

# Model Matematika (Linier) Populasi Anjing Rabies dengan Vaksinasi

**Ahmad Fitri**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, Bukit Jimbaran-Bali  
e-mail: farrel\_ahmed@yahoo.com

**Tjokorda Bagus Oka**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, Bukit Jimbaran-Bali  
e-mail: tjokordabagusoka@gmail.com

**I Nyoman Widana**

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana, Bukit Jimbaran-Bali  
e-mail: nwidana@yahoo.com

**Abstract:** Rabies is an infectious virus that can attack all mammals especially dogs. In Bali, rabies was found in late 2008. One of the solutions done by government for the problem is by giving vaccine to healthy dogs, so that they are not easily infected by the virus. Thus, a mathematical model is needed to analyze the development of dog population in Bali and to determine the limitation of dogs birth population and the percentage limitation of vaccination that can be possibly done so that the population of dogs infected by rabies becomes extinct. By using analysis of fixed point and stability on the model, the limitation of dogs birth population and the percentage limitation of the vaccination was obtained. Lastly, a numeric simulation by using Taylor's series 1<sup>st</sup> order was conducted to illustrate and to strengthen the result of the analysis.

**Keyword:** Rabies, Vaccination, Dogs, Linear Systems of Differential Equations

## 1. Pendahuluan

Rabies pertama kali muncul di Bali pada akhir tahun 2008 (Putra [8]). Semenjak itu menjadi beban bagi masyarakat Bali dalam menjaga keamanan dan ketertiban lingkungannya. Hal ini disebabkan karena Bali sebagai tujuan wisata Nasional dan Internasional (Besung, et. al. [2]). Virus rabies adalah virus zoonosis yang bersifat menular dan dapat menyerang ke semua spesies mamalia. Kelompok mamalia yang menjadi sumber rabies dan rentang terinfeksi virus ini adalah anjing (Nugroho [7]). Virus ini disebabkan oleh virus yang dikelompokkan dalam keluarga *Rhabdoviridae* kemudian menyerang sistem syaraf pusat sehingga berakibat fatal (Wang & Lou [11]). Berbagai macam cara yang telah dilakukan pemerintah untuk menanggulangi masalah tersebut. Salah satunya pemberian vaksin terhadap anjing liar maupun anjing rumahan yang dilakukan secara massal di seluruh kota di Bali (Putra [9]). Sampai kapan

pelaksanaannya dan jumlah anjing yang harus di vaksin agar populasi anjing rabies dapat dipunahkan.

Artikel ini bertujuan untuk menganalisis perkembangan populasi anjing rabies melalui pemodelan matematika, kemudian mencari batasan jumlah kelahiran populasi anjing dan batasan persentase pemberian vaksin agar penularan rabies dapat diminimalkan atau populasi anjing rabies dapat dipunahkan.

## 2. Tinjauan Pustaka

### 2.1 Persamaan Diferensial

Pengertian dari persamaan diferensial biasa (PDB) yaitu suatu persamaan yang melibatkan turunan pertama atau lebih dari suatu fungsi yang telah ditentukan. Misalkan  $y = f(x)$  diturunkan terhadap peubah  $x$ . Persamaan tersebut dapat juga melibatkan  $y$  sendiri atau fungsi dari  $x$  (Burghes & Borrie [3]). Persamaan diferensial memiliki solusi apabila memenuhi kondisi Lipschitz.

Definisi 1

Diberikan fungsi  $f(t, x)$  dengan domain  $D$  dalam interval  $(t, x)$ , terdapat konstanta  $k > 0$  sehingga jika  $\{(t, x_1), (t, x_2)\} \in D$ , maka  $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ , fungsi  $f$  memenuhi kondisi Lipschitz untuk setiap nilai  $x$  dalam  $D$ , dan  $k$  disebut konstanta Lipschitz untuk  $f$  (Cronin [4]).

Persamaan diferensial biasa linier memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (1)$$

dimana  $n > 1$  disebut order (tingkat) dari persamaan diferensial sedangkan  $a_n \neq 0$ ,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi  $f(x)$  adalah fungsi khusus yang memuat variable bebas  $x$  dan kontinu dalam interval yang ditinjau. Jika  $f(x) = 0$  persamaan (1) disebut persamaan diferensial linier homogen, begitu juga sebaliknya jika  $f(x) \neq 0$  persamaan (1) disebut persamaan diferensial linier nonhomogen (Edwards & Penny [5]).

### 2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  buah persamaan diferensial dan  $n$  buah fungsi yang nilainya tidak diketahui. Fungsi tersebut jika sama dengan nol maka sistem dapat dikatakan sebagai sistem persamaan diferensial homogen. Begitu juga sebaliknya, dapat dikatakan sebagai persamaan diferensial nonhomogen. Sistem persamaan diferensial linier dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (2)$$

dengan kondisi awal  $x_i(t_0) = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Solusi dari persamaan (2) adalah pasangan  $n$  buah fungsi yaitu  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  yang saling berkaitan satu sama lainnya terhadap interval yang sama (Edwards & Penny [5]).

### 2.3 Titik Keseimbangan

Dengan memperhatikan titik-titik keseimbangan dari sistem persamaan diferensial linier (2) dapat membantu dalam menentukan, apakah titik-titik keseimbangan stabil atau tidak. Nilai atau titik keseimbangan dari suatu persamaan diferensial yaitu tidak berubah.

#### Definisi 2 Titik Keseimbangan

Nilai atau titik keseimbangan adalah solusi dari persamaan  $y' = g(x, y) \equiv 0$  atau  $y = f(x) \equiv c$ , untuk nilai sembarang  $x$  (Lucas [6]).

#### Definisi 3 Titik Keseimbangan

1. Titik keseimbangan  $x_*$  dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan  $\delta > 0$  sedemikian hingga  $|x_0 - x_*| < \delta$  berlaku  $|x(t) - x_*| < \varepsilon$  untuk setiap  $t > 0$ .
2. Titik keseimbangan  $x_*$  dikatakan stabil asimtotik jika  $x_*$  stabil dan terdapat bilangan  $\delta > 0$  sedemikian hingga  $|x_0 - x_*| < \delta$  berlaku  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_*$  untuk setiap  $t \rightarrow \infty$  (Edwards & Penny [5]).

### 2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika  $A$  adalah sebuah matrik  $n \times n$ , maka sebuah vektor tak nol  $x$  pada  $R^n$  disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari  $A$  jika  $Ax$  adalah sebuah kelipatan skalar dari  $x$ , yaitu:

$$Ax = \lambda x \quad (3)$$

untuk skalar sembarang  $\lambda$ , skalar  $\lambda$  disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari  $A$ , dan  $x$  disebut sebagai vektor eigen dari  $A$  yang terkait dengan  $\lambda$  (Anton & Rorres [1]).

### 2.5 Jenis Kestabilan

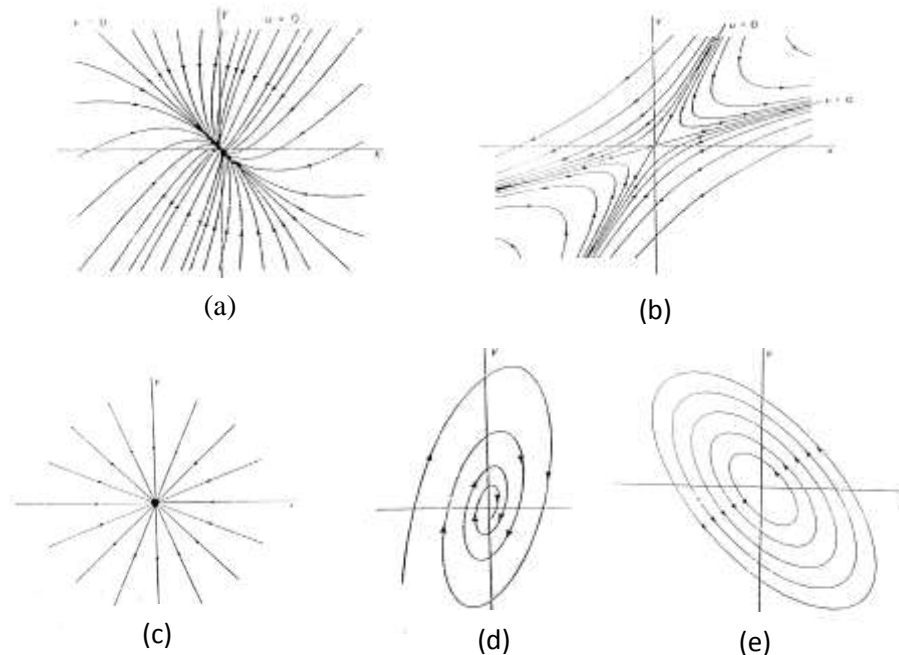
Seperti yang dituliskan dalam buku (Edwards & Penny [5]) jika diberikan sistem persamaan diferensial linier

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (4)$$

Jika titik  $(x_*, y_*)$  adalah titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial linier (4) maka jenis kestabilan berdasarkan kajian terhadap nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah sebagai berikut:

- Jika  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  berupa bilangan real berbeda maka  $(x, y)$  menuju titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  untuk  $t \rightarrow \infty$  dengan demikian titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  disebut simpul stabil asimtotik begitu juga sebaliknya  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  disebut simpul tidak stabil.
- Jika kedua nilai eigennya berlainan tanda dalam artian nilai eigen yang satu positif dan yang lainnya negatif ( $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ) maka titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  disebut titik sadel dan tidak stabil.
- Jika  $\lambda < 0$  berupa bilangan real sama maka  $(x, y)$  menuju titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  untuk  $t \rightarrow \infty$  dengan demikian titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  disebut node stabil asimtotik begitu juga sebaliknya  $\lambda > 0$  disebut node tidak stabil.
- Jika berupa bilangan kompleks konjugat  $\lambda_1 = p + qi$  dan  $\lambda_2 = p - qi$  dengan  $p < 0$  maka  $(x, y)$  menuju titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  untuk  $t \rightarrow \infty$  dengan demikian titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  disebut fokus stabil asimtotik begitu juga sebaliknya jika  $p > 0$  disebut fokus tidak stabil.
- Jika berupa bilangan kompleks murni  $\lambda_1 = qi$  dan  $\lambda_2 = -qi$  dengan  $q \neq 0$  maka  $(x, y)$  berupa elips untuk  $t \rightarrow \infty$  dengan demikian titik kesetimbangan  $(x_*, y_*)$  disebut center stabil tetapi tidak stabil asimtotik.

Jenis kestabilan berdasarkan bidang fase dapat dilihat pada Gambar 1 berikut:



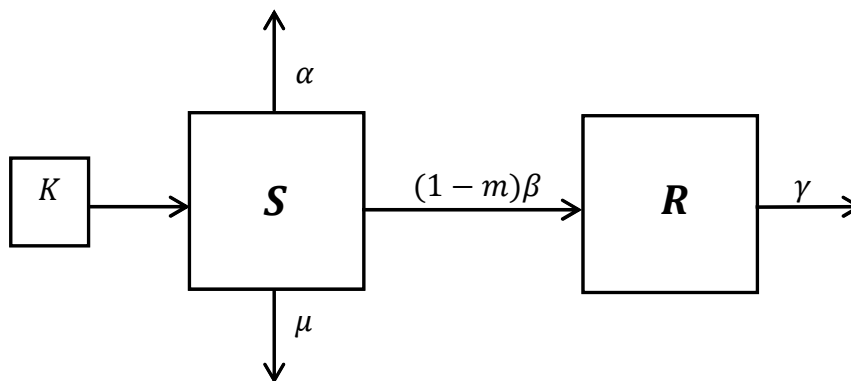
Gambar 1. Jenis Kestabilan dalam Bidang Fase (Edwards & Penny [6])

### 3. Perancangan Model

Model matematika yang dirancang merupakan sistem persamaan diferensial linier dengan measumsikan terdapat dua spesies yaitu anjing yang sehat dilambangkan  $S(t)$  dan anjing yang terinfeksi rabies dilambangkan  $R(t)$ . Sebelum masuk ke model matematika, akan dilihat tentang populasi anjing itu sendiri. Populasi anjing yang sehat bertambah karena adanya kelahiran dan berkurang karena selain adanya kematian juga karena tertular rabies. Proses penularan ini dapat dicegah dengan pemberian vaksin. Sehingga berkurangnya populasi anjing yang sehat bergantung terhadap persentase pemberian vaksin dan laju kematiannya. Populasi anjing sehat juga berkurang karena adanya eliminasi. Jika anjing yang sehat belum divaksin atau terlambat dalam pencegahan selama proses penularan berlangsung, maka populasi anjing yang terinfeksi rabies akan bertambah dan berkurang karena adanya eliminasi. Adapun beberapa asumsi dalam model yang dirancang yaitu sebagai berikut:

- Anjing yang terinfeksi rabies tidak dapat disembuhkan.
- Tidak ada migrasi anjing.
- Laju kelahiran dan kematian dari anjing yang sehat maupun yang terinfeksi rabies adalah tetap.
- Rabies pada anjing hanya ditularkan dari anjing yang terinfeksi rabies.

Selanjutnya dimisalkan populasi anjing yang sehat bertambah akibat adanya kelahiran sebesar  $K$  (diasumsikan laju kelahiran populasi anjing sehat konstan). Berkurangnya populasi anjing sehat akibat adanya kematian sebesar  $\mu S$  dan tertular rabies sebesar  $(1 - m)\beta S$  dengan  $m$  adalah persentase pemberian vaksin. Adanya penularan rabies terhadap anjing yang sehat populasi anjing rabies akan bertambah. Kedua populasi tersebut juga berkurang karena adanya eliminasi masing-masing sebesar  $\alpha S$  dan  $\gamma R$ . Penjelasan mengenai gambaran perancangan model matematika pada anjing rabies dengan vaksinasi dapat dilihat dalam gambar 2 berikut:



Gambar 2. Gambaran Perancangan Model Matematika pada Anjing Rabies dengan Vaksinasi

Model lengkap akan menghasilkan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= K - \mu S - (1 - m)\beta S - \alpha S \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - m)\beta S - \gamma R\end{aligned}\quad (5)$$

dengan  $K, \mu, \beta, m, \gamma, \alpha > 0$ .

$S$  : adalah populasi anjing yang sehat

$R$  : adalah populasi anjing yang terinfeksi rabies

$K$  : adalah laju kelahiran dari anjing yang sehat

$\mu$  : adalah laju kematian dari anjing yang sehat

$\beta$  : adalah laju anjing yang sehat dapat tertular rabies

$m$  : adalah persentase pemberian vaksin terhadap anjing yang sehat

$\alpha$  : adalah laju eliminasi terhadap anjing yang sehat

$\gamma$  : adalah laju eliminasi terhadap anjing yang terinfeksi rabies

## 4. Hasil dan Pembahasan

### 4.1 Analisis Titik Tetap dan Kestabilan Model

Sistem (5) disebut sistem persamaan diferensial linier. Titik kesetimbangannya diberikan oleh  $S' = R' = 0$  (Lucas [6]). Sehingga hanya ada satu titik kesetimbangan pada sistem (5), yaitu  $(S^*, R^*) = \left( \frac{K}{\mu + (1-m)\beta + \alpha}, \frac{(1-m)\beta K}{(\mu + (1-m)\beta + \alpha)\gamma} \right)$ . Titik kesetimbangan ini ditentukan oleh nilai  $K$  dan  $m$ . Jika  $m = 100\%$  maka titik kesetimbangannya menjadi  $(S^*, R^*) = \left( \frac{K}{\mu + \alpha}, 0 \right)$ , sehingga jumlah populasi anjing rabies dapat dipunahkan. Jika  $m \neq 100\%$  pada sistem (5) maka jumlah populasi anjing rabies ditentukan oleh jumlah populasi anjing sehat. Jika populasi anjing sehat meningkat maka populasi anjing rabies juga akan meningkat pada waktu tertentu. Agar populasi rabies menurun maka haruslah populasi anjing sehat juga menurun sehingga  $S^* < S_{t_0}$  yaitu  $\frac{K}{\mu + (1-m)\beta + \alpha} < S(0)$  atau  $K < (\mu + (1 - m)\beta + \alpha)S(0)$ . Akan tetapi nilai pemberian vaksin ( $m$ ) juga dapat berpengaruh terhadap jumlah populasi anjing rabies, yaitu pada titik kesetimbangan  $R^*$ . Agar populasi anjing rabies tidak melebihi dari populasi awal maka haruslah  $R^* < R(0)$  yaitu  $\frac{(1-m)\beta K}{(\mu + (1-m)\beta + \alpha)\gamma} < R(0)$  atau  $\frac{(1-m)\beta S(0)}{\gamma} < R(0)$  didapat  $m > \frac{\beta S(0) - \gamma R(0)}{\beta S(0)}$ .

Nilai karakteristik dari titik kesetimbangan ( $S^*, R^*$ ) didapat dengan mensubstitusi  $S = S^* + \bar{S}$  dan  $R = R^* + \bar{R}$  kedalam persamaan (5) sehingga diperoleh persamaan berikut:

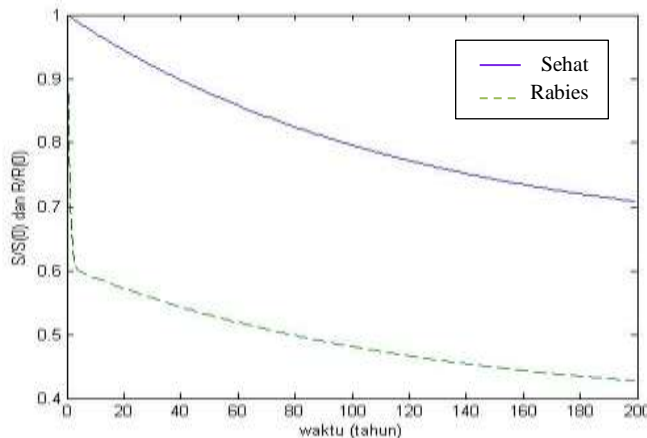
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{S}}{dt} &= -(\mu + (1 - m)\beta + \alpha)\bar{S} \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= (1 - m)\beta\bar{S} - \gamma\bar{R} \end{aligned} \tag{6}$$

hasil yang didapatkan adalah  $\lambda_1 = -(\mu + (1 - m)\beta + \alpha)$  dan  $\lambda_2 = -\gamma$ . Karena nilai  $K, \mu, \beta, \gamma, \alpha > 0$  dan  $0 \leq m \leq 1$  maka kedua nilai karakteristik ini bernilai negatif, sehingga jenis kestabilan pada titik kesetimbangan ( $S^*, R^*$ ) adalah stabil asimtotik.

Hasil analisis menyatakan bahwa model stabil untuk semua nilai  $K, \mu, \beta, \gamma, \alpha$  dan  $m$ . Populasi anjing rabies akan menurun jika  $K < (\mu + (1 - m)\beta + \alpha)S(0)$  dan  $m > \frac{\beta S(0) - \gamma R(0)}{\beta S(0)}$ .

#### 4.2 Simulasi Numerik

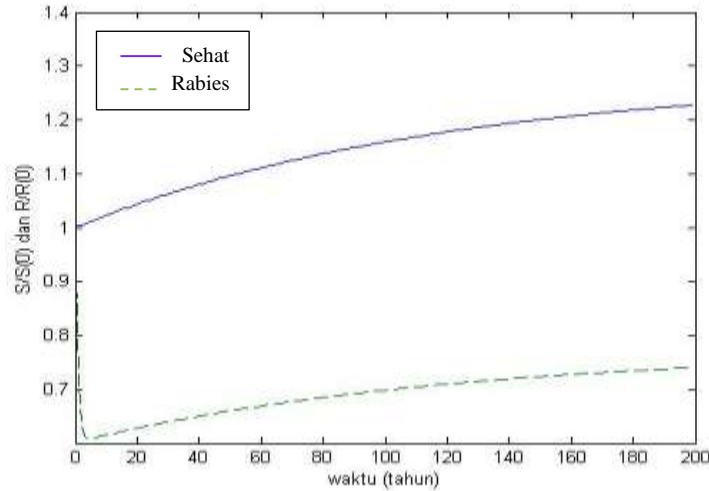
Simulasi yang dilakukan menggunakan metode Deret Taylor orde satu seperti yang tertulis dalam buku (Saxena [10]). Nilai-nilai parameter yang digunakan yaitu  $\mu = 0.0002$ ,  $\beta = 0.0011$ ,  $\alpha = 0.008$  dan  $\gamma = 0.73$ . Kemudian diambil  $m = 87.18\%$  (sesuai dengan data yang didapat dari Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi Bali) dengan demikian didapat nilai karakteristik  $\lambda_{1,2} = (-8.341 \times 10^{-3}, -0.73)$  keadaan tersebut stabil asimtotik karena kedua nilai eigennya bernilai negatif. Selanjutnya diambil nilai  $S(0) = 374500$  dan  $R(0) = 120$  maka batas nilai  $K$  agar populasi anjing rabies menurun yaitu  $K < 3123$  dan batasan nilai pemberian vaksin yaitu  $m > 78.74\%$ . Dengan menggunakan nilai  $K = 2000$  pada sistem (5) akan menghasilkan titik kesetimbangan ( $S^*, R^*$ ) = (239779, 46) dengan pasangan nilai karakteristik  $\lambda_{1,2} = (-8.341 \times 10^{-3}, -0.73)$ . Hasil simulasi lebih jelas dapat dilihat pada gambar 3.



Gambar 3. Hasil Simulasi Persamaan (5) dengan Nilai  $K = 2000$ .

Pada gambar 3 terlihat bahwa jika  $K < 3123$  maka populasi anjing rabies menurun.

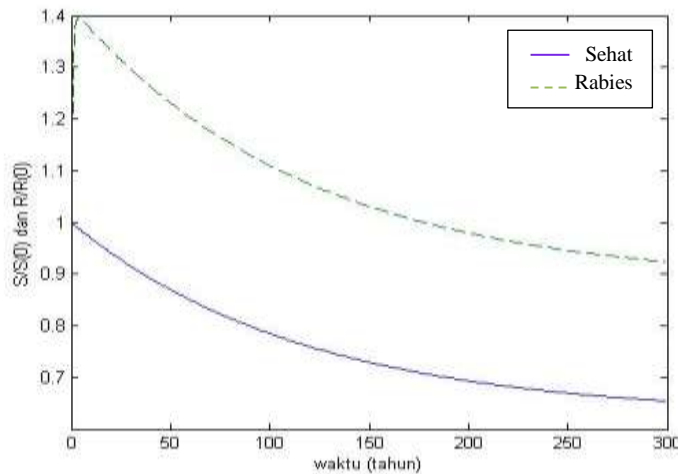
Kemudian dengan memperbesar nilai  $K = 4000$  pada sistem (5) akan menghasilkan titik kesetimbangan  $(S^*, R^*) = (479558, 93)$  dan nilai karakteristik tersebut tetap yaitu  $\lambda_{1,2} = (-8.341 \times 10^{-3}, -0.73)$  keadaan ini stabil. Hasil ini dapat dilihat pada gambar 4.



Gambar 4. Hasil Simulasi Persamaan (5) dengan nilai  $K = 4000$ .

Pada gambar 4 terlihat bahwa jika  $K > 3123$  maka populasi anjing rabies meningkat setelah mengalami penurunan.

Selanjutnya dengan memperkecil nilai pemberian vaksin  $m = 70\%$  dan  $K = 2000$  pada sistem (5) akan menghasilkan titik kesetimbangan  $(S^*, R^*) = (234466, 106)$  dengan pasangan nilai karakteristik  $\lambda_{1,2} = (-8.53 \times 10^{-3}, -0.73)$ . Hasil simulasi lebih jelas dapat dilihat pada gambar 5.



Gambar 5. Hasil simulasi persamaan (5) dengan nilai  $K = 2000$  dan  $m = 70\%$ .



Pada gambar 5 terlihat bahwa jika  $m < 78.74\%$  maka populasi anjing rabies meningkat dari jumlah populasi awal.

Hasil analitik menegaskan bahwa ada pengaruh pemberian vaksin terhadap jumlah populasi anjing rabies. Jika dilakukan pemberian vaksin melebihi 78.74% maka populasi anjing rabies tidak akan meningkat. Begitu juga dengan nilai  $K$ , populasi anjing rabies tidak akan meningkat jika jumlah kelahiran ( $K$ ) dibatasi yaitu  $K < 3123$ .

## 5. Kesimpulan dan Saran

Model matematika (linier) populasi anjing rabies dengan vaksinasi mempunyai bentuk  $\frac{dS}{dt} = K - \mu S - (1 - m)\beta S - \alpha S$ ,  $\frac{dR}{dt} = (1 - m)\beta S - \gamma R$  keadaan ini stabil untuk setiap nilai persentase pemberian vaksin  $m$ . Akan tetapi ada pengaruh nilai pemberian vaksin ( $m$ ) terhadap jumlah populasi anjing rabies yaitu jika  $m > 78.74\%$  maka populasi anjing rabies menurun. Populasi anjing rabies juga menurun jika  $K < 3123$ , dalam artian jika suatu daerah terkena rabies maka agar populasi rabies tidak meningkat haruslah jumlah kelahiran dari populasi yang belum terinfeksi rabies tersebut dibatasi.

Model ini perlu dikembangkan dengan memperhatikan faktor-faktor lainnya seperti interaksi antara anjing sehat dengan anjing rabies sehingga anjing rabies dapat menularkan penyakitnya. Model tersebut disebut sistem persamaan diferensial nonlinier.

## Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., & Roeres, C. (2004). *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga.
- [2] Besung, INK. K., Suwiti, N., Suatha, I., Suastika, P., Piraksa, I., & Setiasih, N. E. (2011). Vaksinasi, Edukasi dan Eliminasi Anjing Liar Sebagai Usaha Percepatan Penanggulangan Penyakit Rabies di Bali. *Udayana Mengabdi*, 57-60.
- [3] Burghes, D., & Borrie, M. (1981). *Modeling with Differential Equations*. Chichester: Ellis Horwood Limited.
- [4] Cronin, J. (1994). *Differential Equations Introduction and Qualitative Theory. Second Edition, Revised and Expanded*. New York: Marcel Dekker, INC.
- [5] Edwards, C., & Penny, D. E. (1993). *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems* Third Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [6] Lucas, W. F. (1983). *Differential Equation Model*. New York: Springer-Verlag.

- [7] Nugroho, D. K., & Rahayujati, T. B. (2013). Analisa Data Surveilans Rabies (2008-2011) di Propinsi Bali, indonesia. *Outbreak, Surveillance and Investigation Reports*, 8-12.
- [8] Putra, A.A.G. (2011). Epidemiologi Rabies di Bali: Analisis Kasus Rabies "Semi free- Ranging Dog" dan Signifikasinya Dalam Siklus Penularan Rabies dengan Pendekatan Ekosistem. *Buletin Veteriner, BBVet Denpasar*, 45-54.
- [9] Putra, A.A.G. (2012). Analisis Perkembangan Pemberantasan Rabies di Provinsi Bali: Capaian Pasca Vaksinasi Massal ke Tiga. *Buletin Veteriner, BBVet Denpasar*, 10-22.
- [10] Saxena, H. (2008). *Finite Differences and Numerical Analysis*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.
- [11] Wang, X., & Lou, J. (2008). Two Dynamic Models About Rabies Between Dogs and Human. *Journal of Biological System*, Vol. 16, No. 4, 519-529.