Jurnal Matematika Vol. 4 No. 2, Desember 2014. ISSN: 1693-1394

Sifat *Strong* Perron-Frobenius Pada Solusi Positif Eventual Sistem Persamaan Differensial Linier Orde Satu

Yulian Sari
FKIP Pendidikan Matematika Universitas Riau Kepulauan
e-mail: yuliansari17@gmail.com

Abstrak: Artikel ini membicarakan tentang sifat *strong* Perron-Frobenius pada solusi positif eventual sistem persamaan differensial linier orde satu. Syarat perlu agar solusi positif eventual sistem persamaan differensial linier orde satu diajukan. Beberapa kriteria tentang matriks eksponensial positif eventual dan matriks positif eventual juga akan digunakan dalam teorema.

Kata kunci: solusi positif eventual, strong Perron-Frobenius, matriks eksponensial.

1. Pendahuluan

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu sebagai berikut.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \geq 0 \qquad (1)$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, dan $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$. Solusi sistem (1) diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{x}_0. \qquad (2)$$

Dalam [3] dinyatakan bahwa sistem (1) dengan $\mathbf{x}_0 \geq 0$, jika A adalah matriks eksponensial positif *eventual*, maka (2) disebut sebagai solusi positif *eventual*. Solusi tersebut erat kaitannya dengan A adalah matriks eksponensial positif eventual. Syarat cukup untuk solusi positif eventual juga telah dikemukakan dalam [3]. Namun kajian tentang solusi positif eventual belum banyak dibahas oleh peneliti.

Topik tentang matriks eksponensial positif eventual telah dibahas di berbagai literatur. Dalam [1,2] dikemukakan ekuivalensi beberapa sifat yang terkait dengan matriks eksponensial positif eventual. Sifat lainnya yang juga dikemukakan diantaranya yaitu sifat strong Perron-Frobenius pada matriks eksponensial positif eventual. Oleh karena banyaknya penggunaan sifat strong Perron-Frobenius pada suatu matriks tertentu, artikel ini akan memaparkan suatu syarat perlu agar sistem (1) dengan solusi positif eventual. Dalam hal ini sifat strong Perron-Frobenius diperlukan.

2. Notasi dan Definisi

Simbol $\mathbb{R}^{n\times n}$ menyatakan himpunan matriks riil berukuran $n\times n$. Simbol $\mathbb{R}^{n}$ menyatakan himpunan vektor riil dengan n komponen. Himpunan semua nilai eigen dari A berukuran $n\times n$ disebut sebagai spektrum dari A yang dinotasikan dengan $\sigma(A)$. Radius spektral dari A, dinotasikan dengan $\rho(A)$, didefinisikan sebagai $\rho(A) = \max\{|\lambda|: \lambda \in\}\sigma(A)$. Suatu nilai eigen λ dari A dikatakan dominan jika $|\lambda| = \rho(A)$. Absis spektral dari A, ditulis $\lambda(A)$ didefinisikan sebagai $\lambda(A) = \max\{\mathrm{Re}(\lambda)|\lambda \in \sigma(A)\}$ dimana $\mathrm{Re}(\lambda)$ menyatakan bagian riil dari λ.

Definisi 2.1. *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Matriks A dikatakan*

1. *positif eventual, dinotasikan dengan $A >_v 0$, jika terdapat bilangan bulat positif k_0 sedemikian sehingga $A^k > 0$ untuk setiap $k \geq k_0$. Bilangan bulat positif terkecil $k_0 = k_0(A)$ disebut sebagai indeks pangkat dari A.*
2. *positif eksponensial, jika untuk setiap $t > 0$,*
$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} > 0.$$
3. *eksponensial positif eventual, jika terdapat $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $e^{tA} > 0$ untuk setiap $t \geq t_0$.*

Definisi 2.2. [1] *Suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan memiliki:*

1. *sifat Perron-Frobenius, jika nilai eigen dominannya adalah positif dan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen dominannya adalah nonnegatif*
2. *sifat strong Perron-Frobenius, jika nilai eigen dominan positifnya berjumlah satu buah dan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen dominannya adalah positif.*

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut akan dikemukakan teorema yang mendasari hasil utama dalam artikel ini.

Teorema 3.1. [2] *Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pernyataan berikut ekivalen:*

i). *Matriks A dan A^T memiliki sifat strong Perron-Frobenius.*
ii). *A merupakan matriks positif eventual.*

Teorema 3.2 [1] *Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Pernyataan berikut ekivalen:*

i). $A + aI$ *merupakan matriks positif eventual untuk suatu* $a \geq 0$.
ii). A *merupakan matriks eksponensial positif eventual.*

Teorema 3.3. [3] *Untuk sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *dengan syarat awal* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, *jika* $A + aI$ *adalah matriks positif eventual untuk suatu* $a \geq 0$, *maka solusi* $\mathbf{x}(t)$ *sistem tersebut adalah positif eventual untuk setiap* $\mathbf{x}_0 > 0$.

Bukti
Misalkan $A + aI$ adalah matriks positif *eventual* untuk suatu $a \geq 0$, maka berdasarkan teorema 3.3, matriks A adalah matriks eksponensial positif *eventual*. Akibatnya terdapat $t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $\mathrm{e}^{tA} > 0$ untuk setiap $t \geq t_0$. Karena $\mathbf{x}_0 > 0$,
maka

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{x}_0 > 0, \forall\, t \geq t_0.$$

Dengan demikian, solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, adalah positif *eventual*. □

Akibat 3.4. *Untuk sistem* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *dengan syarat awal* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. *Jika solusi sistem tersebut positif eventual, maka terdapat* $a \geq 0$ *sedemikian sehingga* $A + aI$ *dan* $A^T + aI$ *memiliki sifat Strong Perron Frobenius.*

BUKTI. Misalkan $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ adalah sistem dengan solusi positif eventual. Hal tersebut berarti bahwa sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dengan A adalah matriks eksponensial positif eventual dan dengan syarat awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > 0$. Menurut Teorema 3.3, karena A adalah matriks eksponensial positif eventual, maka $A + aI$ adalah matriks positif eventual untuk suatu $a \geq 0$. Perhatikan $A + aI$ adalah matriks positif *eventual*. Akan dibuktikan bahwa matriks $A + aI$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Karena $A + aI$ matriks positif *eventual*, maka ada $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $(A + aI)^k > 0, \forall\, k \geq k_0$. Misalkan $(A + aI)^k > 0$, maka matriks $(A + aI)^k$ memiliki nilai eigen dominan positif, sebutlah λ_1, dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 adalah positif, sebutlah $\mathbf{x}_1 > 0$. Karena λ_1 adalah nilai eigen dari $(A + aI)^k$, maka $\lambda_1^{\frac{1}{k}} > 0$ adalah nilai eigen dari $(A + aI)$ dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1^{\frac{1}{k}}$ adalah $\mathbf{x}_1$. Karena hal tersebut terjadi untuk setiap $k \geq k_0$, maka $(A + aI)$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\left(A^T + aI\right)$ juga memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Karena $(A + aI)$ adalah matriks positif *eventual*, maka matriks $(A + aI)^T$

juga positif *eventual*. Akibatnya, ada $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $\left((A+aI)^T\right)^k > 0$ untuk setiap $k \geq k_0$. Karena $\left((A+aI)^T\right)^k > 0$, maka matriks $\left((A+aI)^T\right)^k$ memiliki nilai eigen dominan positif, sebutlah λ_2, dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_2 adalah positif, sebutlah $\mathbf{x}_2 > 0$. Karena λ_2 adalah nilai eigen dari $\left((A+aI)^T\right)^k$, maka ${\lambda_2}^{\frac{1}{k}} > 0$ adalah nilai eigen dari $(A+aI)^T$ dengan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen ${\lambda_2}^{\frac{1}{k}}$ adalah $\mathbf{x}_2$. Karena ini terjadi untuk setiap $k \geq k_0$, maka $(A+aI)^T$ memiliki sifat *strong* Perron-Frobenius. Hal tersebut berarti $A^T + aI$ memiliki sifat strong Perron-Frobenius.

Contoh berikut mengilustrasikan syarat perlu agar solusi sistem differensial linier orde satu adalah matriks $A + aI$ dan $A^T + aI$ memiliki sifat Strong Perron Frobenius untuk suatu $a \geq 0$.

Contoh 3.5. *Diberikan sistem persamaan diferensial linier* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(\mathrm{t})$ *dengan* $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *dan syarat awal* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Akan ditunjukan bahwa solusi sistem tersebut adalah positif eventual. Perhatikan bahwa untuk* $a = 1$, *diperoleh matriks* $A + aI$ *adalah sebagai berikut*

$$A + aI = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari bilangan bulat positif k_0 *sedemikian sehingga* $(A+aI)^k > 0$, $\forall\, k \geq k_0$. *Perhatikan matriks berikut.*

$$(A+aI)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Karena entri pada matriks $A + aI$ *telah bernilai positif untuk* $k = 2$, *sehingga matriks* $A + aI$ *merupakan matriks positif eventual dengan* $k_0 = 2$ *sedemikian sehingga* $(A+aI)^k > 0$, $\forall\, k \geq k_0$. *Dengan demikian matriks* $A + aI$ *adalah matriks positif eventual. Berdasarkan Teorema 3.3, maka solusi sistem pada Contoh 3.5 mestilah positif eventual. Selanjutnya akan diperiksa sifat strong Perron-Frobenius pada matriks* $A + aI$. *Perhatikan bahwa untuk* $a = 1$, *maka dengan mudah diperoleh* $\sigma(A + aI) = \{\lambda_{1_1}, \lambda_{1_2}, \lambda_{1_3}\} = \{4, 1, -2\}$. *Nilai eigen dominan dari* $A + aI$ *adalah* $\lambda_{1_1} = 4$ *dan vektor eigen yang berkaitan dengan* λ_{1_1} *adalah* $\mathbf{x}_{1_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. *Karena komponen vektor* $\mathbf{x}_{1_1}$ *positif maka matriks* $A + aI$ *memiliki sifat strong Perron Frobenius. Hal tersebut juga berlaku* *untuk matriks* $A^T + aI$. Perhatikan bahwa untuk $a = 1$,

$$A^T + aI = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

maka dengan mudah *diperoleh* $\sigma(A^T + aI) = \{\lambda_{2_1}, \lambda_{2_2}, \lambda_{2_3}\} = \{4,1,-2\}$. *Nilai eigen dominan dari* $A + aI$ *adalah* $\lambda_{2_1} = a + 2$ *dan vektor eigen yang berkaitan dengan* λ_{2_1} *adalah* $\mathbf{x_2}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Karena komponen vektor* $\mathbf{x_2}_1$ *positif maka matriks* $A^T + aI$ *memiliki sifat strong Perron Frobenius.*

Dengan menggunakan cara yang sedikit berbeda dari Contoh 3.5, berikut diilustrasikan nilai a secara umum pada Teorema 3.4 untuk sistem yang diberikan.

Contoh 3.6. *Diberikan sistem persamaan differensial* $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *dengan* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ *dan denga syarat awal* $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Selanjutnya akan diperiksa keberadaan sifat strong Perron-Frobenius pada sistem tersebut. Perhatikan bahwa untuk setiap* $a \geq 0$, $A + aI$ *bukan matriks positif eventual untuk setiap* $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ *sehingga* $(A + aI)^k$ *dengan* $k \geq k_0$. *Selanjutnya dipilih matriks nonsingular P dan Q, yaitu*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{dan } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$\mathrm{e}^{At} = P\mathrm{e}^{D}Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t} \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \\ \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}$$

dengan e^{D} *adalah matriks yang similar dengan* e^{At}. *Matriks di atas jelas bukan matriks eksponensial positif eventual untuk setiap* $t \geq t_0$ *dengan* $t_0 \in [0, \infty]$ *sehingga* $\mathrm{e}^{tA} \leq 0$.

Solusi sistem tersebut diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{tA}\mathbf{x}_0\\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-4t} & \frac{1}{6}e^{-4t}-\frac{1}{6}e^{2t} & \frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-4t} \\ \frac{1}{2}e^{-4t}-\frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-4t}-\frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-4t} \\ \frac{3}{2}e^{-4t}-\frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}+e^{-4t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Selanjutnya akan diperiksa sifat Strong Peron Frobenius dari matriks $A+aI$ *dan* A^T+aI *untuk suatu* $a\geq 0$. *Perhatikan nilai* $\det[\lambda_1 I-(A+aI)]$ *untuk setiap nilai* a.

$$\det[\lambda_1 I-(A+aI)] = (-a+\lambda_1+1)(-2a+2\lambda_1-2a\lambda_1+\lambda_1{}^2+a^2-2),$$

sehingga diperoleh $\sigma(A+aI)=\{\lambda_{1_1},\lambda_{1_2},\lambda_{1_3}\}=\{a+\sqrt{3}-1, a-\sqrt{3}-1, a-1\}$. *Nilai eigen dominan dari* $A+aI$ *adalah* $\lambda_{1_1}=a+\sqrt{3}-1$ *dan vektor eigen yang berkaitan dengan* λ_{1_1} *untuk setiap nilai* $a\geq 0$ *adalah* $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\1\end{bmatrix}$. *Karena* $\mathbf{x}_1$ *memuat komponen vektor negatif, maka jelas bahwa matriks* $A+aI$ *tidak memiliki sifat strong Perron Frobenius. Hal tersebut juga berlaku untuk matriks* A^T+aI. *Perhatikan bahwa untuk setiap nilai* $a\geq 0$ *berlaku*

$$\det\left[\lambda_2 I-\left(A^T+aI\right)\right] = \lambda_2{}^3+3\lambda_2{}^2-3a\lambda_2{}^2+3a^2\lambda_2-6a\lambda_2-6\lambda-a^3+3a^2+6a-8,$$

sehingga diperoleh $\sigma(A^T+aI)=\{\lambda_{2_1},\lambda_{2_2},\lambda_{2_3}\}=\{a+2, a-1, a-4\}$. Nilai *eigen dominan dari* A^T+aI *adalah* $\lambda_{2_1}=a+2$ *dan vektor eigen yang berkaitan dengan* λ_{2_1} *untuk setiap nilai* $a\geq 0$ *adalah* $\mathbf{x_{2_1}}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$. *Karena* $\mathbf{x_{2_1}}$ *memuat komponen vektor negatif, maka matriks* A^T+aI *tidak memiliki sifat strong Perron Frobenius.*

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan uraian dari pembahasan, syarat perlu agar solusi sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ positif eventual adalah matriks $A + aI$ dan $A^T + aI$ memiliki sifat Strong Perron-Frobenius. Topik-topik kajian solusi positif eventual untuk sistem persamaan differensial linier masih merupakan hal baru. Pengembangan tentang kajian ini masih sangat diperlukan. Selain itu, solusi positif eventual untuk sistem persamaan yang bukan sistem persamaan differensial linier orde satu bisa menjadi topik yang dapat dikembangkan selanjutnya.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Program Studi Matematika Universitas Udayana dan Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Riau Kepulauan atas kerjasama dan dukungannya sehingga hasil penelitian ini dapat dipublikasikan.

Daftar Pustaka

[1] Noutsos, D. and M. J. Tsatsomeros. 2008. Reachability and Holdability of Nonnegatif States. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications.* 30:700-712.

[2] Noutsos, D. 2006. On Perron-Frobenius Property of Matrices Having Some Negative Entries. *Linear Algebra and Its Applications* 412, p.132-153.

[3] Sari, Yulian. Muhafzan. 2011. Solusi Positif Eventual Sistem Persamaan Differensial Linier Homogen Orde Satu. *Prosiding, Seminar Nasional Matematika yang diselenggarakan oleh FMIPA Unand, tanggal 21 Juni 2011*. Padang: Universitas Andalas.