IMPLEMENTASI BEBERAPA UJI KENORMALAN OMNIBUS DENGAN PERANGKAT LUNAK R

I WAYAN SUMARJAYA
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Udayana
Email: sumarjaya@unud.ac.id

INTISARI

Uji kenormalan omnibus adalah ujian kenormalan yang mampu memberikan informasi tambahan tentang ketidaknormalan data atau penyimpangannya melalui koefisien kepencongan dan kurtosis. Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan penghitungan statistik uji kenormalan omnibus D'Agostino-Pearson K^2 dan statistik uji modifikasi Jarque-Bera menggunakan perangkat lunak R.

Kata kunci: uji kenormalan omnibus, uji D'Agostino-Pearson, uji Jarque-Bera termodifikasi.

IMPLEMENTATION OF SOME OMNIBUS NORMALITY TEST USING R SOFTWARE

I WAYAN SUMARJAYA
Mathematics Department, FMIPA, Udayana University
Email: sumarjaya@unud.ac.id

ABSTRACT

An omnibus normality test is a normality test that can give additional information about nonnormality or other deviation from normality through the skewness and the kurtosis coefficients. The aim of this research is to implement the omnibus D'Agostino-Pearson K^2 test and modified Jarque-Bera test statistic using R software.

Keywords: omnibus normality test, D'Agostino-Pearson test, modified Jarque-Bera.

1. PENDAHULUAN

Uji kenormalan telah menarik banyak perhatian para peneliti. Telah ratusan tulisan ilmiah tentang uji kenormalan dipublikasikan. Secara umum uji kenormalan dapat dikelompokkan ke dalam beberapa jenis: uji berdasarkan fungsi distribusi empiris, uji berdasarkan momen, uji berdasarkan korelasi atau regresi, uji berdasarkan entropi sampel, uji berdasarkan karakteristik Polya, uji berdasarkan metode kernel, dan uji berdasarkan metode nonparametrik.

Studi komprehensif yang dilakukan Stephens (1972), Koziol (1986), Dufour *et al.*(1998), Seier (2002), Coin dan Corradetti (2006), Farrell dan Rogers-Stewart (2006), Breton *et al.* (2008) Yazici and Yolacan (2007), Tanweer-ul-Islam (2008), Tanweer-ul-Islam dan Zaman (2008) menunjukkan bahwa masing-masing statistik uji memiliki keunggulan dan kelemahan. Sebagai contoh uji yang berdasarkan fungsi distribusi empiris atau uji jarak umumnya tidak mampu memberikan informasi tambahan tentang ketidaknormalan distribusi alternatif. Uji yang berdasarkan regresi atau korelasi biasanya memerlukan komputasi yang itensif pada saat menentukan bobot. Demikian pula dengan uji-uji yang berdasarkan entropi sampel, kernel, dan karakteristik Polya cenderung memberikan statistik uji yang memerlukan komputasi intensif, terutama simulasi Monte Carlo.

Statistik uji yang mampu memberikan informasi tambahan tentang ketidaknormalan atau penyimpangan dari kenormalan disebut uji omnibus. Uji ini biasanya melaporkan koefisien kepencongan dan kurtosis sebagai ukuran untuk mengetahui normal atau tidaknya data.

Penelitian ini membahas implementasi statistik uji kenormalan omnibus D'Agostino-Pearson K^2 (lihat D'Agostino, *et al*. 1990) dan modifikasi uji Jarque-Bera yang diusulkan oleh Urzúa (1996, 2007)

2. METODE-METODE UJI KENORMALAN OMNIBUS

Konsep uji berdasarkan momen adalah bahwa momen ketiga dan momen keempat yang diberikan oleh

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{E(X-\mu)^3}{[E(X-\mu_2)^2]^{3/2}} = \frac{E(X-\mu)^2}{\sigma^3} \quad (1)$$

dan

$$\beta_2 = \frac{E(X-\mu)^4}{[E(X-\mu_2)^2]^2} = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} \quad (2)$$

dari distribusi $N(0,1)$ adalah 0 dan 3. Konsep momen ini dimunculkan pertama kali oleh Karl Pearson. Selanjutnya, momen ketiga disebut kepencongan (*skewness*) dan momen keempat disebut kurtosis. Dengan demikian penyimpangan dari kenormalan dapat diketahui dari nilai momen-momen yang diduga menggunakan sampel, yakni koefisien kepencongan $\sqrt{b_1}$ dan koefisien kurtosis b_2 yang dihitung sebagai

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}} \quad (3)$$

dan

$$b_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2} \quad (4)$$

dengan $m_j = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^j$.

Kepencongan dan kurtosis dapat diukur dengan lebih dari satu cara. Fisher (lihat D'Agostino *et al.*, 1990) mendefinisikan kepencongan g_1 dan kurtosis g_2 sebagai

$$g_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3}, \quad (5)$$

dan

$$g_2 = \frac{n(n+1)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{(n-1)(n-2)(n-3)s^4} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}, \quad (6)$$

dengan

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2}{(n-1)}. \quad (7)$$

Geary (lihat Bonnet dan Seier, 2002) mendefinisikan kurtosis sebagai τ/σ dengan $\tau = E(|X-\mu|)$. Lebih lanjut, menurut Bonnet dan Seier (2002) pada kondisi kenormalan dapat ditunjukkan bahwa $\tau/\sigma = (2/\pi)^{1/2} = 0{,}7979$. Pembahasan lebih lanjut tentang kepencongan dan kurtosis dapat dilihat pada DeCarlo (1997).

2.1 Uji Omnibus D'Agostino-Pearson K^2

D'Agostino dan Pearson mengusulkan statistik uji menggunakan momen Pearson (lihat D'Agostino *et al.*, 1990)

$$K^2 = Z^2\left(\sqrt{b_1}\right) + Z^2(b_2), \quad (8)$$

yang berdistribusi $\chi^2(2)$ apabila populasi berdistribusi normal. Pada persamaan (8) nilai $Z^2\left(\sqrt{b_1}\right)$ dan $Z^2(b_2)$ adalah pendekatan-pendekatan normal terhadap $\sqrt{b_1}$ dan b_2. Hipotesis dan langkah-langkah pengujian terhadap kepencongan, kurtosis, dan statistik K^2 dapat dilihat pada D'Agostino *et al.* (1990).

2.2 Uji Omnibus Jarque-Bera

Pendekatan pengujian menggunakan kepencongan $\sqrt{b_1}$ dan kurtosis b_2 juga diusulkan oleh Jarque dan Bera (1980, 1987) dan Bera dan Jarque (1981) dengan statistik uji

$$\mathrm{JB} = n\left[\frac{\left(\sqrt{b_1}\right)^2}{6} + \frac{(b_2-3)^2}{24}\right]. \quad (9)$$

Statistik JB secara asimtotis berdistribusi $\chi^2(2)$. Hipotesis nol akan ditolak apabila statistik JB lebih besar daripada nilai $\chi^2(2)$.

Urzúa (1996) melihat kelemahan uji Jarque-Bera untuk sampel berukuran kecil sampai menengah dan mengusulkan modifikasi uji Jarque-Bera dengan statistik

$$\mathrm{JBU} = \left[\frac{\left(\sqrt{b_1}\right)^2}{v_2} + \frac{(b_2-v_1)^2}{v_3}\right]. \quad (10)$$

Pada persamaan (10) nilai

$$v_1 = 3(n-1)/(n+1),$$

$$v_2 = 6(n-2)/[(n+1)(n+3)],$$

dan

$$v_3 = 24n(n-2)(n-3)/[(n+1)^2(n+3)(n+5)].$$

Statistik JBU secara asimtotis juga berdistribusi $\chi^2(2)$.

Urzúa (2007) mengusulkan dua uji omnibus untuk kenormalan menggunakan ukuran kepencongan Pearson dan kurtosis Geary, yakni statistik

$$U_1 = \frac{\left(\sqrt{b_1}\right)^2}{d} + \frac{(w-3)^2}{e} \quad (11)$$

dan

$$U_2 = \max\left(\frac{\sqrt{b_1}}{d}, \frac{(w-3)}{\sqrt{e}}\right). \quad (12)$$

Pada persamaan (11) dan (12) nilai

$$d = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}, \quad (13)$$

$$e = \frac{3{,}54}{(n+2)}, \quad (14)$$

$$w = \frac{-6\ln(a)}{\ln(\pi/2)}, \tag{15}$$

dan

$$a = \sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} | / [n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2]^{1/2}. \tag{16}$$

IMPLEMENTASI UJI KENORMALN OMNIBUS

Berikut ini implementasi uji omnibus D'Agostino-Pearson K^2 berdasarkan D'Agostino *et al.* (1990).

```
# fungsi DAP menghitung kepencongan,
# kurtosis
# dan statistik K^2
DAP.omnibus <- function(x,alpha){
    n <- length(x)
    m2 <- sum((x - mean(x))^2)/n
    m3 <- sum((x - mean(x))^3)/n
    m4 <- sum((x - mean(x))^4)/n
    ## prosedur pengujian kepencongan
    sqrt.b1 <- m3/(m2^1.5)
    cat("Kepencongan sampel:",sqrt.b1,"\n")
    a1 <- (n + 1)*(n + 3)
    a2 <- 6*(n - 2)
    Y <- sqrt.b1*sqrt(a1/a2)
    a3 <- 3*(n^2 + 27*n - 70)*(n + 1)*(n +
          3)
    a4 <- (n - 2)*(n + 5)*(n + 7)*(n + 9)
    betatwo.sqrt.b1 <- a3/a4
    sqr.W <- -1 + sqrt(2*betatwo.sqrt.b1 -
                                          1)
    W <- sqrt(sqr.W)
    delta <- 1/sqrt(log(W))
    alpha <- sqrt(2/(sqr.W - 1))
    Z.sqrt.b1 <- delta*log(Y/alpha +
                 sqrt((Y/alpha)^2 + 1))
    cat("Statistik uji
        kepencongan:",Z.sqrt.b1,"\n")
    ## prosedur pengujian kurtosis
    b2 <- m4/(m2^2)
    cat("Kurtosis sampel:",b2,"\n")
    a5 <- 3*(n - 1)
    a6 <- (n + 1)
    E.b2 <- a5/a6
    a7 <- 24*n*(n-2)*(n - 3)
    a8 <- ((n + 1)^2)*(n + 3)*(n + 5)
    var.b2 <- a7/a8
    x <- (b2 - E.b2)/(sqrt(var.b2))
    a9 <- 6*(n^2 - 5*n + 2)
    a10 <- (n + 7)*(n + 9)
    a11 <- 6*(n + 3)*(n + 5)
    a12 <- n*(n - 2)*(n - 3)
    sqrt.betaone.b2 <-
           (a9/a10)*sqrt(a11/a12)
    a13 <- 8/sqrt.betaone.b2
    a14 <- 2/sqrt.betaone.b2
    a15 <- 1 + (4/sqrt.betaone.b2)
    A <- 6 + a13*(a14 + sqrt(a15))
    a16 <- 1 - (2/(9*A))
    a17 <- 1 - 2/A
    a18 <- 1 + x*sqrt(2/(A - 4))
    a19 <- sqrt(2/(9*A))
    Z.b2 <- (a16 - (a17/a18)^(1/3))/(a19)
    cat("Statistik uji
          kurtosis:",Z.b2,"\n")
    ## prosedur pengujian omnibus K^2
    sqr.K <- (Z.sqrt.b1)^2 + (Z.b2)^2
    cat("Statistik uji Agostino-Pearson K
         kuadrat:",sqr.K,"\n")
    if (sqr.K >= qchisq(1-alpha,2)) {
       cat("Hipotesis nol ditolak.","\n")
    } else {
       cat("Hipotesis nol tidak ditolak.",
       "\n")
    }
}
```

Implementasi statistik uji modifikasi Jarque-Bera oleh Urzúa (1996).

```
# fungsi JBU omnibus mengimplementasikan
# modifikasi Jarque-Bera oleh Urzua
JBU.omnibus <- function(x,alpha){
    n <- length(x)
    m2 <- sum((x - mean(x))^2)/n
    m3 <- sum((x - mean(x))^3)/n
    m4 <- sum((x - mean(x))^4)/n
    sqrt.b1 <- m3/(m2^1.5)
    v1 <- 3*(n - 1)/(n + 1)
    v2 <- 6*(n - 2)/((n + 1)*(n + 3))
    v3 <- 24*n*(n - 2)*(n - 3)/
    ((n + 1)^2*(n + 3)*(n + 5))
    b2 <- m4/(m2^2)
    JBU <- (sqrt.b1)^2/(v2) + (b2-v1)/(v3)
    cat("Nilai statistik JBU:",JBU,"\n")
    if (JBU >= qchisq(1-alpha,2)) {
       cat("Hipotesis nol ditolak.","\n")
    } else {
       cat("Hipotesis nol tidak ditolak.",
       "\n")
    }
}

# Statistik Urzua (2007)
U.omnibus <- function(x,alpha){
    n <- length(x)
    m2 <- sum((x - mean(x))^2)/n
    m3 <- sum((x - mean(x))^3)/n
    m4 <- sum((x - mean(x))^4)/n
    sqrt.b1 <- m3/(m2^1.5)
    d <- 6*(n-2)/((n + 1)*(n + 3))
    e <- 3.54/(n + 2)
    a <- sum(abs(x - mean(x)))/n*sum((x-
          mean(x)))
    w <- -6*log(a)/log(pi/2)
    U1 <- (sqrt.b1/d) + (w - 3)^2/e
    U2 <- max(sqrt.b1/d,(w - 3)/sqrt(e))
    cat("Nilai statistik U1:",U1,"\n")
    cat("Nilai statistik U2:",U2,"\n")
    if (U1 >= qchisq(1-alpha,2)) {
       cat("Hipotesis nol ditolak.","\n")
    } else {
       cat("Hipotesis nol tidak ditolak.",
       "\n")
    }
    if (U2 >= 2.236) { %% alfa 5%
       cat("Hipotesis nol ditolak.","\n")
    } else {
       cat("Hipotesis nol tidak ditolak.",
       "\n")
    }
}
```

SIMPULAN

Implementasi uji omnibus di atas perlu disempuranakan lagi untuk menghitung *p*-value dan antisipasi terhadap data yang mengandung nol (0).

DAFTAR PUSTAKA

Bera, A. K. and Jarque, C. M. 1981. Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals: Monte Carlo Evidence. *Economics Letters*. **7**: 313—318.

Bonett, D. G. and Seier, E. 2002. A Test of Normality with High Uniform Power. *Computational Statistics and Data Analysis*. **40**: 435—445.

Breton, M. D., Devore, M. D., and Brown, D. E. 2008. A Tool for Systematically Comparing the Power of Tests for Normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 78(7): 623—638.

Coin, D. and Corradetti, R. 2006 Tests for Normality: Comparison of Powers (Test di Normalità: Confronto delle Potenze). Alamat http://sis-statistica.it/files/pdf/atti/Spontanee2006_177-180.pdf accessed on 30 April 2010. 177—180.

D'Agostino, R. B., Belanger, A. and D'Agostino Jr., R. B. 1990. A Suggestion for Using Powerful and Informative Tests of Normality. *The American Statistician*. **44** (4): 316—321.

DeCarlo, L. T. 1997. On the Meaning and Use of Kurtosis. *Psychological Methods*. **2**(3): 292—307.

Dufour, J-M., Farhat, A., Gardiol, L. and Khalaf, L. 1998. Simulation-based Finite Sample Normality Tests in Linear Regressions. *Econometrics* Journal. **1**: 154—173.

Farrell, P. J. and Rogers-Stewart, K. 2006. Comprehensive Study of Tests for Normality and Symmetry: Extending the Spiegelhalter Test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **76**(9): 803—816.

Jarque, C. M. and Bera, A. K. 1980. Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals. *Economics Letters.* **6**. 255—259.

Jarque, C. M. and Bera, A. K. 1987. A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. *International Statistical Review*. **55**(2):163—172.

Koziol, J. A. 1986. Relative Efficiencies of Goodness of Fit Procedures for Assessing Univariate Normality. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. **38**(Part A): 485—493.

Seier, E. 2002. Comparison of Tests for Univariate Normality. InterStat. Alamathttp://interstat.statjournals.net/YEAR/2002/articles/0201001.pdf accessed on 30 April 2010.

Stephens, M. A. 1972. EDF Statistics for Goodness-of-Fit: Part I. Technical Report No. 186. Stanford University California.

Tanweer-ul-Islam. 2008. Normality Testing—A New Direction. Munich Personal RePEc Archive (MPRA) Paper No. 16452. Alamat http://mpra.ub.uni-muenchen.de/16452 accessed on 30 April 2010.

Tanweer-ul-Islam and Zaman A. 2008. Normality Testing—A New Direction. Alamat http://www.economics.smu.edu.sg/femes/2008/CS_info/papers/418.pdf accessed on 30 April 2010.

Urzúa, C. M. 1996. On the Correct use of Omnibus Tests for Normality.*Econometric Letters*.**53**: 247—251.

Urzúa, C. M. 2007. Portable and Powerful Tests for Normality. Latin American Meeting of the Econometric Society. Universidad de los Andes. Bogotá. Colombia. Octubre. Internacional. Alamat http://www.webmeets.com/files/papers/LACEA-LAMES/2007/591/Portable.pdf accessed on 30 April 2010.

Yazici, B. and Yolacan, S. 2007. A Comparison of Various Tests of Normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 77(2): 175—183.