Jurnal Matematika Vol. 5 No.2, Desember 2015. ISSN: 1693-1394

Konstruksi Ring Bersih dari Sebarang Ring

Kartika Sari
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, Bukit Jimbaran-Bali
e-mail: sarikaartika@unud.ac.id

Indah Emilia Wijayanti
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
e-mail: ind_wijayanti@yahoo.com

Abstract: The aims of this research was to construct a clean ring from any ring. The base on the fact that the endomorphism ring of every pure-injective module is clean, it was constructed a clean ring from any ring. So, the result of this research was it always could be constructed a clean ring from any ring.

Keywords: construct, a clean ring, pure-injective module

Abstrak: Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membangun ring bersih dari sebarang ring. Berdasarkan kenyataan bahwa ring endomorfisma dari setiap modul *pure-injective* merupakan ring bersih, dalam penelitian ini dibangun suatu ring bersih dari sebarang ring. Oleh karena itu, sebagai hasil dari penelitian ini adalah bahwa selalu dapat dikonstruksikan ring bersih dari sebarang ring.

Kata kunci: konstruksi, suatu ring bersih, modul *pure-injective*

1. Pendahuluan

Suatu ring R dikatakan ring bersih apabila setiap elemen dari ring R dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit dari ring R. Definisi ini diberikan oleh Nicholson pada tahun 1977 (Nicholson & Zhou [10])**.** Berdasarkan definisi ini, ring dari himpunan semua bilangan rasional ($\mathbb{Q}$) dan ring semua bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan ring bersih, sedangkan ring dari himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bukan ring bersih, karena terdapat elemen di $\mathbb{Z}$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit dari ring $\mathbb{Z}$. Dengan demikian, tidak semua ring merupakan ring bersih.

Mengingat tidak semua ring merupakan ring bersih, timbul pertanyaan mungkinkah dikonstruksikan suatu ring bersih dari sebarang ring yang diberikan?. Salah satu cara membangun ring yang memiliki sifat yang diharapkan dari ring yang diberikan adalah melalui penyisipan. Suatu ring *T* dapat disisipkan ke dalam suatu ring

S apabila terdapat suatu monomorfisma dari T ke S, yang juga berarti terdapat subring R di S dengan $R \cong T$ (Malik dkk. [9]). Dalam hal ini, ring S dinamakan ring perluasan dari ring T. Telah diketahui bahwa sebarang ring yang berupa daerah integral dapat disisipkan ke dalam suatu lapangan hasil bagi, yang merupakan ring bersih, misalnya ring $\mathbb{Z}$ dapat disisipkan ke dalam ring $\mathbb{Q}$.

Lebih lanjut lagi, untuk ring R dan S seperti disebutkan terdahulu, subring R di S dikatakan esensial apabila untuk setiap ideal tak nol I di S berlaku $R \cap I \neq \{0\}$ (Andruszkiewicz [1]). Dalam keadaan ini, ring S dikatakan ring perluasan esensial dari ring R. Diperhatikan bahwa ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan subring dari ring bilangan rasional $\mathbb{Q}$. Ring $\mathbb{Q}$ merupakan ring perluasan esensial dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$, karena satu-satunya ideal tak nol di $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{Q}$ dan berlaku $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$. Dengan demikian ring $\mathbb{Z}$ yang bukan ring bersih dapat disisipkan dalam ring bersih $\mathbb{Q}$ yang merupakan ring perluasan esensial dari ring $\mathbb{Z}$. Seiring dengan fenomena ini, Burgess & Raphael [2] dalam artikelnya menunjukkan bahwa sebarang ring dapat disisipkan ke dalam suatu ring bersih yang merupakan ring perluasan esensial dari ring yang diberikan.

Berdasarkan artikel Burgess & Raphael [2], dalam penelitian ini dilakukan kajian dan pembahasan mendetil mengenai bagaimana cara menyisipkan sebarang ring R ke dalam suatu ring bersih yang merupakan ring perluasan esensial dari ring R. Selain itu, dalam penelitian ini juga diberikan contoh konstruksi ring bersih dari ring $\mathbb{Z}$ dengan cara tersebut.

2. Ring Endomorfisma dari Modul Injektif-Murni

Misalkan diberikan ring $R = \mathbb{Z}$. Ideal-ideal dari ring R adalah $k\mathbb{Z}$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Di antara ideal-ideal tersebut terdapat ideal yang setiap elemennya bisa dinyatakan dalam bentuk penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di R, yaitu ideal $\{0\}$. Ideal semacam ini dinamakan ideal bersih, sesuai dengan definisi yang diberikan oleh Chen & Chen [4] berikut ini.

Definisi 1 (Chen & Chen [4]) *Diberikan ring R. Ideal I dari ring R dikatakan bersih apabila setiap elemen dalam I dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di R.*

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 1, Nicholson & Zhou [10] memberikan sifat ideal dan ring faktor dari suatu ring bersih.

Teorema 3 (Nicholson & Zhou [10]) *Diberikan ring R dan I ideal dari ring R. Jika ring R merupakan ring bersih, maka ideal I dan ring R/I secara berturut-turut merupakan ideal dan ring bersih.*

Berikutnya, masih berhubungan dengan ring faktor dari suatu ring bersih, diberikan sifat hubungan ring dengan ring faktornya, apabila idealnya termuat dalam atau merupakan suatu radikal Jacobson dari ring tersebut.

Teorema 4 (Han & Nicholson [6]) *Diberikan* I *ideal dari ring* R *dan* $I \subseteq J(R)$ *dengan* $J(R)$ *radikal Jacobson dari ring* R. *Jika ring faktor* R/I *merupakan ring bersih dan setiap elemen idempoten dari ring faktor* R/I *dapat diangkat menjadi idempoten dari ring* R, *maka ring R merupakan ring bersih*.

Selanjutnya, Camillo dkk. [3] menunjukkan ring endomorfisma dari modul semisederhana atau kontinu non singular merupakan ring bersih, seperti seperti diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 5 (Camillo dkk. [3]) *Diberikan R-modul M semisederhana atau kontinu non singular,* $f \in End_R(M)$ *dan himpunan pasangan terurut* ε_f, *berlaku*

a. *(W,e) maksimal jika dan hanya jika W = M.*
b. *Untuk sebarang* $(W_0,e_0) \in \varepsilon_f$, *terdapat dekomposisi bersih* $f = e + u$ *dengan u elemen unit di* $End_R(M)$ *dan e elemen idempoten di* $End_R(M)$. *Khususnya, modul M bersih*.

Lebih lanjut lagi, misalkan $\{M_i\}_{i \in I}$ suatu keluarga *R*-modul kanan dengan *I* himpunan indeks yang tidak harus berhingga, maka himpunan hasil kali kartesius $\prod_{i \in I} M_i$ merupakan himpunan yang elemen-elemennya berupa barisan $(x_i)_{i \in I}$ dengan $x_i \in M_i$ untuk setiap $i \in I$. Himpunan $\prod_{i \in I} M_i$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar komponen demi komponen, membentuk *R*-modul kanan. Himpunan $\prod_{i \in I} M_i$ sering ditulis sebagai M^I. Berikut dibahas suatu jenis submodul di $\prod_{i \in I} M_i$. Akan tetapi sebelumnya, diberikan beberapa konsep mengenai filter suatu himpunan, modul injektif murni, modul kompak secara persamaan dan hubungan antara modul injektif murni dan modul kompak secara persamaan.

Definisi 6 (Hrbacek & Jech [7]) *Diberikan himpunan tak kosong S. Filter* $\mathcal{F}$ *pada himpunan S adalah keluarga himpunan-himpunan bagian dari S, yang memenuhi aksioma-aksioma:*

1. $S \in \mathcal{F}$ *dan* $\phi \notin \mathcal{F}$.
2. *Jika* $X, Y \in \mathcal{F}$, *maka* $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

3. *Jika* $X, Y \subseteq S$, $X \in \mathcal{F}$ *dan* $X \subseteq Y$, *maka* $Y \in \mathcal{F}$.

Berdasarkan Definisi 6, berikut diberikan beberapa contoh filter.

Contoh 7

a. Diberikan himpunan $S = \{1,2,3\}$. Contoh-contoh filter pada himpunan S antara lain adalah himpunan-himpunan $\mathcal{A} = \{S\}$, $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ dan $\mathcal{D} = \{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.
b. Filter-filter pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ antara lain adalah $\mathcal{P} = \{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$, dan $\mathcal{T} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},...,\{1,2,3\},....,\mathbb{N}\}$.
c. Diberikan himpunan tak berhingga W. Himpunan

$$\mathcal{W}^{o} = \{X \subseteq W \mid W \setminus X \text{ adalah himpunan dengan berhingga elemen}\}$$

merupakan filter pada W dan sering disebut sebagai filter Fréchet.

Dalam Contoh 7 bagian a dan b, tampak bahwa dalam setiap filter tersebut terdapat suatu elemen yang termuat dalam setiap elemen filter tersebut. Berikut ini diberikan definisi filter yang memuat suatu elemen yang termuat dalam setiap elemen filter tersebut.

Definisi 8 (Hrbacek & Jech [7]) *Diberikan suatu himpunan tak kosong S. Filter* $\mathcal{F}$ *dikatakan filter utama* (*principal*) *pada himpunan S apabila terdapat* $X_0 \in \mathcal{F}$ *untuk setiap* $X \in \mathcal{F}$ *yang memenuhi* $X_0 \subseteq X$.

Berdasarkan Definisi 8, setiap filter pada setiap himpunan berhingga merupakan filter utama. Selain filter utama, terdapat filter yang bukan filter utama (*non principal filter*), misalnya filter $\mathcal{W}^{o}$ pada Contoh 7 bagian c.

Berikutnya, diberikan definisi modul injektif murni dan modul kompak secara persamaan beserta hubungan antara kedua modul ini.

Definisi 9 (Camillo, dkk. [3]) *R-modul kanan K dikatakan modul injektif-murni apabila untuk setiap monomorfisme murni* $h': M' \to M$ *dan untuk setiap homomorfisme* $f': M' \to K$ *terdapat homomorfisme* $g': M \to K$ *dengan* $f' = g'h'$.

Definisi 10 (Dauns [5]) *Untuk sebarang bilangan kardinal tak berhingga* $\aleph$, *modul M dikatakan* $\aleph^{<}$*-kompak secara persamaan apabila untuk setiap sistem persamaan linear* $\sum_{i \in I} x_i r_{ij} = m_j \in M \; (j \in J)$ *dengan* $|J| < \aleph$, *yang mempunyai penyelesaian berhingga di M juga penyelesaian menyeluruh di M. Modul M kompak secara persamaan apabila modul tersebut* $\aleph^{<}$*-kompak secara persamaan untuk semua bilangan kardinal tak berhingga* $\aleph$.

Hubungan antara modul injektif murni dengan modul kompak secara persamaan diberikan oleh Dauns dalam Teorema berikut ini.

Teorema 11 (Dauns [5]) *Apabila diberikan R-modul M dan* $\aleph = [\max(|\mathrm{R}|, \aleph_0)]^+$ *yaitu bilangan kardinal succesor dari* $|\mathrm{R}| + \aleph_0$, *maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

1) *M kompak secara persamaan.*
2) *M* $\aleph^<$*-kompak secara persamaan*
3) *M injektif-murni.*

Lebih lanjut lagi, berikut ini diberikan suatu lema menyangkut konstruksi submodul dari $\prod_{i \in I} M_i$.

Lemma 12 (Jensen & Zimmerman-Huisgen [8]) *Diberikan keluarga R-modul* $\{M_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{F}$ *suatu filter pada himpunan* I , *dengan I suatu himpunan indeks. Jika didefinisikan himpunan*

$$U_{\mathcal{F}} = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \,|\, \textit{terdapat } F \in \mathcal{F}, x_i = 0 \textit{ untuk semua } i \in F\}$$

maka $U_{\mathcal{F}}$ *submodul dari* $\prod_{i \in I} M_i$

Bukti:

Diambil sebarang $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in U_{\mathcal{F}}$ dan $r \in R$. Karena $(x_i)_{i \in I} \in U_{\mathcal{F}}$, maka terdapat $F_1 \in \mathcal{F}$ sehingga untuk semua $i \in F_1$, $x_i = 0$. Demikian pula, karena $(y_i)_{i \in I} \in U_{\mathcal{F}}$, maka terdapat $F_2 \in \mathcal{F}$ sehingga untuk semua $i \in F_2$, $y_i = 0$. Diperoleh $(x_i)_{i \in I} r = (x_i r)_{i \in I} \in U_{\mathcal{F}}$. Karena $\mathcal{F}$ suatu filter, maka $F_1 \cap F_2 \neq \phi$. Oleh karena itu, terdapat himpunan tak kosong $F = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Akibatnya untuk setiap $i \in F$, berlaku $x_i - y_i = 0$ pada $(x_i)_{i \in I} - (y_i)_{i \in I} = (x_i - y_i)_{i \in I}$. Dengan demikian $(x_i)_{i \in I} - (y_i)_{i \in I} \in U_{\mathcal{F}}$. Jadi $U_{\mathcal{F}}$ submodul di $\prod_{i \in I} M_i$. □

Berkaitan dengan submodul yang dikonstruksikan seperti pada Lemma 12, berikut diberikan sifat modul faktor yang dibentuk dengan menggunakan submodul tersebut.

Teorema 13 (Jensen & Zimmerman-Huisgen [8])
Diberikan keluarga R-modul $\{M_i\}_{i \in I}$. *Jika* $\mathcal{F}$ *suatu filter pada I yang memuat suatu rantai denumerabel* $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ *yang mempunyai irisan kosong, maka hasil*

kali tereduksi $\prod_{i\in I} M_i \big/ U_{\mathcal{F}}$ *merupakan modul* $\aleph$*-kompak secara persamaan*, *dengan* $\aleph = \aleph_0^{\ +}$.

Bukti:

Diberikan keluarga *R*-modul $\{M_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{F}$ suatu filter pada *I* yang memuat suatu rantai denumerabel

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$$

yang mempunyai irisan kosong. Berdasarkan Lemma 12, Karena $U_{\mathcal{F}}$ submodul dari $\prod_{i\in I} M_i$ maka dapat dibentuk modul faktor $\prod_{i\in I} M_i \big/ U_{\mathcal{F}}$, misalkan dinamakan *M*. Selanjutnya, diperhatikan suatu sistem persamaan linear denumerabel yang mempunyai penyelesaian berhingga

$$\sum_{l\in L} x_l r_{lj} = m_j \quad (j \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

dengan $m_j = [m_{ji}]_{i\in I} \in M$, *L* suatu himpunan indeks. Karena sistem persamaan (1) mempunyai penyelesaian berhingga, maka untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat suatu penyelesaian $\left(a_l^{(k)}\right)_{l\in L}$ yang merupakan penyelesaian dari *k* persamaan pertama, sehingga berlaku

$$\sum_{l\in L} a_l^{(k)} r_{lj} = m_j \quad (j \in \mathbb{N})$$

Diperhatikan bahwa $a_l^{(k)} = [a_{li}^{(k)}]_{i\in I} \in M$, maka untuk $1 \le j \le k$, berlaku

$$\sum_{l\in L} a_l^{(k)} r_{lj} - m_j = 0 \in U_{\mathcal{F}}$$

Hal ini berarti, sebagai elemen hasil kali langsung, suatu himpunan indeks yang bersesuaian dengan elemen nol pada hasil kali langsung, merupakan elemen dari $\mathcal{F}$. Karena itu terdapat elemen $U_{\mathcal{F}}$ yang elemen-elemennya nol untuk setiap $1 \le j \le k$, diperoleh himpunan $\overline{F_k} \in \mathcal{F}$ dengan $\overline{F_k} \subseteq F_k$, sehingga untuk semua $i \in \overline{F_k}$ berlaku

$$\sum_{l\in L} a_{li}^{(k)} r_{lj} = m_{ji} \ (1 \le j \le k).$$

Selanjutnya, berdasarkan asumsi $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\overline{F_i}=\phi$, tidak ada elemen I yang menjadi elemen dari semua himpunan pada barisan $\{\overline{F_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Karena itu untuk suatu $i\in I$ terdapat $q(i)$ sehingga $\overline{F}_{q(i)}$ elemen terakhir dari barisan $\{\overline{F_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ dengan $i\in\overline{F}_{q(i)}$

Sekarang, didefinisikan a_l dengan $a_l=[a_{li}^{(q(i))}]$ untuk setiap $i\in I$. Diambil $i\in\overline{F_j}-\overline{F_{j+1}}$ sehingga $i\in I$ dan $q(i)\geq j$ untuk setiap $j\in\mathbb{N}$, akibatnya $\sum_{l\in\mathcal{L}}a_{li}^{(q(i))}r_{lj}=m_{ji}$ untuk semua $i\in\overline{F_{q(i)}}$. Dengan demikian elemen-elemen a_l memberikan penyelesaian menyeluruh untuk sistem persamaan (1). Dengan kata lain R-modul M merupakan modul $\aleph^{<}$-kompak secara persamaan, dengan $\aleph=\aleph_0{}^{+}$.□

Jika diberikan keluarga R-modul $\{M_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{F}$ filter pada I dan $U_{\mathcal{F}}$ submodul dari hasil kali langsung keluarga $\{M_i\}_{i\in I}$, $\prod_{i\in I}M_i$, seperti dikonstruksikan dalam Lemma 12, maka modul faktor yang terbentuk, yaitu $\prod_{i\in I}M_i\big/U_{\mathcal{F}}$, dinamakan hasil kali tereduksi modulo $U_{\mathcal{F}}$, sedangkan apabila $M_i\cong M$ untuk setiap $i\in I$, maka modul faktor yang terbentuk, yaitu $M^I\big/U_{\mathcal{F}}$ dinamakan pangkat tereduksi modulo $U_{\mathcal{F}}$. Dalam kasus $\mathcal{F}$ ultrafilter pada I, modul faktor $\prod_{i\in I}M_i\big/U_{\mathcal{F}}$ dan $M^I\big/U_{\mathcal{F}}$ secara berturut-turut dinamakan *ultraproduct* dan *ultrapower*, sedangkan apabila $\mathcal{F}$ ultrafilter tidak utama pada I , modul faktor $\prod_{i\in I}M_i\big/U_{\mathcal{F}}$ dan $M^I\big/U_{\mathcal{F}}$ secara berturut-turut dinamakan *ultraproduct* dan *ultrapower* non trivial. Umumnya, submodul $U_{\mathcal{F}}$ hanya ditulis $\mathcal{F}$.

Berikut, diberikan akibat langsung dari Teorema 13.

Akibat 14 (Jensen & Zimmermann-Huisgen [8])

Jika $|R|\leq\aleph_0$, *maka setiap hasil kali tereduksi R-modul* $\prod_{i\in I}M_i\big/U_{\mathcal{F}}$, *dengan* $\mathcal{F}$ *suatu filter yang memuat semua himpunan bagian dari* $\mathbb{N}$ *yang komplemennya merupakan himpunan berhingga di* $\mathbb{N}$, *merupakan modul injektif-murni. Khususnya, setiap R-modul ultraproduct denumerabel non-trivial merupakan modul injektif-murni .*

Bukti:

Diberikan R-modul M dengan $|R| \leq \aleph_0$. Berdasarkan Teorema 13, R-modul $\prod_{i\in I} M_i / U_{\mathcal{F}}$ merupakan modul $\aleph^<$-kompak secara persamaan dengan $\aleph = \aleph_0^+$. Di lain pihak, karena $|R| \leq \aleph_0$ maka [$\aleph_0+\aleph_0]^+ = \aleph_0^+ = \aleph$. Oleh karena itu berdasarkan Teorema 11, R-modul $\prod_{i\in I} M_i / U_{\mathcal{F}}$ merupakan modul kompak secara persamaan. Kembali berdasarkan Teorema 11, R-modul $\prod_{i\in I} M_i / U_{\mathcal{F}}$ merupakan modul injektif-murni.□

Berdasarkan Akibat 14, R-modul $\prod_{i\in I} M_i / U_{\mathcal{F}}$ merupakan contoh modul injektif-murni, untuk suatu keluarga R-modul $\{M_i\}_{i\in I}$, dengan $U_{\mathcal{F}}$ suatu submodul dari R–modul $\prod_{i\in I} M_i$ seperti yang dibangun pada Lemma 12.

Selanjutnya, Zimmermann-Huisgen & Zimmermann [11] menunjukkan beberapa sifat dengan sifat ring endomorfisma dari modul injektif-murni, seperti dinyatakan berikut ini.

Teorema 15 (Zimmermann-Huisgen & Zimmermann [11])

Diberikan R-modul M injektif-murni, $S = End_R(M)$, *dan* $J(S)$ *radikal Jacobson dari ring S. Ring faktor* $S/J(S)$ *merupakan ring reguler (von Newmann), ring quasi-injektif kanan dan setiap elemen idempoten dari ring faktor* $S/J(S)$ *dapat diangkat menjadi elemen idempoten dari ring S.*

Berdasarkan Teorema 15, Teorema 4 dan Teorema 5 diperoleh akibat langsung berikut ini.

Akibat 16 (Camillo dkk. [3]) *Ring endomorfisma dari modul injektif-murni merupakan ring bersih*.

3. Konstruksi Ring Bersih dari Sebarang Ring

Berikut dibahas teorema yang menjadi kajian utama dari tulisan ini.

Teorema 19 (Burgess & Raphael [2]) *Sebarang ring dapat disisipkan ke dalam suatu ring bersih yang merupakan ring perluasan esensial dari ring yang diberikan*.

Bukti:

Diberikan sebarang ring R. Dibentuk hasil kali kartesius sebanyak terhitung dari R, yaitu $R^{\mathbb{N}}$ dengan $\mathbb{N}$ himpunan semua bilangan asli. Pada $R^{\mathbb{N}}$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian seperti pada R, komponen demi komponen., maka $R^{\mathbb{N}}$ merupakan ring dengan elemen satuan $(1_R, 1_R, 1_R, ...)$ Jelas, $R^{\mathbb{N}}$ juga dapat dipandang sebagai $R^{\mathbb{N}}$ -modul kanan sekaligus $\mathbb{Z}$-modul kiri. Karena sifat kompabilitas terpenuhi, maka $R^{\mathbb{N}}$ dapat dipandang sebagai ($\mathbb{Z}$, $R^{\mathbb{N}}$)-bimodul.

Selanjutnya, dikonstruksikan suatu pengaitan d sebagai berikut:

$$d : R \to R^{\mathbb{N}}$$
$$d : r \mapsto (r, r, r, ...)$$

Mudah ditunjukkan bahwa d merupakan suatu homomorfisma ring.

Selanjutnya, dibentuk himpunan $\mathscr{F}$, yaitu filter tidak utama pada $\mathbb{N}$, yaitu

$$\mathscr{F} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ himpunan dengan banyak elemen berhingga}\}$$

dan didefinisikan

$$I_{\mathscr{F}} = \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \text{untuk suatu } F \in \mathscr{F}, r_n = 0 \text{ untuk setiap } n \in F\}.$$

Lebih lanjut lagi, akan ditunjukkan $I_{\mathscr{F}}$ ideal dari ring $R^{\mathbb{N}}$. Diambil sebarang $(r_n')_{n\in\mathbb{N}}, (r_n'')_{n\in\mathbb{N}} \in I_{\mathscr{F}}$. Diperoleh

$$(r_n')_{n\in\mathbb{N}} - (r_n'')_{n\in\mathbb{N}} \in I_{\mathscr{F}}. \tag{2}$$

Kemudian, diambil sebarang $(r_n*)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$. Karena $(r_n')_{n\in\mathbb{N}} \in I_{\mathscr{F}}$, maka terdapat $F \in \mathscr{F}$ dan $r_n' = 0$ untuk setiap $n \in F$. Oleh karena itu, $r_n * r_n' = 0$ untuk setiap $n \in F$. Dengan demikian diperoleh

$$(r_n * r_n')_{n\in\mathbb{N}} \in I_{\mathscr{F}}. \tag{3}$$

Dengan alasan yang sama, diperoleh

$$(r_n' r_n*)_{n\in\mathbb{N}} \in I_{\mathscr{F}}. \tag{4}$$

Karena untuk setiap $(r_n')_{n\in\mathbb{N}}, (r_n'')_{n\in\mathbb{N}} \in I_{\mathscr{F}}$ dan $(r_n*)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, berlaku (2), (3) dan (4), maka $I_{\mathscr{F}}$ ideal dari ring $R^{\mathbb{N}}$.

Karena $I_{\mathscr{F}}$ ideal dari ring $R^{\mathbb{N}}$, maka dapat dibentuk ring faktor $R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}}$ yang merupakan ring dengan elemen satuan $(1_R,1_R,1_R,...)+I_{\mathscr{F}}$. Di lain pihak, berdasarkan Lemma 13, diperoleh $I_{\mathscr{F}}$ submodul dari $R^{\mathbb{N}}$-modul kanan $R^{\mathbb{N}}$, sehingga dapat dibentuk modul faktor $R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}}$ sebagai modul kanan atas $R^{\mathbb{N}}$. Tentunya , $R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}}$ dapat dipandang sebagai modul kiri atas $\mathbb{Z}$. Oleh karena syarat kompabilitas terpenuhi, maka $R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}}$ merupakan ($\mathbb{Z}$, $R^{\mathbb{N}}$)-bimodul.

Lebih lanjut lagi, karena $R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}}$ merupakan ring, maka terdapat homomorfisma ring natural

$$v: R^{\mathbb{N}} \to R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}}$$

$$v:(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (r_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}$$

Sekarang, misalkan $R^{\mathbb{N}}/I_{\mathscr{F}} = T$. Karena T merupakan $\mathbb{Z}$-modul kiri, maka dapat dibentuk $S = End_{\mathbb{Z}}T$. Karena T suatu modul kanan atas ring $R^{\mathbb{N}}$, maka dapat didefinisikan pengaitan:

$$\alpha: T \to S$$

$$\alpha:(s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}} \mapsto g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})}$$

untuk setiap $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}} \in T$, dengan

$$g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})}: T \to T$$

$$g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})}:((r_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) \mapsto ((s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})((r_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$$

untuk setiap $((r_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) \in T$. Karena T suatu ring, berdasarkan sifat distributif operasi pada T , maka $g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})}$ suatu homomorfisma $\mathbb{Z}$-modul. Oleh karena itu $g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})} \in S$.

Berikutnya, diambil sebarang $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}, (s_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}} \in T$ dengan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}} = (s_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}$, maka untuk setiap $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}} \in T$ berlaku

$$((s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})((t_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) = ((s_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})((t_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$$

atau $g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) = g_{((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathscr{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$. Dengan demikian

$\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) = \alpha((s_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$. Hal ini berarti α terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) + ((s_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}))$$

$$= \alpha((s_n + s_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$$

$$\overset{def}{=} g_{((s_n+s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}$$

dan

$$\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})+\alpha((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\overset{def}{=} g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}+g_{((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})},$$ sehingga untuk semua $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}}\in T$, berlaku

$$g_{((s_n+s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\overset{def}{=}((s_n+s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$
$$=(s_n+s_n')_{n\in\mathbb{N}}(t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}}$$
$$=((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})+((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$
$$=g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})+g_{((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$
$$=(g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}+g_{((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}}))})((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$

Dengan demikian

$$\alpha((s_n+s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})=\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})+\alpha((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})).$$

Lebih lanjut lagi, diperoleh

$$\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})=\alpha((s_ns_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\overset{def}{=} g_{((s_ns_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}$$

dan

$$\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\alpha((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\overset{def}{=} g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}\, g_{((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}$$

sehingga untuk semua $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}}\in T$, berlaku

$$g_{((s_ns_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\overset{def}{=}((s_ns_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$
$$=(s_ns_n')_{n\in\mathbb{N}}(t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}}$$
$$=((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})((s_n't_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$
$$\overset{def}{=} g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}((s_n't_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$
$$\overset{def}{=} g_{((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})}g_{((s_n')_{n\in\mathbb{N}}I_{\mathcal{F}})}((t_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})$$

Dengan demikian

$$\alpha((s_ns_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})=\alpha((s_n)_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})\alpha((s_n')_{n\in\mathbb{N}}+I_{\mathcal{F}})).$$

Dari sini diperoleh bahwa α suatu homomorfisma ring.

Lebih lanjut lagi, karena d,v dan α homomorfisma ring, maka $\alpha\circ v\circ d$ juga merupakan homomorfisma ring. Sekarang, akan ditunjukkan $\alpha\circ v\circ d$ injektif. Diambil sebarang $r\in Ker(\alpha\circ v\circ d)\subseteq R$ maka

$$(\alpha\circ v\circ d)(r)=(\alpha\circ v)(r,r,r,...)=\alpha((r,r,r,...)+I_{\mathcal{F}})=g_{((r,r,r,...)+I_{\mathcal{F}})}$$

$= g_{((0,0,0,...)+I_{\mathscr{F}})}$

sehingga untuk setiap $((t_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) \in T$ berlaku

$$g_{((r,r,r,...)+I_{\mathscr{F}})}((t_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}}) = g_{((0,0,0,...)+I_{\mathscr{F}})}((t_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$$

Khususnya untuk $(t_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}} = (1_R, 1_R, 1_R, ...) + I_{\mathscr{F}}$, berlaku

$$g_{((r,r,r,...)+I_{\mathscr{F}})}((1_R, 1_R, 1_R, ...) + I_{\mathscr{F}}) = g_{((0,0,0,...)+I_{\mathscr{F}})}((t_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$$

atau $((r,r,r,...) + I_{\mathscr{F}})((1_R, 1_R, 1_R, ...) + I_{\mathscr{F}}) = ((0,0,0,...) + I_{\mathscr{F}})((t_n')_{n\in\mathbb{N}} + I_{\mathscr{F}})$

Dengan demikian $(r,r,r,...) \in I_{\mathscr{F}}$. Oleh karena itu $r = 0$. Jadi $\alpha \circ v \circ d$ suatu monomorfisma ring dan mudah ditunjukkan bahwa $(\alpha \circ v \circ d)(R)$ subring dalam ring *S*.

Berdasarkan **Akibat 14,** $\mathbb{Z}$-modul kiri $R^{\mathbb{N}} / I_{\mathscr{F}} = T$ merupakan modul injektif-murni. Berdasarkan **Akibat 16,** ring $S = End_Z(T)$ merupakan ring bersih. Karena terdapat monomorfisma $\alpha \circ v \circ d$ dari *R* ke *S*, maka $R \cong (\alpha \circ v \circ d)(R) \subseteq S$ Karena $(\alpha \circ v \circ d)(R)$ merupakan subring di *S*, maka *R* dapat disisipkan ke dalam ring bersih *S* sebagai subring.

Selanjutnya, tentunya terdapat ideal *K* di *S* yang maksimal dengan sifat $K \cap (\alpha \circ v \circ d)(R) = \{ g_{(0,0,0,...)+I_{\mathscr{F}}} \}$ dengan **0** merupakan elemen nol di *S*, sehingga S/K merupakan ring perluasan esensial dari ring *R*. Berdasarkan **Teorema 3**, karena *S* merupakan ring bersih, maka S/K juga merupakan ring bersih. Dengan demikian *R* dapat disisipkan sebagai subring ke dalam ring bersih S/K, yang merupakan ring perluasan esensial dari ring *R*. □

Sebagai contoh penerapan Teorema 17, berikut ini dikonstruksikan ring bersih dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Contoh 18

Dari ring $\mathbb{Z}$ dapat dikonstruksikan ring bersih $\prod_{i\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{Z} / p_i\mathbb{Z} \right)$ yang merupakan ring perluasan esensial dari ring $\mathbb{Z}$ ($p_i \in$ P, $p_i \neq p_j$, untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ dengan P himpunan semua bilangan prima)

4. Kesimpulan

Berdasarkan kajian yang telah dibahas dapat disimpulkan bahwa selalu dapat dikonstruksikan ring bersih dari sebarang ring.

Ucapan Terima Kasih

Atas terselesaikannya artikel ini, penulis ucapkan terima kasih kepada Ibu Indah Emilia Wijayanti yang telah memberi banyak masukan dan bimbingan.

Daftar Pustaka

[1] Andruszkiewicz, R.R. 2011. On Maximal Essential Extension of Rings, *Bull. Aust. Math. Soc*. 83, pp. 329-327.

[2] Burgess, W.D., dan Raphael, R. 2010. *On Embedding Rings in Clean Rings*. http://mysite.science.uottawa.ca. Diakses tanggal 15 Juli 2011.

[3] Camillo, V. P., Khurana, D., Lam, T.Y., Nicholson, W. K., dan Zhou, Y. 2006. Continous Modules are Cleans, *J Algebra 304*, pp. 94-111.

[4] Chen, Huanyin dan Chen, Miaosen. 2002. *On Clean Ideals*. http://ijmms.hindawi.com©Hindawi Publishing Corp. Dakses tanggal 24 Februari 2012.

[5] Dauns, Johns. 1994. *Modules and Rings*. New York: Cambridge University Press.

[6] Han dan Nicholson. 2001. Extensions of Clean Rings, *Communications in Algebra*, pp. 2589-2595.

[7] Hrbacek, Karel dan Jech, Thomas. 1999. *Introduction to Set Theory*, Third Edition. New York: Marcel Dekker, Inc.

[8] Jensen, C.U. dan Zimmermann-Huisgen, B. 1989. Algebraic Compactness of Ultrapowers and Representation Type. *Pacific Journal of Mathematics*, Volume 39, No. 2.

[9] Malik, D.S., Mordeson, J.N. dan Sen, M.K. 1997. *Fundamentals of Abstrack Algebra*. Singapore: McGraw-Hill Companies Inc.

[10] Nicholson, Keith W dan Zhou, Yiqiang. 2004. *Clean Rings: A Survey, Advanced in Ring Theory*, pp. 181-198.

[11] Zimmermann-Huisgen, B. dan Zimmermann, W. 1978. Algebraically Compact Rings and Modules, *Mathematische Zeitschrift* 161, pp. 81-93.