Perancangan Kontrol Optimal pada Model Matematika Bioekonomik

G.K. Gandhiadi
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Udayana
e-mail: ganndhiadi@yahoo.co.id

Abstract: This paper shows the initial research about the design of optimal investment policy of the public company in resource conservation, by using optimal control model. The mathematical bioeconomics model in using of mathematical modeling for resource conservation is a dynamics problem. The successfull of resource conservation management must fully take account of the time dimension for sustained equilibrium bioeconomics. The design of a dynamic optimization model is solved by optimal control strategy via maximum principle Pontryagin of Hamiltonian expressi. We have the conclusion that the optimization of present value for resource conservation very dependent of time domain, how long stock optimal can be sustained for is given initial stock.

Keywords: Mathematical Bioeconomics, Maximum Principle Pontryagin, Optimal Control.

1. Pendahuluan

Dalam bidang ekonomi, khususnya investasi dalam usaha eksplorasi sumber daya alam, salah satu permasalahan yang berhubungan dengan teori kontrol optimal adalah masalah pengoptimalan *present value* keuntungan dari perusahaan publik. *Present value* diartikan sebagai nilai sekarang dari penerimaan laba bersih pada masa yang akan datang.

Suatu model matematika bioekonomik memberikan penjelasan yang tajam pada eksplorasi sumber daya alam *open-access*, yang sangat kontras dengan optimalisasi secara ekonomi. Model ini juga memeberikan keyakinan bahwa parameter biologis (*laju pertumbuhan, kapasitas tersedia*) dan parameter ekonomi (*harga, biaya, tingkat suku bunga*) mempunyai peran penting dalam menentukan strategi optimalisasi hasil investasi. Pengelolaan sumber daya alam yang berhasil mesti sepenuhnya memperhatian domain waktu pada pelaksanaan eksplorasi (investasi) untuk menjamin keseimbangan bioekonomik di masa yang akan datang.

Masalah optimalisasi pada sistem dinamis merupakan esensi dari teori ekonomi tentang modal dan investasi. Keberhasilam perekonomian modern seluruhnya tergantung pada ketersediaan modal dalam arti luas. Implikasi penting pada teori ekonomi adalah:

1. Teori ekonomi tentang modal dan investasi sangat relevan dengan pengelolaan sumber daya alam terbarukan.

2. Kesalahan dalam pengelolaan sumber daya alam yang hanya mencari keuntungan optimal akan merusak situasi ekonomi dan seringkali menyebabkan kepunahan populasi sumber daya alam yang penting.

Kriteria yang sesuai dalam perhitungan prospek ekonomi jangka panjang adalah penentuan *present value* pada laba bersih di masa yang akan datang yang diterima perusahaan. Disamping itu, hal yang juga penting adalah tingkat suku bunga akan sangat kritis menentukan strategi optimalisasi.

Masalah pengoptimalan *present value* keuntungan investasi dalam usaha eksplorasi sumber daya alam dengan model bioekonomik dapat dirancang sebagai masalah kontrol optimal. Variabel state adalah jumlah stock, sedangkan variabel kontrolnya adalah tingkat perubahan stock sumber daya lama yang tersedia. Dalam makalah ini, masalah yang dibahas dibatasi pada keadaan stock tertentu pada kondisi populasi setimbnag yang stabil.

Tujuan penulisan makalah ini, adalah suatu proses awal dalam membahas pemodelan matematika bioekonomik dari investasi dalam usaha eksplorasi sumber daya alam yang memperhatikan keseimbangan bioekonomik. Selanjutnya dirancang strategi kontrol optimal pada masalah optimalisasi sistem dinamis menggunakan prinsip Maksimum Pontryagin dari ekspresi Hamiltonian.

2. Proses Pemodelan

Model biologi dasar dari eksplorasi sumber daya alam terbarukan, diberikan oleh,

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - h(t) \quad ,t \geq 0 \ , x(0) = x_0 \qquad \text{.................................} \quad (2.1)$$

$$x(t) \geq 0 \ , \ h(t) \geq 0 \qquad \text{....................................} \quad (2.2)$$

dengan : $x = x(t)$, menyatakan jumlah stock pada waktu t

Fungsi $G(x)$ menyatakan tingkat pertumbuhan natural dari populasi, yang bergantung pada x dan fungsi $h(t)$ menyatakan tingkat perubahan stock pada waktu t.

Fungsi pertumbuhan natural $G(x)$ diasumsikan memenuhi :

$$G(x) > 0, \text{ untuk } 0 < x < K$$
$$G(0) = G(K) = 0$$
$$G''(x) < 0, \text{ untuk } 0 < x < K$$

Tingkat stock K disebut sebagai kapasitas tersedia untuk populasi yang diberikan, yang menyebabkan bahwa bila $h(t) = 0$ maka $x(t)$ mendekati nilai K untuk waktu tak hingga. Ini berarti titik $x = K$ adalah titik keseimbangan stabil untuk populasi yang belum dieksplorasi.

Didefinisikan variabel baru, $E(t)$: usaha untuk memperoleh hasil dalam waktu t, dan relasi usaha-hasil digambarkan sebagai $h = qEx$, ... (2.3) dimana q : konstanta yang menyatakan proporsi stock x yang dihasilkan oleh satu satuan usaha peroduksi dalam satu satuan waktu (hari, bulan, tahun). Dalam hal ini, $G(x)$ dapat dinyatakan sebagai tingkat pertumbuhan populasi dan $h(t)$ adalah tingkat perolehan hasil per satuan waktu.

Selanjutnya didefinisikan parameter ekonomi :

p : harga jual dalam satuan usaha/waktu

c : biaya produksi dalam satuan usaha/waktu

Penerimaan per satuan waktu adalah : $R = ph - cE = (pqx - c)E$ .... (2.4)

Perhatikan juga bahwa penerimaan bersih per satuan waktu adalah $(pqx - c)$ dan nilai R merupakan total penerimaan bersih dari usaha eksplorasi (investasi) per satuan waktu, sering disebut juga sebagai nilai ekonomis yang diperoleh perusahaan. Prediksi awal dari model ini menyatakan bahwa usaha eksplorasi (investasi) akan memperoleh keuntungan bila dan hanya bila $x > c/pq$.

Bila diambil $x_{BE} = c/pq$ (*BE : keseimbangan bioekonomik*) .... (2.5), maka usaha investasi seperti ini akan untung pada tingkat stock x bila dan hanya bila $x(t) > x_{BE}$, asalkan tetap dijaga E(t) > 0 dalam proses eksplorasinya. Tetapi tidak dapat diprediksi dari model seberapa besar yang bisa terjadi pada $E(t)$. Bila dianggap $E(t)$ akan menjadi sangat besar setiap kali usaha eksplorasi (investasi) memperoleh keuntungan, hal ini akan menyebabkan tingkat stock x akan berkurang perlahan menuju $x_{BE.}$ Saat $x(t)$ dibawah x_{BE}, usaha eksplorasi (investasi) akan berhenti, dilain pihak pertumbuhan populasi natural ($G(x)$) berlanjut/kontinu, sehingga $x(t)$ akan terus meningkat. Oleh karena itu diharapkan bahwa nilai keseimbangan bioekonomik dipakai sebagai acuan eksplorasi untuk mempertahankan posisi stock berada disekitar nilai x_{BE}. Tingkat stock pada nilai x_{BE} disebut titik keseimbangan bioekonomik dalam usaha eksplorasi sumber daya alam *open-access,* tetapi dilain pihak menyebabkan penerimaan R = 0. Hal ini memberikan sudut pandang yang lain sebagai suatu prinsip utama dari konsep sumber daya alam yang ekonomis bahwa usaha eksplorasi sumber daya alam *open-access* yang tidak terkontrol dan mendorong posisi stock pada titik keseimbangan bioekonomik maka nilai ekonomisnya akan menuju nol. Terlihat adanya kondisi yang berlawanan antara iklim investasi dengan usaha konservasi sumber daya lama yang berkelanjutan. Sebenarnya tidak, tetapi yang pasti bahwa keberhasilan pengelolaan sumber daya alam mesti sepenuhnya memperhatikan domain waktu. Kearifan investor dalam usaha seperti ini sangat menentukan untuk menjaga keberlanjutan konservasi sumber daya alam.

Sayangnya terminologi keseimbangan bioekonomik seringkali tidak akurat, karena x_{BE} hanya ditentukan oleh parameter ekonomi $p, c, q,$ yang akan berubah setiap saat sepanjang ada perubahan parameter ekonomi. Teori bioekonomik sangat kuat melibatkan sumber daya alam yang dinamis, sehingga masalah konservasi pada eksplorasi sumber daya alam merupakan masalah dinamis. Perhitungan nilai ekonomi yang berkelanjutan untuk jumlah stock x, yang diatur pada $h = qEx$ dalam (2.1), dan diaplikasikan pada kondisi *steady-state* $dx/dt = 0$, maka $G(x) = qEx$. Oleh karena itu nilai ekonomi berkelanjutan (R_{SUST}) diberikan oleh,

$R_{SUST} = (pqx - c)E = (pqx - c)G(x)/qx = (p - c/qx)G(x)$ .... (2.6)

Kalau diambil $c(x) = c/qx$ .... (2.7),

maka $R_{SUST} = (p - c(x))G(x)$ .... (2.8)

Selanjutnya digambarkan R sebagai kurva lengkung dengan kondisi $R_{SUST} > 0$ untuk $x_{BE} < x < K$ dan $R_{SUST} = 0$ untuk nilai x yang lain. R_{SUST} menuju maksimum disekitar nilai interior $x = x_{MEY}$ (*MEY* : nilai ekonomis maksimum yang merupakan nilai ekonomis tradisional).

Fungsi $c(x)$ dalam (2.7) menyatakan biaya per satu satuan hasil produksi jika jumlah stock x. Perhatikan bahwa $c(x)$ berbanding terbalik dengan jumlah stock x, dan akan naik secara proporsional terbalik saat jumlah stock x menurun. Keseimbangan bioekonomik akan tercapai bila biaya untuk memperoleh tambahan satu satuan hasil produksi sama dengan harga jual per satuan, yaitu bila $c(x) = p$. Kondisi ini berlaku sebagaimana konsep keseimbangan bioekonomik yaitu saat jumlah stock $x = x_{BE} = c/pq$.

Proses pemodelan dan kendalanya sebagaimana dibahas diatas memberikan hasil model dinamik dasar yang dapat dituliskan ulang sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - h(t) \quad ,t \geq 0 \; ,x(0) = x_0 \qquad \text{(2.9)}$$

$$h(t) = qE(t)x(t) \qquad \text{(2.10)}$$

$$R(t) = ph(t) - cE(t) = (p - c(x(t))h(t) \qquad \text{(2.11)}$$

$$c(x) = \frac{c}{qx} \qquad \text{(2.12)}$$

$$x(t) \geq 0 \; , \; E(t) \geq 0 \qquad \text{(2.13)}$$

Fungsi obyektif yang sering digunakan dalam analisi investasi dan analisis *cost-benefit* adalah perhitungan *present value* untuk penerimaan bersih masa yang akan datang, dinyatakan oleh,

$PV = \int e^{-\delta t} R(t)\, dt$ .... (2.14)

dimana δ menyatakan tingkat suku bunga sesaat.

Misalkan nilai awal V_0 diinvestasikan hari ini dengan tingkat suku bunga majemuk δ, maka nilai investasi akan naik sebesar $dV/dt = \delta t$. Oleh karena itu, $V(t) = V_0 e^{\delta t}$ *atau* $V_0 = e^{-\delta t} V(t)$, sedangkan persamaan (2.14) menyatakan total *present value* .

Masalah optimalisasi pada sistem dinamis dapat didefinisikan oleh,

Memaksimalkan $_{\{E(t)\}}$ PV, ... (2.15)

berdasarkan fungsi kendala (syarat) persamaan (2.9) sampai (2.13).

Dalam hal ini akan ditentukan strategi usaha $E(t)$, $t \geq 0$ yang akan menghasilkan harga keuntungan ekonomis terbesar seperti yang dinyatakan oleh *total present value* PV dalam (2.14). Terlihat bahwa masalah optimalisasi dinamis adalah esensi dari teori ekonomi tentang modal dan investasi. Masalah ini dapat diselesaikan dengan teori kontrol optimal.

3. Teori Kontrol Optimal Satu Dimensi

Diberikan persamaan diferensial ,

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u(t)) \qquad ,0 \leq t \leq T \qquad \text{.......................................} \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad \text{...} \quad (3.2)$$

dimana x(t) menyatakan fungsi state (keadaan) untuk sistem tertentu pada waktu t.

Persamaan (3.1) disebut persamaan keadaan, fungsi $u(t)$ disebut fungsi/signal kontrol, keadaan awal x_0 diberikan, dan T menyatakan waktu akhir. Fungsi keadaan $x(t)$ disebut respon pada saat diberikan fungsi kontrol $u(t)$.

Diasumsikan pula $u(t) \in U_t$, untuk $0 \leq t \leq T$, diaman U_t adalah himpunan kontrol tertentu yang mungkin berbeda dengan t, sehingga fungsi kontrol disebut kontrol yang dapat diterima.

Didefinisikan fungsi obyektif (sasaran) oleh,

$$V(\{u(t)\}) = \int_0^T g(x(t),t,u(t))\,dt \quad \text{...} \quad (3.3)$$

Fungsi obyektif ini sering disebut fungsi reward, fungsi nilai, atau fungsi biaya.
Masalah kontrol optimal menjadi :

Memaksimalkan $V(\{u(t)\})_{(u(t)\in U_t)}$, berdasarkan kendala/syarat persamaan (3.1) dan (3.2). Fungsi kontrol $u(t)$ yang akan memaksimalkan fungsi obyektif $V(\{u(t)\})$ berdasarkan semua kendala/syarat, disebut kontrol optimal. Teori kontrol optimal merupakan generlasasi dari kalkulus variasi klasik yang berhubungan dengan persamaan *Euler* , $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial t}$ .... (3.4)

Diberikan persamaan/ekspresi yang disebut Hamiltonian:

$$H(x(t),t,u(t),\lambda(t)) = g(x,t,u(t)) + \lambda(t)\, f(x(t),t,u(t)) \quad \text{...................................} \quad (3.5)$$

dimana $\lambda(t)$ fungsi tambahan yang tidak diketahui , sering disebut variabel *adjoint*.

Jika $u(t)$ adalah signal kontrol optimal dan $x(t)$ responnya, maka keadaan *prinsip maksimum* akan menyatakan bahwa terdapat variabel *adjoint* kontinu $\lambda(t)$, sehingga untuk semua t berlaku,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial t} - \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{(persamaan } adjoint\text{) ....} \quad (3.6)$$

dan $H(x(t),t,u(t),\lambda(t)) = maks_{(u(t)\in Ut)}\, H(x(t),t,u(t),\lambda(t))$ .... (3.7)

Signal kontrol optimal $u(t)$ akan memaksimalkan ekspresi Hamiltonian setiap waktu t. Persamaan (3.6) dan (3.7) disebut prinsip Maksimum Pontryagin.

Misalkan $V(.)$ adalah nilai ekonomis yang diukur dalam *$*, maka $g(.)$ adalah cash-flow yang diukur dalam $/satuan waktu. Jika x merupakan jumlah aset (stock) fisik dalam ukuran ton, maka fungsi $f(.)$ berukuran ton/satuan waktu. Untuk menyesuaikan satuan dalam Hamiltonian $H = g + \lambda f$, variabel adjoint λ mempunyai satuan $/ton dan λ merupakan harga bayangan.

Bila $V(x, t)$ menyatakan nilai aset x pada waktu t, dengan asumsi aset dapat dikontrol secara optimal diantara waktu *t dan T*, maka

$$V(x,t) = \int_t^T g(x,s,u)\, ds, \qquad x(t) = x \quad \text{..} \ (3.8)$$

dimana u adalah signal kontrol optimal.

Dengan menggunakan persamaan-persamaan sebelumnya akan dapat diturunkan hubungan sebagai berikut ;

$$\lambda(t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad \text{..} \ (3.9)$$

Variabel adjoint $\lambda(t)$ dapat dipandang sebagai nilai ekonomis marginal dari aset x pada waktu t, yang dalam interpretasi ekonomi merupakan harga bayangan.

Hamiltonian $H = g + \lambda f$ dapat juga diinterpretasikan sebagai tingkat total waktu dari kenaikan kekayaan pemilik aset , hasil dari dua aspek yaitu cash-flow g ditambah kenaikan nilai aset sebesar $\lambda f = \lambda\ dx/dt$ (dalam jargon finansial disebut deviden dan pertumbuhan ekonomi). Memaksimalkan Hamiltonian (3.7) juga berarti mengoptimalkan signal kontrol $u(t)$ pada waktu t yang memaksimalkan tingkat total kenaikan kekayaan.

Untuk menjamin sistem persamaan diferensial mempunyai solusi tunggal perlu ditentukan kondisi awal tertentu pada $x(t)$ dan $\lambda(t)$ dalam rangka menggunakan teori kontrol optimal. Ada dua kondisi transversalitas yang berhubungan dengan waktu akhir T dan harus dipenuhi, yaitu tiga kemungkinan berikut :

1. Keadaan akhir $x(T) = x_T$ tertentu. Kontrol $u(t)$ yang diterima dapat diturunkan dari x_0 *ke* x_T dalam rentang waktunya yang disebut kelayakan kontrol. Kontrol optimal yang layak (jika ada) dan memenuhi prinsip maksimum sehingga sistem persamaan diferensial mempunyai kondisi awal dan akhir.
2. Keadaan akhir $x(T) = x_T$ tidak tertentu. Dalam kasus ini kondisi ekstra menjadi $\lambda(T)= 0$. Dalam situasi ekonomi, dikatakan bahwa sistem akan menuju pada tingkat harga bayangan menjadi nol pada waktu T.
3. Waktu akhir T tidak tertentu tetapi nilai $x(T)$ tertentu, maka
   $H(T) = H(x(T), T, u(T), \lambda(T)) = 0$

dan satu lagi adalah *penyertaan reward* di saat akhir yang diberikan oleh,

$$V(\{u(t)\}) = \int_0^T g(x(t), t, u(t))dt + W(x(T))$$

.... (3.10)

Seperti pada kasus *x(T)* tidak tertentu tetapi waktu *T* tertentu, maka diambil kondisi

$\lambda(T) = W'(x(T))$.

Kondisi transversalitas akan melengkapi Prinsip Maksimum Pontryagin sehingga menjadi suatu pernyataan yang lengkap tentang Prinsip Maksimum . Prinsip Maksimum adalah kumpulan syarat-syarat yang diperlukan untuk kontrol optimal dan responnya.

4. Pembahasan

4.1 Perancangan Kontrol Optimal

Model dinamis bioekonomik dasar yang akan diselesaikan dengan strategi kontrol optimal menggunakan prinsip maksimum, digambarkan sebagai masalah berikut:

$$\textit{memaksimalkan}\ PV = \int_0^T {}^{-\delta\, t}\,(p - c(x))h(t)\,dt \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (4.1)$$

berdsarakan pada fungsi kendala,

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - h(t),\ \ x(0) = x_0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.2)$$

$$x(t) \ge 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.3)$$

$$h(t) = q(x)\,E(t)\,x(t) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.4)$$

$$0 \le E(t) \le E_{maks} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.5)$$

Dalam hal ini, *c(x)* diberikan oleh :

$$c(x) = \frac{c}{q(x)\,x} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.6)$$

(*q* yang bergantung pada jumlah stock *x*)

Hamiltonian menjadi,

$$H = e^{-\delta t}(p - c(x))h + \lambda(G(x) - h)$$
$$= [e^{-\delta t}(p - c(x)) - \lambda]\,h + \lambda\,G(x) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.7)$$

dalam hal ini *x, h* dan λ semua dalam fungsi waktu *t*.

Akan dipandang *h(t)* sebagai variabel kontrol, dengan $0 \le h(t) \le h_{maks}(x)$ dimana,

$$h_{maks}(x) = q(x)\,E_{maks}\,x \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.8)$$

Didefinisikan : $\sigma(x, t) = e^{-\delta t}(p - c(x(t))) - \lambda(t)$ .... (4.9)

sehingga persamaan (4.7) menjadi, $H = \sigma(x, t)\,h + \lambda\,G(x)$ .... (4.10)

Proses memaksimalkan pada persamaan (3.7), dapat dikatakan bahwa kontrol optimal $h(t)$ memaksimalkan Hamiltonian pada $0 \le h(t) \le h_{maks}(x)$. Karena H linier dalam h, maka diperoleh,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \text{jika } \sigma(x,t) < 0 \\ \text{tidak tertentu} & , \text{jika } \sigma(x,t) = 0 \\ h_{maks}(x,t) & , \text{jika } \sigma(x,t) > 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots (4.11)$$

Fungsi $\sigma(x, t)$ selanjutnya disebut fungsi pemisah.

Kasus kontrol optimal $h(t) = \textit{tidak tertentu}$ pada $\sigma(x, t) = 0$ merupakan hal yang penting, karena dengan kondisi $\sigma(x, t)=0$ pada interval $t_1 < t < t_2$ maka dari (4.9) akan diperoleh,

$$\lambda(t) = e^{-\delta t}(p - c(x(t))) \quad \ldots\ldots (4.12)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= e^{-\delta t}[-\delta(p - c(x)) - c'(x)\frac{dx}{dt}] \\ &= e^{-\delta t}[-\delta(p - c(x)) - c'(x)G(x) - h] \end{aligned} \quad \ldots\ldots (4.13)$$

dalam satuan interval waktu diatas.

Oleh karena itu sesuai persamaan (4.9) dan (4.10) dihasilkan,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial x} &= e^{-\delta t}\, c'(x)\, h - \lambda\, G'(x) \\ &= e^{-\delta t}[c'(x)h - (p - c(x))G'(x)] \end{aligned}$$

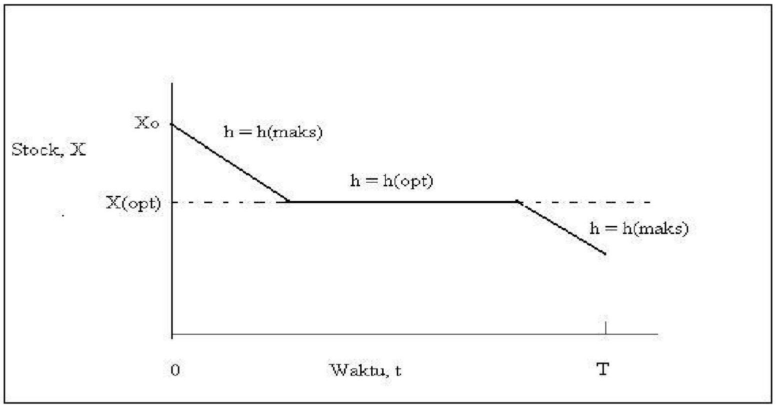
Memperhatikan dua ekspresi terakhir dan mengingat persamaan *adjoint* (3.6) serta melalui beberapa penyederhanaan, akan diperoleh :

$$G'(x) - \frac{c'(x)G(x)}{p - c(x)} = \delta \quad (\textit{Golden Rule}) \quad \ldots\ldots (4.14)$$

Dalam hal ini variabel kontrol $h(t)$ diabaikan, meninggalkan persamaan implisit untuk variabel keadaan $x = x(t)$. Ini adalah tipikal masalah kontrol optimal yang linier terhadap variabel kontrolnya.

Variabel keadaan $x = x(t)$ yang ditentukan dari (4.14) disebut solusi singular. Solusi singular terjadi jika fungsi pemisah $\sigma(x, t)$ adalah nol pada interval waktu tertentu. Kontrol singular selanjutnya diperoleh dengan menyelesaikan persamaan keadaan melalui variabel kontrolnya, dan hal ini terjadi jika model kontrol adalah linier dalam variabel kontrolnya.

Strategi untuk memperoleh hasil optimal, dapat diperlihatkan dengan menggunakan prinsip maksimum yang merupakan kombinasi variabel kontrol $h(t) = 0$ atau h_{maks} (fenomena kontrol *bang-bang*) dan kontrol singular ($h(t) = G(x^{opt})$, dimana x^{opt} adalah tingkat stock singular optimal yang diberikan oleh (4.14)).



Gambar 3.1. Trayektori Stock Optimal *x(opt)* Pada Model Linier.

Terlihat dari Gambar 3.1, pada fase awal : $x_0 > x^{opt}$ maka kontrol optimal $h(t) = h_{maks}$, dimana tingkat stock turun menuju x^{opt} dengan cepat. Dilain pihak saat $x_0 < x^{opt}$ kontrol optimal $h(t) = 0$, dan pada saat ini akan terjadi fase pemulihan stock dengan cepat.

Perhatikan pada fase akhir dimana *t mendekati T*, karena *x(T) tidak tertentu* dengan kondisi transversalitas maka $\lambda(T) = 0$. Dilain pihak $\lambda(t) = e^{-\delta t}(p - c(x^{opt})) > 0$ pada segmen singular, maka segmen singular ini akan ditinggalkan pada suatu waktu $t_2 < T$ dengan menggunakan $h(t) = h_{maks}$ dari posisi waktu t_2 *menuju* T . Khususnya, bila $x(T) \geq x_{BE}$ yang disebabkan oleh $x < x_{BE,}$ akan memberikan penerimaan $(p - c(x))$ bernilai negatif, dalam hal ini x_{BE} didefinisikan dengan $p - c(x_{BE}) = 0$.

Perhitungan pada kasus waktu akhir *T tak berhigga* ($T = +\infty$) memerlukan strategi optimalisasi yang meliputi proses penyesuaian stock awal x_0 *ke* x^{opt} yang sangat cepat, setelah itu diperoleh hasil produksi berkelanjutan dengan kontrol optimal $h(t) = h^{opt} = G(x^{opt})$ yang merupakan proses bekerja tanpa batas waktu.

4.2. Interpretasi Ekonomis

Dari persamaan (3.9) diketahui bahwa $\lambda(t) = \partial V/\partial x$ yang merupakan harga bayangan dari stock x. Pada segmen singular diperoleh $\lambda(t) = e^{-\delta t}(p - c(x^{opt}))$, kenaikan marginal Δx akan segera menghasilkan tingkat produksi yang memberikan penerimaan bersih marginal saat ini sebesar $(p - c(x^{opt}))$. Ahli ekonomi lebih suka menggunakan istilah harga bayangan saat ini, $\mu(t) = e^{\delta t}\lambda(t)$. Jika diformulasikan ulang prinsip maksimum menggunakan konsep ini, maka Hamiltonian saat ini diberikan oleh,

$$H_c = e^{\delta t} H \quad \ldots\ldots (5.1)$$

Sehingga, $$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}\mu(t)) = e^{-\delta t}\left(\frac{d\mu}{dt} - \delta\,\mu(t)\right)$$

dan persamaan adjoint, $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ menjadi,

$$e^{-\delta t}\left(\frac{d\mu}{dt} - \delta\mu\right) = -e^{-\delta t}\frac{\partial H_c}{\partial x} \quad \text{atau} \quad \frac{d\mu}{dt} = \delta\mu - \frac{\partial H_c}{\partial x} \quad \text{......................... (5.2)}$$

(Bentuk ini sering ditemui pada buku-buku ekonomi).

Dengan bentuk Hamiltonian awal (4.7) dan persamaan (5.1) diperoleh, $H_c = (p - c(x))h + \mu(t)(G(x) - h)$, dan ini adalah jumlah pendapatan ditambah pertumbuhan x saat ini (dalam nilai suku-suku). Tingkat hasil produksi optimal diperoleh dengan memaksimalkan jumlahan suku-suku ini untuk semua waktu t.

Masalah optimalisasi dari model dinamis bioekonomik (persamaan (4.1) sampai (4.5)) yang memuat $x(t) \geq 0$, merupakan titik poin akhir. Namun, karena perolehan hasil produksi tidak akan pernah optimal bila $x(t) < x_{BE}$ dan syarat ini tidak mengikat, maka kondisi seperti ini dapat diabaikan. Penyelsaian masalah oprimalisasi diatas tidak selamanya benar apabila $c(x) = 0$, tetapi syarat state/keadaan $x(t) \geq 0$ sangat mengikat dan hal ini mesti dimasukkan dalam perhitungan prinsip maksimum . Fase akhir pada saat *t mendekati T* mengindikasikan bahwa perolehan hasil dalam eksplorasi (investasi) akan menyebabkan kepunahan sumber daya alam pada waktu *T*.

4.3. Parameter *Time-varying*

Masalah optimalisasi di atas menunjukkan solusi singular $x(t) = x^{opt}$ adalah konstan, dan nilai x^{opt} merupakan tingkat stock optimal yang mempunyai keseimbangan bioekonomik. Sensitivitas x^{opt} terhadap sejumlah parameter ekonomi dapat diturunkan dari *Golden Rule* (4.14), yang dapat digambarkan pada tabel berikut,

Parameter ekonomi	Sensitivitas terhadap x^{opt}
Harga, p	-
Biaya usaha, c	+
Tingkat suku bunga, δ	-

<u>*Catatan :*</u> Sensitivitas x^{opt} terhadap parameter ekonomi :
"+" berarti x^{opt} naik bila parameter ekonominya naik, dan sebaliknya.

Analisis masalah bila terjadi pada kondisi yang dinamis, misalkan parameter harga $p(t)$ yang bervariasi setiap waktu maka akan menyebabkan perubahan pada $x^{opt}(t)$ yang tidak lagi konstan. Pada kasus seperti ini, p diganti dengan $p(t)$ pada proses *memaksimalkan PV* (4.1), sehingga bentuk Hamiltonian menjadi,

$H = [e^{-\delta t}(p(t) - c(x)) - \lambda]\, h + \lambda\, G(x)$,

dan fungsi pemisah-nya adalah, $\sigma(x, t) = e^{-\delta t}(p(t) - c(x(t))) - \lambda(t)$.

Melalui perhitungan yang sama seperti pada (4.12) dan (4.13), akan diperoleh :

$$G'(x) - \frac{c'(x)G(x)}{p(t) - c(x)} = \delta - \frac{p'(t)}{p(t) - c(x)}$$ (Modifikasi *Golden Rule*) ....(5.3)

Efek kenaikan harga *p(t),* misalkan pada stock optimal $x^{opt}(t)$ akan terdapat dua efek yang saling mengimbangi. *Pertama*, efek stock marginal dari bentuk ruas kiri pada (5.3) akan menurun setiap waktu yang menyebabkan *x* bernilai rendah. *Kedua,* suku yang memuat *p'(t)* di ruas kanan dari (5.3) akan negatif, sehingga mempunyai efek yang sama dengan penurunan tingkat suku bunga yang berimplikasi pada nilai *x* menjadi lebih besar. Yang mana mempunyai efek lebih besar akan bergatung pada detail secara numerik.

Mudah dipahami efek pertama bersifat intuitif, yang mana harga sumber daya alam yang lebih besar (relatif terhadap biaya) menyebabkan proses eksplorasi (investasi) lebih menguntungkan dan berimplikasi tingkat stock optimal rendah. Sedangkan efek kedua, jika $p'(t) > 0$ berarti harga jual saat itu naik sehingga keuntungan masa depan lebih besar dibandingkan sebelumnya, ini berarti biaya proses produksi sumber daya alam berkurang relatif dan keuntungan bisa disimpan untuk masa depan. Jika tingkat harga menurun di masa depan, maka tingkat stock optimal $x^{opt}(t)$ juga menurun, seperti yang ditunjukkan oleh sensitivitas x^{opt} terhadap parameter harga (*p*).

Semua pembahasan diatas menjelaskan bahwa permasalahan pengelolaan sumber daya alam bersifat dinamis dan mirip dengan permasalahan investasi. Konservasi sumber daya alam adalah permasalahan dalam investasi yang optimal.

5. Kesimpulan

Optimalisasi *present value* investasi pada eksplorsi sumber daya alam dapat dimodelkan dalam kontrol optimal dengan *discount term* yang memuat variabel keadaan dan variabel kontrol yang dinamis. Dalam penyelesaiannya dapat digunakan konsep prinsip maksimum *Pontryagin* dalam fenomena kontrol bang-bang. Dalam hal ini dicari tingkat perolehan hasil eksplorasi optimal berhubungan dengan stock sumber daya alam yang optimal untuk memaksimalkan keuntungan investasi.

Solusi optimal yang diperoleh dengan memaksimalkan ekspresi *Hamiltonian* yang linier pada variabel kontrol yang terbatas (mempunyai nilai maksimum), dalam domain waktu tertentu. Proses memaksimalkan *Hamiltonian* menghasilkan *Golden Rule* pada kondisi tertentu. *Golden Rule* memberikan solusi singular yang dapat dipakai dalam analisis sensitivitas stock optimal terhadap parameter ekonomi yang bersifat *time-varying.*

Masalah optimalisasi dinamis dalam investasi pada eksplorasi sumber daya alam yang dinamis merupakan esensi dari teori ekonomi tentang modal dan investasi. Investasi yang optimal sangat dipengaruhi oleh domain waktu untuk menciptakan konservasi sumber daya alam yang berkelanjutan.

Daftar Pustaka

[1] Anderson, B.D.O. and Moore, J.B., 1989, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall International.

[2] Astrom, K.J. and Witternmark, B., 1990, *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall International.

[3] Clark, Colin W., 2010, *Mathematical Bioeconomics: The Mathematics of Conservation*, John Wiley & Sons, USA.

[4] Grimble, M.J. and Johnson, M.A., 1988, *Optimal Control and Stochastic Estimation : Theory and Applications*, John Wiley & Sons.

[5] Lewis, F.L., 1992, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall International.

[6] Ogata, K., 1995, *Modern Control Enginering*, John Wiley & Sons.

[7] Panca W., Ponidi dan Ida Fithriani, 2004, *Pengoptimalan Present Value Saham Perusahaan Publik dengan Kontrol Optimal*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XII, Jurusan Matematika FMIPA UNUD, Bali