Jurnal Matematika Vol. 2 No. 1, Desember 2011. ISSN : 1693-1394

Beberapa Sifat dari Modul dan Gelanggang dengan Dimensi Goldie Berhingga (Suatu Kajian Pustaka)

Amir Kamal Amir

Kelompok Keahlian Aljabar,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Hasanuddin (UNHAS),
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
e-mail: amirkamalamir@yahoo.com

Abstract: Suatu modul M dikatakan mempunyai demensi Goldie berhingga jika modul tersebut tidak memuat suatu jumlahan langsung dari takberhingga banyak submodul-submodul taknol. Sedangkan, suatu gelanggang R dikatakan mempunyai dimensi Goldie kanan berhingga jika gelanggang tersebut mempunyai dimensi Goldie berhingga sebagai suatu modul kanan. Tulisan ini akan menyajikan beberapa sifat dari modul dan gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie berhingga. Sifat-sifat tersebut bukanlah merupakan sifat-sifat yang baru. Namun demikian, tulisan ini akan menyajikan pembuktian dari sifat-sifat tersebut dengan cara yang lebih terperinci dan lengkap sehingga lebih mudah dimengerti, terutama bagi pembaca pemula dalam bidang aljabar.

Keywords: modul, ring, Goldie, dimension, finite, direct sum.

1. Pendahuluan

Misalkan M adalah suatu R-modul. M dikatakan mempunyai demensi Goldie berhingga jika M tidak memuat suatu jumlahan langsung dari takberhingga banyak submodul-submodul taknol. Sedangkan, suatu gelanggang R dikatakan mempunyai dimensi Goldie kanan berhingga jika R mempunyai dimensi Goldie berhingga sebagai suatu R-modul kanan.

Paper ini akan menguraikan beberapa sifat-sifat dari modul dan gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie berhingga. Sifat-sifat tersebut bukanlah merupakan sifat-sifat yang baru. Namun demikian, tulisan ini akan menyajikan pembuktian dari sifat-sifat tersebut dengan cara yang lebih terperinci dan sederhana sehingga lebih mudah dimengerti , terutama bagi pembaca pemula dalam bidang aljabar.

Untuk pembahasan sifat-sifat tersebut di atas, dibutuhkan beberapa pengertian dan notasi. Oleh karena itu, sebelum memasuki pembahasan mengenai hal tersebut di atas, pada bagian ini disajikan lebih dahulu pengertian-pengertian dan notasi-notasi pendukung yang akan dipakai dalam pembahasan selanjutnya.

Definisi 1.1. [2] dan [4]. *Misalkan S adalah himpunan bagian taknol dari suatu gelanggang R, maka annihilator kanan dari S dalam R didefinisikan sebagai,*

$$r.ann(S) = \{x \in R | sx = 0 \ untuk\ setiap\ s \in S\}$$

dan annihilator kiri dari S dalam R adalah

$$l.ann(S) = \{x \in R | xs = 0 \ untuk\ setiap\ s \in S\}$$

Jika S hanya memuat satu elemen, s, saja, kita tulis $r.ann(s)$ atau $l.ann(s)$ sebagai ganti dari $r.ann(S)$ atau $l.ann(S)$.

Definisi 1.2. [1]. *Jika suatu modul M mempunyai sifat bahwa setiap rantai mengecil submodul-submodulnya, yaitu*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$$

akan berhenti setelah berhingga banyaknya suku, maka M dikatakan memenuhi kondisi rantai mengecil (d.c.c). Sebaliknya, jika suatu modul M mempunyai sifat bahwa setiap rantai membesar submodul-submodul M, yaitu

$$M = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$$

akan berhenti setelah berhingga banyaknya suku, maka M dikatakan memenuhi kondisi rantai membesar (a.c.c). Berikut diberikan beberapa sifat dari modul yang memenuhi a.c.c dan d.c.c.

Teorema 1.3. Suatu modul M memenuhi kedua sifat a.c.c dan d.c.c jika dan hanya jika ada batas atas, katakan n, pada panjang rantai dari submodul-submodul M.
Bukti:
Pembuktian cukup sederhana.

Definisi 1.4. [3] dan [5]. *Misalkan N adalah submodul dari modul M sedemikian sehingga untuk setiap submodul taknol L dari M memenuhi $N \cap L \neq 0$ maka N disebut suatu submodul esensial dari M.*

Definisi 1.5. [3] dan [5]. *Suatu submodul M dikatakan seragam jika $M \neq 0$ dan setiap submodul taknol dari M adalah suatu submodul esensial.*

Definisi 1.6. [4]. *Misalkan M adalah suatu R-modul. M dikatakan mempunyai demensi Goldie berhingga jika M tidak memuat suatu jumlahan langsung dari takberhingga banyak submodul-submodul taknol. Sedangkan, suatu gelanggang R dikatakan mempunyai dimensi Goldie kanan berhingga jika R mempunyai dimensi Goldie berhingga sebagai suatu R-modul kanan. Lebih lanjut, R dikatakan gelanggang Goldie kanan jika ia mempunyai dimensi Goldie kanan berhingga dan memnuhi a.c.c untuk annihilator-annihilator kanan.*

2. Masalah dan Pembahasan

Secara umum, berdasarkan dimensi Goldie, modul dan gelanggang dibagi dalam dua kelompok. Satu kelompok merupakan kelompok modul dan gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie takterhingga. Sedangkan kelompok yang lain adalah kelompok modul dan gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie berhingga. Masalah yang akan dibahas dalam bagian ini adalah mengidentifikasi sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu modul dan gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie berhingga. Lebih jelasnya, dalam paper ini akan dipaparkan dengan terperinci permasalahan-permasalahan berikut:

1. Apakah submodul taknol dari suatu modul yang mempunyai dimensi Goldie berhingga memuat suatu modul seragam?
2. Apakah gelanggang dengan dimensi Goldie kanan berhingga, jika dikalikan dengan suatu elemen regular akan menghasilkan suatu ideal kanan esensial?

3. Apakah gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie berhingga akan memenuhi kondisi ranti membesar dan mengecil (a.c.c dan d.c.c)?.

Berikut disajikan beberapa sifat-sifat modul yang mempunyai dimensi Goldie berhingga.

Teorema 2.1. Misalkan M adalah suatu R-modul kanan taknol.

a. Jika M mempunyai dimensi Goldie berhingga, maka setiap submodul taknol dari M memuat suatu submodul seragam, dan terdapat berhingga banyak submodul-submodul seragam dari M yang mempunyai bentuk jumlahan langsung dan merupakan suatu submodul esensial dari M.
b. Misalkan bahwa M mempunyai submodul-submodul $U_1, U_2, \cdots, U_n$ sedemikian sehingga jumlahan $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ merupakan jumlahan langsung dan submodul esensial dari M, maka M mempunyai dimensi Goldie berhingga dan bilangan bulat positif n tidak bergantung pada pemilihan u_i. Bilangan n ini disebut dimensi Goldie dari M dan ditulis sebagai dim $M = n$.

Bukti:

a. Misalkan bahwa M mempunyai dimensi Goldie berhingga dan misalkan K adalah suatu submodul taknol dari M. Akan ditunjukkan bahwa K mempunyai suatu submodul seragam. Hal ini sudah jelas kalau K adalah submodul seragam. Misalkan K bukan submodul seragam, maka terdapat submodul-submodul taknol A_1 dan B_1 dari K sedemikian sehingga $A_1 \cap B_1 = 0$ Dengan demikian $A_1 \oplus B_1$ adalah jumlahan langsung dari dua submodul-submodul taknol dari M. Jika A_1 atau B_1 adalah submodul-submodul seragam maka pembuktian selesai. Jika tidak demikian, terdapat submodul-submodul taknol A_2 dan B_2 dari B_1 sedemikian sehingga $A_2 \cap B_2 = 0$. Dengan demikian $A_1 \oplus A_2 \oplus B_2$ adalah jumlahan langsung dari tiga submodul-submodul taknol dari M. Karena M mempunyai dimensi Goldie berhingga, maka proses ini harus berhenti setelah berhingga banyaknya langkah, dan proses hanya berhenti ketika sampai pada suatu submodul seragam dari K.
Intinya, M mempunyai suatu submodul seragam U_1. Misalkan bahwa U_1 tidak esensial dalam M, maka terdapat suatu submodul taknol K_1 dari M sedemikian sehingga $U_1 \cap K_1 = 0$. Misalkan U_2 adalah suatu submodul seragam dari K_1 maka jumlahan $U_1 + U_2$ adalah jumlahan langsung. Jika $U_1 \oplus U_2$ tidak esensial dalam M maka terdapat submodul taknol K_2 dari M sedemikian sehingga $(U_1 \oplus U_2) \cap K_2 = 0$ dan seterusnya. Proses ini juga harus berhenti setelah berhingga banyaknya langkah.
b. Misalkan bahwa $U_1, U_2, \cdots, U_n$ adalah submodul-submodul seragam dari M sedemikian sehingga bahwa $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ adalah jumlahan langsung dan esensial dalam M.
Untuk setiap i, tetapkan $V_i = K \cap U_i$ dan misalkan $L = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$. Kita peroleh $L \subseteq K$, jadi sekarang cukup ditunjukkan bahwa L adalah esensial dalam M. Misalkan x adalah suatu elemen taknol dari M, maka diperoleh $x\ R \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \neq 0$ Dengan demikian terdapat suatu elemen r dari R sedemikian sehingga $xr = u_1 + \cdots + u_n$ dengan $u_i \in U_i$ dan $u_1 \neq 0$
V_1 adalah esensial dalam U_1 sebab $V_1 \neq 0$. Ini beararti terdapat suatu ideal kanan esensial $\overline{X}_1$ dari R sedemikian sehingga $u_1 X_1$ adalah suatu submodul taknol dari V_1 oleh $[1, (1.1)]$. Dengan demikian terdapat suatu elemen r_1 dari R sedemikian sehingga $xr_1 = v_1 + a_2 + \cdots + a_n$ untuk suatu $v_1 \in V_1$ dan $a_i \in U_i$ dengan $v_1 \neq 0$. Jika $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$, maka pembuktian sudah selesai sebab xr_i adalah suatu elemen taknol dari $xR \cap L$
Misalkan $a_2 \neq 0$ maka terdapat suatu ideal kanan esensial $\overline{X}_2$ dari R sedemikian sehingga $a_2\overline{X}_2$ adalah suatu submodul taknol dari V_1 oleh $[1, (1.1)]$. Jadi ada elemen r_2 dari R sedemikian sehingga $xr_2 = w_1 + w_2 + b_3 + \cdots + b_n$ untuk suatu $w_i \in V_i$ dan $b_i \in U_i$ dengan $w_2 \neq 0$.

Akhirnya kita menemukan suatu elemen taknol dari $xR \cap L$
Sekarang, misalkan bahwa $Y_1, \cdots, Y_k$ adalah submodul-submodul taknol dari M sedemikian sehinga jumlahan $Y_1 + \cdots + Y_k$ adalah jumlahan langsung. Akan ditunjukkan bahwa $k \leq n$ untuk memudahkan pembuktian (b). Tetapkan $W = Y_2 + \cdots + Y_k$, maka W bukan esensial di M sebab $W \cap Y_1 = 0$. Oleh karena itu, $W \cap U_i = 0$ untuk suatu i dan dapat dimisalkan bahwa $W \cap U_1 = 0$. Dengan demikian $U_1 + Y_3 + \cdots + Y_k$ adalah jumlahan langsung. Serupa dengan di atas, $U_1 + Y_3 + \cdots + Y_k$ adalah bukan esensial, jadi kita bisa memisalkan $(U_1 + Y_3 + \cdots + Y_k) \cap U_2 = 0$ Dengan demikian $U_1 + U_2 + Y_3 + \cdots + Y_k$ adalah jumlahan langsung. Dengan jalan ini diperoleh $k \leq n$.

Dua teorema berikut mengaitkan antara elemen regular, dimensi Goldie, dan ideal esensial. Oleh karena itu, sebelum teorema disajikan, disajikan dahulu pengertian elemen regular.

Definisi 2.2. [4]. *Suatu elemen c dari suatu gelanggang R dikatakan regular kanan jika $r.ann(c) = 0$, regular kiri jika $l.ann(c) = 0$, dan regular jika $r.aan(c) = l.ann(c) = 0$.*

Teorema 2.3. Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan dimensi Goldie kanan berhingga dan misalkan c adalah suatu elemen regular kanan dari R, maka cR adalah suatu ideal kanan esensial dari R.
Bukti:
Misalkan I adalah suatu ideal kanan dari R dengan $I \cap cR = 0$ maka jumlahan $I + cI + c^2 I + \cdots$ adalah jumlahan langsung. Oleh karena itu, $c^n = 0$ untuk suatu n dan karena c adalah regular, maka $I = 0$

Teorema 2.4. Misalkan R adalah suatu gelanggang kanan non-singular dengan dimensi Goldie kanan berhingga, maka R memnuhi a.c.c (kondisi rantai membesar) dan d.c.c (kondisi rantai mengecil) untuk annihilator-annihilator kanan.
Bukti:
Misalkan A dan B adalah annihilator-annihilator kanan dalam R dengan Misalkan juga bahwa A adalah suatu submodul esensial dari B. Akan ditunjukkan bahwa $A = B$
Misalkan $b \in B$, maka terdapat suatu ideal kanan esensial L dari R sedemikian sehingga $bl \subseteq A$ oleh $[1, (1.1)]$. Sehingga $l.ann(A)bl = 0$ Tetapi R adalah non-singular kanan, oleh karena itu $l.ann(A)b = 0$ Jadi $b \in r.ann(l.ann(A))$, yaitu $b \in A$
Dengan demikian, jika A dan B adalah annihilator-annihilator kanan dalan R dan A adalah himpunan bagian murni dari B maka ada ideal kanan taknol C dari R sedemikian sehingga $C \subseteq B$ dan $A \cap C = 0$. Hal ini mengakibatkan bahwa suatu rantai annihilator-annihilator kanan yang berbeda dalam R menimbulkan jumlahan langsung ideal-ideal kanan taknol seperti ideal C. Oleh karena itu R memenuhi a.c.c dan d.c.c untuk annihilator-annihilator kanan.

3. Simpulan

Dari pembahasan di atas disimpulkan beberapa hal berikut:

1. Setiap submodul taknol dari suatu modul yang mempunyai dimensi Goldie berhingga memuat suatu modul seragam.
2. Suatu gelanggang dengan dimensi Goldie kanan berhingga, jika dikalikan dengan suatu elemen regular akan menghasilkan suatu ideal kanan

3. Suatu gelanggang yang mempunyai dimensi Goldie berhingga akan memenuhi kondisi ranti membesar dan mengecil (a.c.c dan d.c.c).

References

[1] A.W.Chatters dan C.R.Hajarnavis, Rings with Chain Conditions, Pitman Advanced Publishing, Boston, 1986.
[2] K.R. Goodearl dan R.B. Warfield, An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, Cambridge university press, New York, 1989.
[3] T.Y. Lam, Lectures on Modules and Rings, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1999.
[4] J.C. McConnel dan J.C.Robson. 1987. Noncommutative Noetherian Rings, John Wiley & Sons
[5] D. S. Passaman, 1991, A Course in Ring Theory, Brooks/Cole Publishing Company

Jurnal Matematika Vol. 2 No. 1, Desember 2011. ISSN : 1693-1394

Model-Check Based on Residual Partial Sums Process of Heteroscedastic spatial Linear Regression Models

Wayan Somayasa

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Haluoleo
Kendari 93232
e-mail: w.somayasa@yahoo.com

Abstract: It is common in practice to evaluate the correctness of an assumed linear regression model by conducting a model-check method in which the residuals of the observations are investigated. In the asymptotic context instead of observing the vector of the residuals directly, one investigates the partial sums of the observations. In this paper we derive a functional central limit theorem for a sequence of residual partial sums processes when the observations come from heteroscedastic spatial linear regression models. Under a mild condition it is shown that the limit process is a function of Brownian sheet. Several examples of the limit processes are also discussed. The limit theorem is then applied in establishing an asymptotically Kolmogorov type test concerning the adequacy of the fitted model. The critical regions of the test for finite sample sizes are constructed by Monte Carlo simulation.

Keywords: heteroscedastic linear regression model, least squares residual, partial sums process, Brownian sheet, asymptotic model-check.

1. Introduction

Let us consider an experiment performed under $n \times n$ experimental conditions taken from a regular lattice given by

$$\Xi_n := \{(\ell/n, k/n) : \ 1 \leq \ell, k \leq n\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Without loss of generality we consider the unit square $\mathbf{I} := [0,1] \times [0,1]$ as an experimental region instead of any compact subset of $\mathbb{R}^2$. For convenience we take the observations carried out in Ξ_n row-wise initializing at the point $(1/n, 1/n)$ and put them together in an $n \times n$ matrix $\mathbf{Y}(\Xi_n) := (Y_{\ell k})_{k=1,\ell=1}^{n,\ n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, where the observation in the point $(\ell/n, k/n)$ is denoted by $Y_{\ell k}$, $1 \leq \ell, k \leq n$. Consequently, we have a sequence of observable random matrices $(\mathbf{Y}(\Xi_n))_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. As usual we furnish the vector space $\mathbb{R}^{n\times n}$ with the Euclidean inner product

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{\mathbb{R}^{n\times n}} := trace(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}), \ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Let $f_1, \ldots, f_p : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ be known, real-valued regression functions defined on $\mathbf{I}$. For a real-valued function f defined on $\mathbf{I}$, let $f(\Xi_n) := (f(\ell/n, k/n))_{k=1,\ell=1}^{n,\ n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Our aim is to construct an asymptotic test procedure for the hypothesis

$$H_0 : \ \mathbf{Y}(\Xi_n) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i(\Xi_n) + \mathbf{E}_n \text{ vs.} H_1 : \ \mathbf{Y}(\Xi_n) = g(\Xi_n) + \mathbf{E}_n, \tag{1}$$

where $(\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top =: \beta \in \mathbb{R}^p$ is a vector of unknown parameters, $\mathbf{E}_n := (\varepsilon_{\ell k})_{k=1,\ell=1}^{n,\ n}$ is an $n \times n$ random matrix whose components are independent, real-valued random variables $\varepsilon_{\ell k}$, $1 \leq \ell, k \leq$

n, defined on a common probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ having mean 0 and variance $\sigma^2_{\ell k}$, $0 < \sigma^2_{\ell k} < \infty$, $1 \leq \ell, k \leq n$, and $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ is the unknown true regression function. Thus, under null-hypothesis we consider a *heteroscedastic* linear model, while under the alternative we assume a non-parametric *heteroscedastic* regression model. It is worth mentioning that under H_0 and H_1 we need not to assume any specific distribution for the random errors $\varepsilon_{\ell k}$, $1 \leq \ell, k \leq n$. Under the assumption $f_1(\Xi_n), \ldots, f_p(\Xi_n)$ are linearly independent in $\mathbb{R}^{n\times n}$, the corresponding matrix of least squares residuals of the observations under H_0 is given by

$$\mathbf{R}_n := (r_{\ell k})_{k=1,\ell=1}^{n,\ n} = \mathbf{E}_n - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle f_i(\Xi_n), \mathbf{E}_n\rangle_{\mathbb{R}^{n\times n}} f_i(\Xi_n)}{\langle f_i(\Xi_n), f_i(\Xi_n)\rangle_{\mathbb{R}^{n\times n}}}.$$

Recently, for a fixed $n \geq 1$, MacNeill and Jandhyala [7], and Xie and MacNeill [11] define an operator $T_n : \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathcal{C}(\mathbf{I})$, given by

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_n(\mathbf{A})(z_1, z_2) := &\sum_{k=1}^{[nz_2]}\sum_{\ell=1}^{[nz_1]} a_{\ell k}\\ &+ (nz_1 - [nz_1]) \sum_{\ell=1}^{[nz_2]} a_{[nz_1]+1,\ell} + (nz_2 - [nz_2]) \sum_{k=1}^{[nz_1]} a_{k,[nz_2]+1}\\ &+ (nz_1 - [nz_1])(nz_2 - [nz_2]) a_{[nz_1]+1,[nz_2]+1},\ (z_1, z_2) \in \mathbf{I},\end{aligned}$$

for every $\mathbf{A} = (a_{\ell k})_{k=1,\ell=1}^{n,n}$, where $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{T}_n(\mathbf{A})(t, s) = 0$, if $t = 0$ or $s = 0$. Here $\mathcal{C}(\mathbf{I})$ is the space of continuous functions on $\mathbf{I}$ furnished with the supremum norm. By the operator $\mathbf{T}_n$, the matrix of the least squares residuals is induced into a stochastic process $\{\mathbf{T}_n(\mathbf{R}_n)(t, s) : (t, s) \in \mathbf{I}\}$ having sample paths in $\mathcal{C}(\mathbf{I})$. Let us call this process residual partial sums process. It is common in practice to test (1) by investigating a functional of the residual partial sums process such as a Kolmogorov type statistic, defined by $K_n := \max_{1\leq \ell,k\leq n} \mathbf{T}_n(\mathbf{R}_n)(\ell/n, k/n)$. Therefore in order to establish this test problem we need to investigate the limit process of the sequence $\{\mathbf{T}_n(\mathbf{R}_n)(t, s) : (t, s) \in \mathbf{I}\}_{n\geq 1}$ under H_0 as well as under H_1. In MacNeill and Jandhyala [7] and in Xie and MacNeill [11] the limit process of this sequence was derived explicitly in which homoscedasticity was assumed, i.e. $\sigma^2_{\ell k} = \sigma^2$, for $1 \leq \ell, k \leq n$. It was shown therein that under the condition of the regression functions are continuously differentiable, the limit process is a complicated function of the Brownian sheet. In Somayasa [10] the limit process of such a sequence was also derived by generalizing the approach of Bischoff [4] from one to higher dimensional case. In contrast to the result of MacNeill and Jandhyala [7] and Xie and MacNeill [11], Somayasa [10] got the structure of the limit process as a projection of the Brownian sheet onto its reproducing kernel Hilbert space. In this paper we establish the limit process of the heteroscedastic linear regression model defined above, see Section 2. In Section 3 we discuss examples of the limit process corresponding to polynomial models. In Section 4 we construct the critical region of the Kolmogorov type test.

2. Residual partial sums limit process

In the sequel we characterize the heteroscedasticity of the regression model by defining a function $h : \mathbf{I} \to \mathbb{R}_{>0}$, such that $\sigma^2_{\ell k} = h(\ell/n, k/n)$, $1 \leq \ell, k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, where h is assumed to be a function of bounded variation in the sense of Vitali, see Clarkson and Adams [5].

Definition 2.1. *A stochastic process $\{B_h(t, s) : (t, s) \in \mathbf{I}\}$ is called a h-Brownian sheet on $\mathcal{C}(\mathbf{I})$, if*

1. $B_h(t,s) = 0$ *almost surely (a.s.), if* $t = 0$ *or* $s = 0$.
2. For *every rectangle* $[t_1,t_2] \times [s_1,s_2] \subset \mathbf{I}$, $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$, $0 \le s_1 \le s_2 \le 1$,

$$\Delta_{[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]} B_h \sim \mathcal{N}\left(0, \int_{[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]} h \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right),$$

where $\Delta_{[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]} B_h := B_h(t_2,s_2) - B_h(t_1,s_2) - B_h(t_2,s_1) + B_h(t_1,s_1)$, and $\lambda_{\mathbf{I}}$ is the Lebesgue measure on $\mathbf{I}$. Random variable $\Delta_{[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]} B_h$ is called the increment of B_h over $[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]$.
3. *For any two rectangles* $\mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}$, $\mathbf{I}_2 \subset \mathbf{I}$ *with* $\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2 = \emptyset$, $\Delta_{\mathbf{I}_1} B_h$ *and* $\Delta_{\mathbf{I}_2} B_h$ *are mutually independent.*

We refer the reader to MacNeill and et al. [**?**] for the existence of such a process. In case h is a constant function, B_h is the Brownian sheet whose existence has been studied by Yeh [12], Kuelbs [6], and Park [9]. As a consequent of Definition 2.1, the covariance function of B_h is given by

$$K_{B_h}(t_1,s_1;t_2,s_2) := Cov(B_h(t_1,s_1), B_h(t_2,s_2)) = \int_{[0,t_1\wedge t_2]\times[0,s_1\wedge s_2]} h \, d\lambda_{\mathbf{I}},$$

$(t_1,s_1),(t_2,s_2) \in \mathbf{I}$, where $x \wedge y$ stands for the minimum between x and y.

Theorem 2.1. *Let* $(\mathbf{E}_n)_{n\ge1}$, $\mathbf{E}_n := (\varepsilon_{\ell k})_{k=1,\ell=1}^{n,n}$ *be a sequence of* $n \times n$ *random matrix such that* $\varepsilon_{\ell k}$ *are mutually independent with* $\mathbb{E}(\varepsilon_{\ell k}) = 0$ *and* $Var(\varepsilon_{\ell k}) = h(\ell/n, k/n)$, $1 \le \ell, k \le n$, $n \ge 1$. *Then* $\frac{1}{n}\mathbf{T}_n(\mathbf{E}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} B_h$, *as* $n \to \infty$, *in* $\mathcal{C}(\mathbf{I})$. *Here* $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ *stands for the convergence in distribution (weakly), see Billingsley [2], p. 23.*

Proof. See MacNeill and et al. [**?**]. □

Theorem 2.2. *Let* $f_1,\dots,f_p$ *be continuous and have bounded variation in the sense of Hardy (Clarkson and Adams [5]) on* $\mathbf{I}$. *If* $f_1,\dots,f_p$ *are linearly independent in* $L_2(\mathbf{I},\lambda_{\mathbf{I}})$, *where* $L_2(\mathbf{I},\lambda_{\mathbf{I}})$ *is the Hilbert space of squared integrable functions on* $\mathbf{I}$ *with respect to* $\lambda_{\mathbf{I}}$, *then*

$$\frac{1}{n}\mathbf{T}_n(\mathbf{R}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}, \text{ as } n \to \infty, \text{ in } \mathcal{C}(\mathbf{I}),$$

where

$$B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}(t,s) := B_h(t,s) - \left(\int_{[0,t]\times[0,s]} \tilde{\mathbf{f}}^\top \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right) \mathbf{W}^{-1} \left(\int_{\mathbf{I}}^{(R)} \tilde{\mathbf{f}} \, dB_h\right), \ (t,s) \in \mathbf{I},$$

$$\int_{[0,t]\times[0,s]} \tilde{\mathbf{f}}^\top \, d\lambda_{\mathbf{I}} := \left(\int_{[0,t]\times[0,s]} f_1 \, d\lambda_{\mathbf{I}}, \dots, \int_{[0,t]\times[0,s]} f_p \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right)$$

$$\int_{\mathbf{I}}^{(R)} \tilde{\mathbf{f}} \, dB_h := \left(\int_{\mathbf{I}}^{(R)} f_1 \, dB_h, \dots, \int_{\mathbf{I}}^{(R)} f_p \, dB_h\right)^\top.$$

Here $\mathbf{W} := \left(\int_{\mathbf{I}} f_i f_j \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right)_{i=1,j=1}^{p,p} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *is invertible. Furthermore* $B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}$ *is a process with the covariance function given by*

$$\begin{aligned} K_{B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}}(t,s;t',s') :=\ & Cov\left(B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}(t,s), B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}(t',s')\right) \\ = \int_{[0,t\wedge t'][0,s\wedge s']} h \, d\lambda_{\mathbf{I}} & - \left(\int_{[0,t']\times[0,s']} \tilde{\mathbf{f}}^\top \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right) \mathbf{W}^{-1} \left(\int_{[0,t]\times[0,s]} \tilde{\mathbf{f}} h \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right) \\ & - \left(\int_{[0,t]\times[0,s]} \tilde{\mathbf{f}}^\top \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right) \mathbf{W}^{-1} \left(\int_{[0,t']\times[0,s']} \tilde{\mathbf{f}} h \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right) \\ & + \left(\int_{[0,t]\times[0,s]} \tilde{\mathbf{f}}^\top \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right) \mathbf{W}^{-1} \left(\int_{\mathbf{I}} f_i f_j h \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right)_{i=1,j=1}^{p,\ p} \mathbf{W}^{-1} \left(\int_{[0,t']\times[0,s']} \tilde{\mathbf{f}} \, d\lambda_{\mathbf{I}}\right). \end{aligned}$$

Here and in the sequel $\int^{(R)}$ denotes Riemann-Stieltjes integral, see Young [13] and Somayasa [10], p. 115.

Proof. The proof of Theorem 2.2 in Bischoff [3] and the result of Bischoff [4] can be extended to the case of higher experimental regions. □

3. Examples

In this section we discuss several examples of the residual partial sums limit processes of constant, first-order and second-order regression models.

3.1. Constant regression model

As a simple case, we consider a constant model, i.e. $\mathbf{Y}(\Xi_n) = \beta f_1(\Xi_n) + \mathbf{E}_n$, where β is an unknown parameter and $f_1(t,s) = 1$, for $(t,s) \in \mathbf{I}$. Then the residual partial sums limit process of this model is given by

$$B_{h,\tilde{\mathbf{f}}_0}(t,s) := B_h(t,s) - tsB_h(1,1),\ (t,s) \in \mathbf{I},$$

which is the standard Brownian bridge when h is constant, see e.g. McNeill and Jandhyala [7] and Somayasa [10], p. 20.

3.2. First order regression model

Let us consider a first-order regression model

$$\mathbf{Y}(\Xi_n) = \beta_1 f_1(\Xi_n) + \beta_2 f_2(\Xi_n) + \beta_3 f_3(\Xi_n) + \mathbf{E}_n,$$

where β_1, β_2 and β_3 are unknown parameters, $f_1(t,s) = 1$, $f_2(t,s) = t$ and $f_3(t,s) = s$, for $(t,s) \in \mathbf{I}$. Associated to this model we have

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Then the residual partial sums limit process of this model is given by

$$\begin{aligned} B_{h,\tilde{\mathbf{f}}_1}(t,s) :=& B_h(t,s) - (7ts - 3t^2 s - 3ts^2)B_h(1,1) \\ & - (-6ts + 6t^2 s)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} B_h(t,1)dt\right) \\ & - (-6ts + 6ts^2)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} B_h(1,s)ds\right),\ (t,s) \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

3.3. Second order regression model

For the third example we consider a second-order polynomial model

$$\mathbf{Y}(\Xi_n) = \beta_1 f_1(\Xi_n) + \beta_2 f_2(\Xi_n) + \beta_3 f_3(\Xi_n) + \beta_4 f_4(\Xi_n) + \beta_5 f_5(\Xi_n) + \beta_6 f_6(\Xi_n) + \mathbf{E}_n,$$

where β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 and β_6 are unknown parameters, $f_1(t,s) = 1$, $f_2(t,s) = t$, $f_3(t,s) = s$, $f_4(t,s) = t^2$, $f_5(t,s) = ts$, $f_6(t,s) = s^2$, for $(t,s) \in \mathbf{I}$. Accordingly the matrix $\mathbf{W}$ and $\mathbf{W}^{-1}$ are given by

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/4 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/6 & 1/5 & 1/8 & 1/9 \\ 1/4 & 1/6 & 1/6 & 1/8 & 1/9 & 1/8 \\ 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/9 & 1/8 & 1/5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} 26 & -54 & -54 & 30 & 36 & 30 \\ -54 & 228 & 36 & -180 & -72 & 0 \\ -54 & 36 & 228 & 0 & -72 & -180 \\ 30 & -180 & 0 & 180 & 0 & 0 \\ 36 & -72 & -72 & 0 & 144 & 0 \\ 30 & 0 & -180 & 0 & 0 & 180 \end{pmatrix}.$$

Let $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ be functions of $\mathbf{I}$ defined by $y_1(t,s) := 26ts - 27t^2s - 27ts^2 + 10t^3s + 9t^2s^2 + 10ts^3$, $y_2(t,s) := -54ts + 114t^2s + 18ts^2 - 60t^3s - 18t^2s^2 - 60ts^3$, $y_3(t,s) := -54ts + 18t^2s + 114ts^2 - 18t^2s^2 - 60ts^3$, $y_4(t,s) := 30ts - 90t^2s + 60t^3s$, $y_5(t,s) := 36ts - 36t^2s - 36ts^2 + 36t^2s^2$ and $y_6(t,s) := 30ts - 90ts^2 + 60ts^3$. The residual partial sums limit process of this model can be expressed by

$$\begin{aligned} B_{h,\tilde{\mathbf{f}}_2}(t,s) &:= B_h(t,s) - y_1(t,s)B_h(1,1) \\ &- y_2(t,s)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} B_h(t,s)dt\right) \\ &- y_3(t,s)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} B_h(1,s)ds\right) \\ &- y_4(t,s)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} 2B_h(t,1)tdt\right) \\ &- y_5(t,s)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} B_h(t,1)dt - \int_{[0,1]} B_h(1,s)ds + \int_{[0,1]} B_h(t,s)dtds\right) \\ &- y_6(t,s)\left(B_h(1,1) - \int_{[0,1]} 2B_h(1,s)sds\right), \ (t,s) \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

4. Kolmogorov type test

Kolmogorov type test for Hypotheses (1) is a test based on the statistic $K_{n,\mathbf{f}} := \max_{0\le \ell,k\le n} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{k} r_{ij}$. We put $r_{ij} = 0$ if $i = 0$ or $j = 0$. We note that by the property of the partial sums, it holds $K_{n,\mathbf{f}} = \sup_{0\le t,s\le 1} \frac{1}{n}\mathbf{T}_n(\mathbf{R}_n)(t,s)$

Theorem 4.1. *For a fixed $\alpha \in (0,1)$, let $\tilde{c}_\alpha$ be the α-quantile of $\sup_{0\le t,s\le 1} B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}(t,s)$, i.e. a constant such that $\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t,s\le 1} B_{h,\tilde{\mathbf{f}}}(t,s) \le \tilde{c}_\alpha\right\} = \alpha$. Then an asymptotically size α test based on $K_{n,\mathbf{f}}$ is given by*

reject H_0 if and only if $K_{n,\mathbf{f}} \ge \tilde{c}_{1-\alpha}$.