaluasi kinerja, yang meliputi waktu sistem pelanggan dan waktu tunggu pelanggan, untuk sistem antrian *tandem* telah dibahas dalam Krivulin (1995). Dalam literatur tersebut pembahasan secara eksplisit baru dibahas untuk sistem antrian *tandem* dengan kapasitas penyangga takhingga. Dalam Krivulin (1996a) untuk jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga telah diberikan persamaan dinamika keadaan (*state dynamic equation*) secara eksplisit, dan sistem antrian *tandem* dipandang sebagai kejadian khususnya. Persamaan keadaan dinamik secara eksplisit untuk jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga berhingga telah diberikan dalam Krivulin (1996b). Pemodelan yang dilakukan dalam Krivulin (1996a, 1996b), diasumsikan bahwa pada waktu awal jaringan beroperasi, penyangga tidak selalu kosong.

Makalah ini akan membahas pemodelan dan kinerja (*performance*) jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga, dengan kondisi pada awal jaringan beroperasi, penyangga dalam keadaan kosong. Pemodelan dilakukan dengan pendekatan aljabar *max-plus*. Kinerja jaringan yang dibahas adalah analisis waktu penyelesaian siklus layanan jaringan antrian dikaitkan dengan eigennilai aljabar *max-plus*.

2. ALJABAR MAX-PLUS DAN TEORI GRAF

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar *max-plus* dan kaitannya dengan teori graf yang akan digunakan dalam pembahasan untuk bagian-bagian selanjutnya. Materi lebih lengkap dapat dilihat pada Baccelli *et al.* (1992), Krivulin (1996b), dan Rudhito (2003).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan \mathbf{R} adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada \mathbf{R}_ε didefinisikan operasi berikut: $\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b := \max(a, b)$ dan $a \otimes b := a + b$. $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semigelanggang komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$, yaitu bahwa $\forall a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$ berlaku:

- i) $a \oplus b = b \oplus a$, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$,
 $a \oplus \varepsilon = a$.
- ii) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$, $a \otimes e = a + 0$
 $= a = 0 + a = e \otimes a$.
- iii) $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a$.
- iv) $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$, $a \otimes (b \oplus c)$
 $= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.
- v) $a \otimes b = b \otimes a$ dan $a \oplus a = a$.

Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semilapangan (*semifield*), yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semigelanggang (*semigelanggang*) komutatif dengan kondisi untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. $\mathbf{R}_{\max} := (\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan \mathbf{R}_{\max} . Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurang tidak dituliskan), operasi \otimes mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi \oplus . Pangkat k dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dinotasikan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$x^{\otimes 0} := 0$$

dan

$$x^{\otimes k} := x \otimes x^{\otimes k-1},$$

dan didefinisikan pula

$$\varepsilon^{\otimes 0} := 0$$

dan

$$\varepsilon^{\otimes k} := \varepsilon, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots$$

Operasi \oplus dan \otimes pada \mathbf{R}_{\max} di atas dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$. Khususnya untuk matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ didefinisikan

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

dan

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$,

$$(E)_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

dan matriks

$$\mathcal{E} \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}, (\mathcal{E})_{ij} := \varepsilon$$

untuk setiap i dan j . $(\mathbf{R}_{\max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semigelanggang (*semiring*) idempoten dengan elemen netral matriks \mathcal{E} dan elemen satuan matriks E . Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dalam aljabar *max-plus* didefinisikan dengan $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \dots$. Selanjutnya akibat sifat idempoten operasi \oplus , untuk setiap $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ berlaku $(E \oplus A)^q = E \oplus A \oplus \dots \oplus A^q$.

Suatu *graf berarah* \mathcal{G} didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ dengan \mathcal{V} adalah suatu himpunan berhingga takkosong yang anggotanya disebut *titik* dan \mathcal{A} adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota \mathcal{A} disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah \mathcal{G} adalah suatu barisan berhingga busur $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k,$

$i_{k+1}) \in A$ untuk suatu $l \in \mathbb{N}$ (= himpunan semua bilangan asli), dan $k = 1, 2, \dots, l - 1$. Untuk suatu lintasan ρ , panjang lintasan ρ didefinisikan sebagai banyak busur yang menyusun ρ dan dinotasikan dengan $|\rho|_l$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. *Sirkuit elementer* adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Suatu graf berarah $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $i, j \in V, i \neq j$, terdapat suatu lintasan dari i ke j . Suatu graf yang memuat sirkuit disebut *graf siklik*, sedangkan suatu graf yang tidak memuat sirkuit disebut *graf taksiklik*.

Untuk setiap graf berarah $G = (V, A)$ dengan n titik, didefinisikan suatu matriks $G \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, yang disebut dengan *matriks kedampingan* dari graf berarah G , dengan unsur-unsurnya adalah

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } (j, i) \in A; \\ \varepsilon, & \text{jika } (j, i) \notin A. \end{cases}$$

Diberikan graf berarah $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Graf berarah G dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in A$ dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij} . Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i) , dinotasikan dengan $w(j, i)$. Dalam penyajiannya dengan gambar untuk graf berarah berbobot, busur diberi label dengan bobotnya. Didefinisikan *graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ adalah graf berarah berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}, A = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$. Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot $G = (V, A)$ selalu dapat didefinisikan suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, dengan

$$A_{ij} = \begin{cases} w(j, i), & \text{jika } (j, i) \in A \\ \varepsilon, & \text{jika } (j, i) \notin A. \end{cases}$$

Jelas bahwa graf berarah berbobot tersebut merupakan graf preseden dari A .

Diberikan graf berarah berbobot $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$. *Bobot suatu lintasan* $\rho = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l$ didefinisikan sebagai jumlahan bobot busur-busur yang menyusun ρ . Bobot lintasan ρ dinotasikan dengan $|\rho|_w$. Untuk matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, bobot suatu lintasan $\rho = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l$ dalam graf preseden $G(A)$ adalah $|\rho|_w = A_{i_2, i_1} + A_{i_3, i_2} + \dots + A_{i_l, i_{l-1}}$. Bobot rata-rata lintasan ρ , dinotasikan dengan $|\bar{\rho}|$, didefinisikan sebagai

$$\frac{1}{|\rho|_l} |\rho|_w.$$

Berikut diberikan suatu interpretasi dalam teori graf untuk pangkat k matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dalam aljabar *max-plus*. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Jika $k \in \mathbb{N}$, maka unsur *ke-st* dari matriks $A^{\otimes k}$ adalah $(A^{\otimes k})_{st} = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (A_{s, i_{k-1}} + \dots + A_{i_2, i_1} + A_{i_1, t}) = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (A_{i_1, t} + A_{i_2, i_1} + \dots + A_{s, i_{k-1}})$ untuk setiap s, t . Karena $(A_{i_1, t} + A_{i_2, i_1} + \dots + A_{s, i_{k-1}})$ adalah bobot lintasan dengan panjang k dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya dalam $G(A)$, maka $(A^{\otimes k})_{st}$ adalah bobot maksimum semua lintasan dalam $G(A)$ dengan panjang k , dengan t sebagai titik awal dan s sebagai titik akhirnya. Jika tidak ada lintasan dengan panjang k dari t ke s , maka bobot maksimum didefinisikan sama dengan ε .

Sekarang diperhatikan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer, dengan maksimum diambil atas semua sirkuit elementer dalam graf. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan graf presedennya $G(A) = (V, E)$. Bobot maksimum dari semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $G(A)$ dituliskan sebagai $(A^{\otimes k})_{ii}$. Maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $G(A)$ atas seluruh titik i adalah $\bigoplus_{i=1}^n (A^{\otimes k})_{ii}$

yang dapat dituliskan sebagai $\text{trace}(A^{\otimes k})$ dan rata-ratanya adalah $(1/k) \text{trace}(A^{\otimes k})$. Kemudian diambil maksimum atas sirkuit dengan panjang $k \leq n$, yaitu atas semua sirkuit elementer, diperoleh suatu rumus untuk bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(A)$ (dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$), sebagai berikut: $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n [(1/k) \text{trace}(A^{\otimes k})]$.

Suatu sirkuit dalam graf G disebut *sirkuit kritis* jika bobot rata-ratanya sama dengan bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam G . Suatu graf yang terdiri dari semua sirkuit kritis dari graf G disebut *graf kritis* dari G dan dinotasikan dengan G^c .

Berikut diberikan definisi dan teorema yang pembuktiannya dapat dilihat dalam Rudhito (2003).

Teorema 1. (Baccelli, et al., 2001). *Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Jika semua sirkuit dalam $G(A)$ mempunyai bobot nonpositif, maka*

$$\forall p \geq n, A^{\otimes p} \preceq_m E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n-1}.$$

Bukti : lihat Baccelli *et al.* (2001) atau Rudhito (2003). ■

Berdasarkan Teorema 1 di atas didefinisikan operasi bintang (*) untuk matriks berikut ini.

Definisi 1. (Baccelli, *et al.*, 2001) Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot nonpositif. Didefinisikan

$$A^* := E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \dots$$

dan

$$A^+ := A \otimes A^*.$$

Definisi 2. (Eigennilai dan eigenvektor aljabar *max-plus*). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *eigennilai aljabar max-plus matriks A* jika terdapat suatu vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_{\max}^n$ dengan $\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1}$ sehingga $A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$. Vektor \mathbf{v} tersebut disebut *eigenvektor aljabar max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ* .

Berikut teorema yang memberikan eksistensi eigennilai aljabar *max-plus* untuk setiap $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$.

Teorema 2. (Baccelli, *et al.*, 2001). Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, merupakan suatu eigennilai aljabar *max-plus matriks A*.

Bukti:

lihat Baccelli, *et al.*, (2001) atau Rudhito (2003). ■

Dalam Rudhito (2003) dijelaskan bahwa jika titik i menyusun busur dalam sirkuit kritis ρ_0 dalam $\mathcal{G}(A)$, maka kolom ke- i matriks B^* merupakan eigenvektor yang bersesuaian dengan eigennilai $\lambda_{\max}(A)$, dengan $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, dan $B^* = E \oplus B \oplus \dots \oplus B^{\otimes n-1}$.

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan syarat perlu eigennilai aljabar *max-plus* suatu matriks.

Teorema 3. (Baccelli, *et al.*, 2001) Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$. Jika skalar $\lambda \in \mathbf{R}$, merupakan eigennilai aljabar *max-plus matriks A*, maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$.

Bukti:

lihat Baccelli, *et al.* (2001) atau Rudhito (2003). ■

Dari Teorema 2 dan 3 dapat disimpulkan bahwa untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$, $\lambda_{\max}(A)$ merupakan eigennilai aljabar *max-plus* maksimum matriks A . Berikut diberikan lema-lema yang akan melandasi pembahasan selanjutnya.

Lema 4. Jika $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ adalah matriks kedampingan graf berarah taksiklik \mathcal{G} , maka $A^{\otimes q} = \boldsymbol{\varepsilon}$, untuk semua $q > p$, dengan p adalah panjang lintasan terpanjang dari \mathcal{G} .

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk matriks kedampingan di atas, unsur ke- st dari matriks $A^{\otimes k}$ adalah

$$(A^{\otimes k})_{st} = \max_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \leq n} (A_{i_1, t} + A_{i_2, i_1} + \dots + A_{s, i_{k-1}}),$$

untuk setiap s, t . Perhatikan bahwa $(A^{\otimes k})_{st} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ jika dan hanya jika ada sedikitnya satu lintasan dengan panjang k , dengan s sebagai titik awal dan t sebagai titik akhirnya. Andaikan graf berarah di atas siklik, maka selalu dapat dibuat lintasan pada suatu sirkuitnya dengan panjang berapa pun. Hal ini berakibat bahwa $A^{\otimes q} \neq \boldsymbol{\varepsilon}$, untuk semua $q = 1, 2, \dots$. Jadi jika graf berarah \mathcal{G} di atas taksiklik, maka $A^{\otimes q} = \boldsymbol{\varepsilon}$, untuk semua $q > p$, dengan p adalah panjang lintasan terpanjangnya. ■

Lema 5. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_{\max}^n$ dengan unsur-unsurnya positif atau sama dengan $\boldsymbol{\varepsilon}$. Jika graf, dengan matriks A merupakan matriks kedampingannya, taksiklik, maka persamaan $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal. Lebih lanjut penyelesaian diberikan oleh $\mathbf{x} = (E \oplus A)^p \otimes \mathbf{b}$, dengan p adalah panjang lintasan terpanjang dalam graf tersebut.

Bukti:

Dengan mensubstitusikan \mathbf{x} pada persamaan di atas sebanyak q kali ($q > p$) diperoleh Substitusi ke-1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A \otimes (A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{b} \\ &= A^{\otimes 2} \otimes \mathbf{x} \oplus A \otimes \mathbf{b} \oplus \mathbf{b} \\ &= A^{\otimes 2} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A) \otimes \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Substitusi ke-2 :

$$\mathbf{x} = A^{\otimes 3} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A \oplus A^{\otimes 2}) \otimes \mathbf{b}.$$

Substitusi ke- q :

$$\mathbf{x} = A^{\otimes q+1} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes q}) \otimes \mathbf{b}.$$

Mengingat graf di atas taksiklik maka $A^{\otimes q} = \boldsymbol{\varepsilon}$, untuk semua $q > p$, sehingga diperoleh

$$\mathbf{x} = (E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes p}) \otimes \mathbf{b} = (E \oplus A)^p \otimes \mathbf{b}.$$

Dari proses mencari penentuan penyelesaian di atas nampak bahwa penyelesaian tersebut tunggal. ■

3. MODEL JARINGAN ANTRIAN FORK-JOIN TAKSIKLIK

Pengertian tentang jaringan antrian *fork-joint* berikut mengikuti dalam Krivulin (2000). Diperhatikan suatu jaringan dengan n titik pelayan tunggal (*single-server*) dan pelanggan kelas tunggal (*single-class*). Struktur jaringan antrian ini dapat dinyatakan dengan graf berarah taksiklik $G = (N, A)$ dengan busur yang ditentukan oleh rute transisi pelanggan. Untuk setiap titik $i \in N$, didefinisikan himpunan *pendahulu* (*predecessors*) dan *penerus* (*successors*) titik i berturut-turut dengan $P(i) = \{j \mid (j, i) \in A\}$ dan $S(i) = \{j \mid (j, i) \in A\}$.

Untuk setiap titik $i \in N$ terdiri dari sebuah pelayan dan penyangga dengan kapasitas takhingga yang bekerja dengan prinsip *First-In First-Out* (*FIFO*). Pada waktu-awal jaringan bekerja diasumsikan bahwa pelayan bebas pelanggan, penyangga untuk semua titik i dengan $P(i) \neq \emptyset$ dalam keadaan kosong, sedangkan penyangga titik yang tidak mempunyai pendahulu ($P(i) = \emptyset$) mempunyai takhingga banyak pelanggan.

Operasi *fork* pada titik i diawali setiap kali layanan sebuah pelanggan selesai dan diperoleh beberapa pelanggan baru untuk antrian berikutnya. Banyaknya pelanggan baru yang muncul pada titik i sebanyak titik dalam $S(i)$. Pelanggan-pelanggan baru ini secara serentak meninggalkan titik i dan menuju titik-titik $j \in S(i)$ secara terpisah. Operasi *join* pada titik i terjadi saat pelanggan-pelanggan datang ke titik i , tidak hanya di menunggu di penyangga, tetapi juga menunggu sedikitnya satu pelanggan dari setiap titik $j \in P(i)$ datang. Segera setelah pelanggan datang, bersama satu pelanggan dari setiap titik pendahulunya, mereka bersatu menjadi satu pelanggan dan masuk dalam penyangga dalam pelayan berikutnya. Dalam pengoperasian jaringan ini diasumsikan bahwa perpindahan pelanggan antar titik tidak memerlukan waktu.

Misalkan $a_i(k)$ menyatakan waktu kedatangan pelanggan ke- k pada titik i , $d_i(k)$ menyatakan waktu keberangkatan pelanggan ke- k pada titik i , dan t_{ik} menyatakan lama waktu layanan untuk pelanggan ke- k pada pelayan i . Diasumsikan jaringan mulai beroperasi pada nol waktu, yaitu bahwa $d_i(0) = 0$ dan $d_i(k) = \varepsilon$ untuk semua $k < 0$, $i = 1, \dots, n$. Dinamika antrian pada titik i dapat dinyatakan dengan

$$d_i(k) = \max(t_{ik} + a_i(k), t_{ik} + d_i(k-1)), \quad (1)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} \max_{j \in P(i)}(d_j(k)), & \text{jika } P(i) \neq \emptyset, \\ \varepsilon, & \text{jika } P(i) = \emptyset. \end{cases} \quad (2)$$

Dengan notasi aljabar *max-plus* persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_i(k) = t_{ik} \otimes a_i(k) \oplus t_{ik} \otimes d_i(k-1) \quad (3)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} \bigoplus_{j \in P(i)} d_j(k), & \text{jika } P(i) \neq \emptyset, \\ \varepsilon, & \text{jika } P(i) = \emptyset. \end{cases} \quad (4)$$

Misalkan $\mathbf{d}(k) = [d_1(k), d_2(k), \dots, d_n(k)]^T$, $\mathbf{a}(k) = [a_1(k), a_2(k), \dots, a_n(k)]^T$ dan

$$T_k = \begin{bmatrix} t_{1k} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & t_{nk} \end{bmatrix}.$$

Persamaan (3) dan (4) di atas dapat dituliskan menjadi

$$\mathbf{d}(k) = T_k \otimes \mathbf{a}(k) \oplus T_k \otimes \mathbf{d}(k-1). \quad (5)$$

$$\mathbf{a}(k) = G \otimes \mathbf{d}(k), \quad (6)$$

dengan matriks G yang unsur-unsur adalah

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } j \in P(i); \\ \varepsilon, & \text{untuk yang lain.} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa G merupakan matriks kedampingan dari graf struktur jaringan antrian. Dari persamaan (5) dan (6) dapat dituliskan persamaan

$$\mathbf{d}(k) = T_k \otimes G \otimes \mathbf{d}(k) \oplus T_k \otimes \mathbf{d}(k-1). \quad (7)$$

Teorema 6. *Diberikan jaringan antrian fork-join taksiklik dengan graf struktur jaringannya yang mempunyai panjang lintasan terpanjang p dan matriks kedampingan G . Persamaan keadaan eksplisit jaringan tersebut adalah*

$$\mathbf{d}(k) = A(k) \otimes \mathbf{d}(k-1), \quad (8)$$

dengan $A(k) = (E \oplus (T_k \otimes G))^p \otimes T_k$.

Bukti:

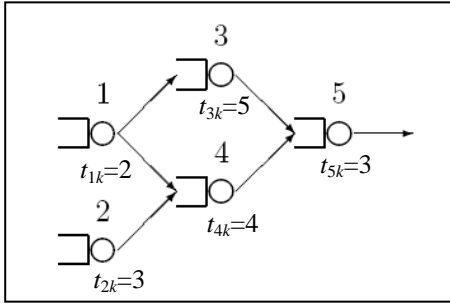
Dari hasil pada persamaan (7) dapat dituliskan $\mathbf{d}(k) = (T_k \otimes G) \otimes \mathbf{d}(k) \oplus (T_k \otimes \mathbf{d}(k-1))$. Karena G adalah matriks kedampingan graf taksiklik dengan panjang lintasan p , maka menurut Lema 4, $G^{\otimes q} = \varepsilon$ untuk semua $q > p$. Akibatnya $(T_k \otimes G)^q = \varepsilon$ untuk semua $q > p$. Selanjutnya menurut Lema 5, persamaan ini mempunyai penyelesaian

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k) &= (E \oplus (T_k \otimes G))^p \otimes (T_k \otimes \mathbf{d}(k-1)) \\ &= ((E \oplus (T_k \otimes G))^p \otimes T_k) \otimes \mathbf{d}(k-1). \end{aligned}$$

■

Contoh 1.

Jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan $n = 5$ diperlihatkan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1.

Matriks kedampingan dari graf pada jaringan di atas adalah

$$G = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Nampak bahwa panjang lintasan terpanjangnya adalah $p = 2$. Dari persamaan (8) diperoleh persamaan keadaan

$$d(k) = A(k) \otimes d(k-1),$$

dengan

$$\begin{aligned} A(k) &= (E \oplus (T_k \otimes G))^2 \otimes T_k \\ &= (E \oplus (T_k \otimes G) \oplus (T_k \otimes G)^2) \otimes T_k \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} t_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1k} \otimes t_{3k} & \varepsilon & t_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1k} \otimes t_{4k} & t_{2k} \otimes t_{4k} & \varepsilon & t_{4k} & \varepsilon \\ t_{1k} \otimes (t_{3k} \oplus t_{4k}) \otimes t_{5k} & t_{2k} \otimes t_{4k} \otimes t_{5k} & t_{3k} \otimes t_{5k} & t_{4k} \otimes t_{5k} & t_{5k} \end{bmatrix}.$$

Misalkan lama waktu layanan untuk pelanggan ke- k pada pelayan i adalah sebagai berikut: $t_{1k} = 2, t_{2k} = 3, t_{3k} = 5, t_{4k} = 4$ dan $t_{5k} = 3$, maka diperoleh

$$A(k) = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 10 & 10 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sehingga untuk $k = 1, 2$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} d_1(1) \\ d_2(1) \\ d_3(1) \\ d_4(1) \\ d_5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 10 & 10 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_1(2) \\ d_2(2) \\ d_3(2) \\ d_4(2) \\ d_5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ 10 & 10 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan program Matlab, diperoleh perhitungan hingga $k = 30$, seperti dalam Tabel 1 berikut.

4. EVALUASI KINERJA JARINGAN ANTRIAN

Diperhatikan waktu penuntasan siklus layanan jaringan sebagai barisan siklus layanan: siklus pertama mulai saat waktu awal, dan berakhir segera setelah semua pelayan dalam jaringan menuntaskan layanan pertamanya, siklus kedua berakhir segera setelah semua pelayan dalam jaringan menuntaskan layanan keduanya, dan seterusnya. Dengan demikian waktu penuntasan siklus ke- k pada titik i adalah $d_i(k)$, sehingga waktu penuntasan siklus ke- k pada jaringan dapat dinyatakan sebagai

$$\max_i d_i(k)$$

dengan $d_i(0) = 0, i = 1, \dots, n$ dan $k = 0, 1, 2, \dots$.

Selanjutnya waktu siklus layanan jaringan dapat dinyatakan dengan:

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_i (d_i(k)).$$

Contoh 2:

Dari hasil dalam Contoh 1 pada Tabel 1 nampak bahwa waktu penuntasan siklus ke- k dari jaringan tersebut adalah $d_5(k)$. Perhitungan secara numerik mengenai γ dari Contoh 1, diperoleh hasil seperti dalam Tabel 2 berikut.

Nampak dalam contoh ini bahwa nilai

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \max_i (d_i(k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (d_5(k)) = 5. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan program Matlab dapat ditentukan bahwa eigennilai aljabar *max-plus* maksimum matriks A adalah $\lambda_{\max}(A) = 5$ dan eigenvektor yang bersesuaian adalah $[\varepsilon \ \varepsilon \ 0 \ \varepsilon \ 3]^T$.

Secara umum sifat yang muncul pada contoh-contoh di atas diberikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 7. Jaringan antrian fork-join taksiklik kapasitas penyangga takhingga, dengan persamaan keadaan eksplisit jaringan tersebut adalah $d(k) =$

DAFTAR PUSTAKA

- Bacelli, F., *et al.* 1992. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.
- Krivulin, N.K., 1994. Using Max-Algebra Linear Models in the Representation of Queueing Systems. *Proc. 5th SIAM Conf. on Applied Linear Algebra, Snowbird, AT.* June 15-18, 1994. 155—160.
- Krivulin, N.K., 1995. A Max-Algebra Approach to Modeling and Simulation of Tandem Queueing Systems. *Mathematical and Computer Modelling.* **22**(3):25—31.
- Krivulin, N.K., 1996a. The Max-Plus Algebra Approach in Modelling of *Queueing Networks Proc. 1996 SCS Summer Computer Simulation Conference (SCSC-96).* July 21-25. The Society for Computer Simulation, 485—490.
- Krivulin, N.K., 1996b. Max-Plus Algebra Models of Queueing Networks. *Proc. Intern. Workshop WODES'96 Univ. of Edinburgh, UK. Aug. 19-21, 1996.* IEEE: London. 76—81.
- Krivulin, N.K., 2000. Algebraic Modelling and Performance Evaluation, of Acyclic Fork-Join Queueing Networks. *Advances in Stochastic Simulation Methods.* Birkhauser. Boston. 63—81 .
- Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant.* Tesis Magister Matematika Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.