Jurnal Matematika Vol. 15, No.1, Juni 2025, pp. 68-77 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843.JMAT.2025.v15.i01.p186

Indeks Topologi Berbasis Derajat Simpul dari Graf Koprima Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo

Mamika Ujianita Romdhini
Program Studi Matematika, Universitas Mataram
e-mail: mamika@unram.ac.id

Fariz Maulana
Program Studi Matematika, Universitas Mataram
e-mail: fariz.maulana@unram.ac.id

Rio Satriyantara
Program Studi Matematika, Universitas Mataram
e-mail: riosatriyantara@staff.unram.ac.id

Muhammad Rijal Alfian
Program Studi Matematika, Universitas Mataram
e-mail: rijal_alfian@unram.ac.id

Abdurahim
Program Studi Matematika, Universitas Mataram
e-mail: abdurahim@staff.unram.ac.id

***Abstract*:** *The coprime prime graph of the integers modulo group is a graph where the vertices consist of all members of the group. An edge in the coprime prime graph is formed between two vertices whose greatest common divisor (GCD, or FPB in bahasa) of the orders of the two elements is either one or a prime number. This article derives the general formulas for the Atom Bond Connectivity, Forgotten, and Sombor polynomials Index.*

Keywords*: Atom Bond Connectivity, Forgotten, Sombor Polynomial, Prime Coprime Graph*

***Abstrak*:** *Graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo merupakan graf dengan simpulnya adalah semua anggota grup. Sisi pada graf koprima prima terbentuk dari dua simpul yang memiliki faktor persekutuan terbesar antara order dua elemen sama dengan satu atau prima. Dalam artikel ini menghasilkan rumus umum dari indeks Atom Bond Connectivity, Forgotten, dan Polinomial Sombor.*

Kata Kunci*: Atom Bond Connectivity, Forgotten, Polinomial Sombor, Graf Koprima Prima*

1. Pendahuluan

Graf merupakan representasi visual yang efektif untuk menggambarkan relasi antara objek dalam berbagai bidang ilmu, seperti matematika, fisika, dan ilmu komputer (Diestel, 2017). Representasi graf merupakan kombinasi dari graf dan struktur aljabar. Representasi graf membantu dalam memodelkan berbagai fenomena yang kompleks, terutama ketika digunakan untuk memahami relasi antar struktur bilangan dan struktur aljabar. Misalnya graf prima (Ghorbani et al., 2021; Vasiliev & Vdovin, 2005), graf koprima (Ma et al., 2014), graf non-koprima (Mansoori et al., 2016), dan graf koprima prima (Adhikari & Banerjee, 2022). Salah satu graf yang menarik dan masih belum banyak kajiannya adalah graf koprima prima dari grup bilangan bulat modulo. Simpul graf ini terdiri dari semua anggota grup bilangan bulat modulo. Sedangkan sisinya terbentuk dari dua simpul yang faktor persekutuan terbesar dari orde dua simpulnya sama dengan satu atau prima (Adhikari & Banerjee, 2022).

Indeks topologi adalah salah satu alat penting dalam menganalisis struktur graf. Indeks ini merupakan bilangan yang dihitung berdasarkan topologi graf, yang memberikan informasi tentang sifat-sifat penting dari graf tersebut, seperti kestabilan dan energi. Dalam banyak kasus, indeks topologi dapat digunakan untuk memprediksi sifat kimia dari molekul, memodelkan jaringan komunikasi, atau menganalisis interaksi di dalam sistem dinamis (Das et al., 2016). Studi tentang indeks topologi memberikan pemahaman yang lebih dalam tentang bagaimana graf yang kompleks dapat dianalisis secara matematis. Pada paper (Adhikari & Banerjee, 2022), belum ada kajian tentang indeks topologi. Oleh karena itu, pada artikel ini akan dikaji indeks topologi pada graf ini.

Penelitian terkait indeks topologi yang sedang naik daun. Hal ini terlihat dari beberapa penelitian terdahulu yang mengkaji tentang topik indeks topologi, salah satunya artikel yang ditulis oleh (Abdurahim et al., 2025). Pada artikel ini akan dibahas tiga indeks, yaitu Atom Bond Connectivity (ABC), Forgotten, dan Polinomial Sombor. Beberapa penelitian yang mengkaji indeks tersebut, yang pertama kajian mengenai batas atas dan bawah untuk indeks Sombor dari graf (Das et al., 2021). Selanjutnya ada kajian beberap sifat dari indeks Forgotten (Khaksari & Ghorbani, 2017). Ide besar untuk artikel ini adalah artikel yang ditulis oleh (Pratama et al., 2024). Pada artiel tersebut, graf yang digunakan graf GCD (*Greatest Common Divisor*) dengan membahas ketiga indeks tersebut. Oleh karena itu, pada artikel ini akan mengkaji ketiga indeks tersebut, yaitu Atom Bond Connectivity (ABC), Forgotten, dan Polinomial Sombor.

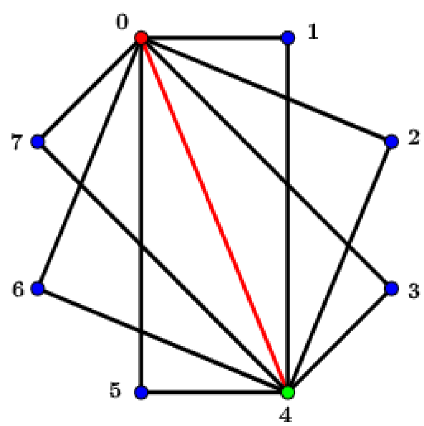
Jurnal Matematika Vol. 15, No.1, Juni 2025, pp. 68-77 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843.JMAT.2025.v15.i01.p186

2. Tinjauan Pustaka

Misal diberikan grup $\mathbb{Z}_8$. Orde dari masing-masing elemen grup tersebut adalah $|0| = 1$, $|1| = 8$, $|2| = 4$, $|3| = 8$, $|4| = 2$, $|5| = 8$, $|6| = 4$, dan $|7| = 8$. Selanjutnya, didapatkan faktor persekutuan terbesar antara $|x|$ dan $|y|$, yaitu $(|x|, |y|)$, dengan $x \neq y$ dan $x, y \in \mathbb{Z}_8$. Perhatikan tabel berikut.

	$\lvert\mathbf{0}\rvert$	$\lvert\mathbf{1}\rvert$	$\lvert\mathbf{2}\rvert$	$\lvert\mathbf{3}\rvert$	$\lvert\mathbf{4}\rvert$	$\lvert\mathbf{5}\rvert$	$\lvert\mathbf{6}\rvert$	$\lvert\mathbf{7}\rvert$
$\lvert\mathbf{0}\rvert$		$(\lvert 0\rvert,\lvert 1\rvert) = 1$	$(\lvert 0\rvert,\lvert 2\rvert) = 1$	$(\lvert 0\rvert,\lvert 3\rvert) = 1$	$(\lvert 0\rvert,\lvert 4\rvert) = 1$	$(\lvert 0\rvert,\lvert 5\rvert) = 1$	$(\lvert 0\rvert,\lvert 6\rvert) = 1$	$(\lvert 0\rvert,\lvert 7\rvert) = 1$
$\lvert\mathbf{1}\rvert$	$(\lvert 1\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$		$(\lvert 1\rvert,\lvert 2\rvert) = 4$	$(\lvert 1\rvert,\lvert 3\rvert) = 8$	$(\lvert 1\rvert,\lvert 4\rvert) = 2$	$(\lvert 1\rvert,\lvert 5\rvert) = 8$	$(\lvert 1\rvert,\lvert 6\rvert) = 4$	$(\lvert 1\rvert,\lvert 7\rvert) = 8$
$\lvert\mathbf{2}\rvert$	$(\lvert 2\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$	$(\lvert 2\rvert,\lvert 1\rvert) = 4$		$(\lvert 2\rvert,\lvert 3\rvert) = 4$	$(\lvert 2\rvert,\lvert 4\rvert) = 2$	$(\lvert 2\rvert,\lvert 5\rvert) = 4$	$(\lvert 2\rvert,\lvert 6\rvert) = 4$	$(\lvert 2\rvert,\lvert 7\rvert) = 4$
$\lvert\mathbf{3}\rvert$	$(\lvert 3\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$	$(\lvert 3\rvert,\lvert 1\rvert) = 8$	$(\lvert 3\rvert,\lvert 2\rvert) = 4$		$(\lvert 3\rvert,\lvert 4\rvert) = 2$	$(\lvert 3\rvert,\lvert 5\rvert) = 8$	$(\lvert 3\rvert,\lvert 6\rvert) = 4$	$(\lvert 3\rvert,\lvert 7\rvert) = 8$
$\lvert\mathbf{4}\rvert$	$(\lvert 4\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$	$(\lvert 4\rvert,\lvert 1\rvert) = 2$	$(\lvert 4\rvert,\lvert 2\rvert) = 2$	$(\lvert 4\rvert,\lvert 3\rvert) = 2$		$(\lvert 4\rvert,\lvert 5\rvert) = 2$	$(\lvert 4\rvert,\lvert 6\rvert) = 2$	$(\lvert 4\rvert,\lvert 7\rvert) = 2$
$\lvert\mathbf{5}\rvert$	$(\lvert 5\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$	$(\lvert 5\rvert,\lvert 1\rvert) = 8$	$(\lvert 5\rvert,\lvert 2\rvert) = 4$	$(\lvert 5\rvert,\lvert 3\rvert) = 8$	$(\lvert 5\rvert,\lvert 4\rvert) = 2$		$(\lvert 5\rvert,\lvert 6\rvert) = 4$	$(\lvert 5\rvert,\lvert 7\rvert) = 8$
$\lvert\mathbf{6}\rvert$	$(\lvert 6\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$	$(\lvert 6\rvert,\lvert 1\rvert) = 4$	$(\lvert 6\rvert,\lvert 2\rvert) = 4$	$(\lvert 6\rvert,\lvert 3\rvert) = 4$	$(\lvert 6\rvert,\lvert 4\rvert) = 2$	$(\lvert 6\rvert,\lvert 5\rvert) = 4$		$(\lvert 6\rvert,\lvert 7\rvert) = 4$
$\lvert\mathbf{7}\rvert$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 0\rvert) = 1$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 1\rvert) = 8$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 2\rvert) = 4$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 3\rvert) = 8$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 4\rvert) = 2$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 5\rvert) = 8$	$(\lvert 7\rvert,\lvert 6\rvert) = 4$	

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh graf koprima prima untuk grup $\mathbb{Z}_8$ adalah sebagai berikut.



Gambar 2.1. Graf koprima prima dari $\mathbb{Z}_8$.

Berikutnya, akan diberikan beberapa definisi dan istilah yang digunakan pada artikel ini.

Definisi 2.1. (Ali et al., 2021) Diberikan Γ_G graf sederhana terhubung. Indeks Atom-Bond-Connectivity (ABC) didefinisikan sebagai berikut.

$$ABC(\Gamma_G) = \sum_{xy \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(x) + \deg(y) - 2}{\deg(x)\deg(y)}}.$$

Nilai indeks ABC dari graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
ABC(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) &= \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(1) - 2}{\deg(0)\deg(1)}} + \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(2) - 2}{\deg(0)\deg(2)}} + \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(3) - 2}{\deg(0)\deg(3)}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(4) - 2}{\deg(0)\deg(4)}} + \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(5) - 2}{\deg(0)\deg(5)}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(6) - 2}{\deg(0)\deg(6)}} + \sqrt{\frac{\deg(0) + \deg(7) - 2}{\deg(0)\deg(7)}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\deg(1) + \deg(4) - 2}{\deg(1)\deg(4)}} + \sqrt{\frac{\deg(2) + \deg(4) - 2}{\deg(2)\deg(4)}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\deg(3) + \deg(4) - 2}{\deg(3)\deg(4)}} + \sqrt{\frac{\deg(4) + \deg(5) - 2}{\deg(4)\deg(5)}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\deg(4) + \deg(6) - 2}{\deg(4)\deg(6)}} + \sqrt{\frac{\deg(4) + \deg(7) - 2}{\deg(4)\deg(7)}} \\
&= \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{7 + 7 - 2}{7 \cdot 7}} + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{2 + 7 - 2}{2 \cdot 7}} + \sqrt{\frac{2 + 7 - 2}{2 \cdot 7}} + \sqrt{\frac{2 + 7 - 2}{2 \cdot 7}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} + \sqrt{\frac{7 + 2 - 2}{7 \cdot 2}} \\
&= 12\sqrt{\frac{7}{14}} + \sqrt{\frac{12}{49}} \\
ABC(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) &= 6\sqrt{2} + \frac{2}{7}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Definisi 2.2. (Gutman, 2021) Diberikan Γ_G graf sederhana terhubung. Indeks Forgotten didefinisikan sebagai berikut.

$$F(\Gamma_G) = \sum_{xy \in E(\Gamma_G)} \deg(x)^2 + \deg(y)^2.$$

Dengan menggunakan graf yang sama, yaitu $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$, diperoleh nilai indeks Forgotten sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
F(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) = &\left(\deg(0)^2 + \deg(1)^2\right) + \left(\deg(0)^2 + \deg(2)^2\right) + \left(\deg(0)^2 + \deg(3)^2\right) \\
&+ \left(\deg(0)^2 + \deg(4)^2\right) + \left(\deg(0)^2 + \deg(5)^2\right) + \left(\deg(0)^2 + \deg(6)^2\right) \\
&+ \left(\deg(0)^2 + \deg(7)^2\right) + \left(\deg(1)^2 + \deg(4)^2\right) + \left(\deg(2)^2 + \deg(4)^2\right) \\
&+ \left(\deg(3)^2 + \deg(4)^2\right) + \left(\deg(4)^2 + \deg(5)^2\right) + \left(\deg(4)^2 + \deg(6)^2\right) \\
&+ \left(\deg(4)^2 + \deg(7)^2\right) \\
= &\left(7^2 + 2^2\right) + \left(7^2 + 2^2\right) + \left(7^2 + 2^2\right) + \left(7^2 + 7^2\right) + \left(7^2 + 2^2\right) + \left(7^2 + 2^2\right) \\
&+ \left(7^2 + 2^2\right) + \left(2^2 + 7^2\right) + \left(2^2 + 7^2\right) + \left(2^2 + 7^2\right) + \left(7^2 + 2^2\right) \\
&+ \left(7^2 + 2^2\right) + \left(7^2 + 2^2\right) \\
= &\ 12 \cdot (7^2 + 2^2) + 1 \cdot (7^2 + 7^2) \\
F(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) = &\ 734.
\end{aligned}$$

Definisi 2.3. (Ghanbari, 2022) Diberikan Γ_G graf sederhana terhubung. Indeks Polinom Sombor didefinisikan sebagai berikut.

$$So(\Gamma_G; x) = \sum_{xy \in E(\Gamma_G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(x)^2 + \deg(y)^2}} x^{\deg(x)^2 + \deg(y)^2}.$$

Perhitungan nilai indeks Polinomial Sombor dapat menggunakan perhitungan indeks Forgotten. Hal ini karena rumus indeks Forgotten termuat dalam indeks Polinomial Sombor. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
So(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}; x) &= 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{7^2 + 2^2}} x^{7^2+2^2} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{7^2 + 7^2}} x^{7^2+7^2} \\
&= 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{53}} x^{53} + \frac{1}{7\sqrt{2}} x^{98} \\
So(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}; x) &= \frac{12}{53}\sqrt{53}x^{53} + \frac{1}{14}\sqrt{2}x^{98}.
\end{aligned}$$

$$\deg(u) = \begin{cases} p^k - 1 & u \in V_1 \\ p & u \in V_2 \end{cases}$$

di mana

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{0p^{k-1}, 1p^{k-1}, 2p^{k-1}, \dots, p^k - p\} \\
V_2 &= \{1,2, \dots, p^{k-1} - 1, p^{k-1} + 1, p^{k-1} + 2, \dots, 2p^{k-1} - 1, 2p^{k-1} + 1, 2p^{k-1} + 2, \dots, p^k \\
&\quad - p - 1, p^k - p + 1, \dots, p^k - 1\}.
\end{aligned}$$

3. Hasil dan Pembahasan

$$ABC(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{(p-1)p}{2(p^k - 1)} \cdot \sqrt{2(p^k - 2)} + (p^{k+1} - p^2) \cdot \sqrt{\frac{p^k + p - 3}{(p^k - 1) \cdot p}}.$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.4, simpul pada graf koprima prima dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dipartisi menjadi dua, yaitu V_1 dan V_2. Akan digunakan tiga kasus untuk membuktikan teorema ini. Dengan menggunakan alasan yang sama seperti pada Teorema 3.4 artikel Abdurahim (Abdurahim et al., 2024), perhatikan tiga kasus berikut. Ambil sebarang $x_1, y_1 \in V_1$ dan $x_2, y_2 \in V_2$

a) Sisi yang menghubungkan dua titik berbeda di V_1, yaitu u_1 dan v_1 dengan $u_1 \neq v_1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{u_1v_1 \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_1) + \deg(v_1) - 2}{\deg(u_1)\deg(v_1)}} &= S_{p-1} \cdot \sqrt{\frac{(p^k-1) + (p^k-1) - 2}{(p^k-1)(p^k-1)}} \\
&= \frac{1}{2}(p-1)p \cdot \sqrt{\frac{2(p^k-1) - 2}{(p^k-1)^2}} \\
&= \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)} \cdot \sqrt{2(p^k-1) - 2} \\
\sum_{u_1v_1 \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_1) + \deg(v_1) - 2}{\deg(u_1)\deg(v_1)}} &= \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)} \cdot \sqrt{2(p^k-2)}.
\end{aligned}$$

b) Sisi yang menghubungkan V_1 ke V_2.

$$\begin{aligned}
\sum_{u_1v_2 \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_1) + \deg(v_2) - 2}{\deg(u_1)\deg(v_2)}} &= (p^{k-1}-1)S_p \cdot \sqrt{\frac{(p^k-1) + p - 2}{(p^k-1)\cdot p}} \\
&= \frac{1}{2}(p^{k-1}-1)(p^2+p) \cdot \sqrt{\frac{p^k + p - 3}{(p^k-1)\cdot p}} \\
\sum_{u_1v_2 \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_1) + \deg(v_2) - 2}{\deg(u_1)\deg(v_2)}} &= \left(\frac{1}{2}p^{k+1} + \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right)\sqrt{\frac{p^k + p - 3}{(p^k-1)\cdot p}}.
\end{aligned}$$

c) Sisi yang menghubungkan V_2 ke V_1.

$$\begin{aligned}
\sum_{u_2v_1 \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_2) + \deg(v_1) - 2}{\deg(u_2)\deg(v_1)}} &= (p^{k-1}-1)S_{p-1} \cdot \sqrt{\frac{p + (p^k-1) - 2}{p + (p^k-1)}} \\
&= \frac{1}{2}(p^{k-1}-1)(p^2-p) \cdot \sqrt{\frac{p^k + p - 3}{(p^k-1)\cdot p}} \\
\sum_{u_2v_1 \in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_2) + \deg(v_1) - 2}{\deg(u_2)\deg(v_1)}} &= \left(\frac{1}{2}p^{k+1} - \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p\right)\sqrt{\frac{p^k + p - 3}{(p^k-1)\cdot p}}.
\end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan nilai dari a), b), dan c) diperoleh

Jurnal Matematika Vol. 15, No.1, Juni 2025, pp. 68-77 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843.JMAT.2025.v15.i01.p186

$$ABC(\Gamma_G) = \sum_{u_1v_1\in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_1)\ +\deg(v_1)-2}{\deg(u_1)\deg(v_1)}} + \sum_{u_1v_2\in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_1)\ +\deg(v_2)-2}{\deg(u_1)\deg(v_2)}}$$
$$+ \sum_{u_2v_1\in E(\Gamma_G)} \sqrt{\frac{\deg(u_2)\ +\deg(v_1)-2}{\deg(u_2)\deg(v_1)}}$$
$$= \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)} \cdot \sqrt{2(p^k-2)} + \left(\frac{1}{2}p^{k+1} + \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right) \cdot \sqrt{\frac{p^k+p-3}{(p^k-1)\cdot p}}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}p^{k+1} - \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p\right) \cdot \sqrt{\frac{p^k+p-3}{(p^k-1)\cdot p}}$$
$$ABC(\Gamma_G) = \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)} \cdot \sqrt{2(p^k-2)} + (p^{k+1}-p^2) \cdot \sqrt{\frac{p^k+p-3}{(p^k-1)\cdot p}}.$$

Teorema 3.2. *Misal diberikan graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dengan $n = p^k$ dan $k \geq 2 \in \mathbb{N}$, maka diperoleh indeks Forgotten yaitu*
$$F(\Gamma_G) = p^{3k+1} - 3p^{2k+1} + p^{k+3} + 3p^{k+1} - p^4 - p.$$
Bukti. Dengan menggunakan asumsi yang sama pada Teorema 3.1, diperoleh indeks Forgotten untuk sisi yang dihubungkan oleh dua simpul berbeda di V_1 adalah
$$\sum_{u_1v_1\in E(\Gamma_G)} \deg(u_1)^2 + \deg(v_1)^2 = S_{p-1} \cdot \left(\left(p^k-1\right)^2 + \left(p^k-1\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(p-1)p \cdot 2\left(p^k-1\right)^2$$
$$\sum_{u_1v_1\in E(\Gamma_G)} \deg(u_1)^2 + \deg(v_1)^2 = p^{2k+2} - p^{2k+1} - 2p^{k+2} + 2p^{k+1} + p^2 - p.$$
Selanjutnya, indeks Forgotten untuk sisi yang menghubungkan dari simpul di V_1 ke V_2 adalah
$$\sum_{u_1v_2\in E(\Gamma_G)} \deg(u_1)^2 + \deg(v_2)^2 = (p^{k-1}-1)S_p \cdot \left(\left(p^k-1\right)^2 + p^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)(p^2+p)\left(p^{2k}-2p^k+p^2+1\right)$$
$$= -\frac{1}{2}p^4 - \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^{3k} - p^{2k} + \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^{3k+1}$$
$$-\frac{3}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{k+3} + \frac{3}{2}p^{k+1} + \frac{3}{2}p^{k+2} - \frac{1}{2}p^{2k+2} - \frac{1}{2}p.$$
Berikutnya, indeks Forgotten untuk sisi yang menghubungkan dari simpul di V_2 ke V_1 adalah
$$\sum_{u_2v_1\in E(\Gamma_G)} \deg(u_2)^2 + \deg(v_1)^2 = (p^{k-1}-1)S_{p-1} \cdot \left(p^2 + \left(p^k-1\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)(p^2-p) \cdot \left(p^{2k}-2p^k+p^2+1\right)$$

$$= -\frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p^{3k} + p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^{3k+1} - \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{k+3} - \frac{1}{2}p^{k+1} + \frac{1}{2}p^{k+2} - \frac{1}{2}p^{2+2k} + \frac{1}{2}p.$$

Dengan menjumlahkan ketiga kasus di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
F(\Gamma_G) &= \sum_{u_1v_1\in E(\Gamma_G)} \deg(u_1)^2 + \deg(v_1)^2 + \sum_{u_1v_2\in E(\Gamma_G)} \deg(u_1)^2 + \deg(v_2)^2 \\
&\quad + \sum_{u_2v_1\in E(\Gamma_G)} \deg(u_2)^2 + \deg(v_1)^2 \\
&= (p^{2k+2} - p^{2k+1} - 2p^{k+2} + 2p^{k+1} + p^2 - p) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}p^4 - \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^{3k} - p^{2k} + \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^{3k+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{k+3} + \frac{3}{2}p^{k+1} + \frac{3}{2}p^{k+2} - \frac{1}{2}p^{2+2k} - \frac{1}{2}p\right) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p^{3k} + p^{2k} - \frac{1}{2}p^k + \frac{1}{2}p^{3k+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}p^{2k+1} + \frac{1}{2}p^{k+3} - \frac{1}{2}p^{k+1} + \frac{1}{2}p^{k+2} - \frac{1}{2}p^{2+2k} + \frac{1}{2}p\right) \\
&= (p^{2k+2} - p^{2k+1} - 2p^{k+2} + 2p^{k+1} + p^2 - p) \\
&\quad + (-p^4 - p^2 + p^{3k+1} - 2p^{2k+1} + p^{k+3} + p^{k+1} + 2p^{k+2} \\
&\quad - p^{2+2k}) \\
F(\Gamma_G) &= p^{3k+1} - 3p^{2k+1} + p^{k+3} + 3p^{k+1} - p^4 - p
\end{aligned}$$

Teorema 3.3. *Misal diberikan graf koprima prima $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dengan $n = p^k$ dan $k \geq 2 \in \mathbb{N}$, maka diperoleh indeks Sombor yaitu*

$$So(\Gamma_G; x) = \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)\sqrt{2}} x^{2(p^k-1)^2} + \left(p^{k+1} - p^2\right) \frac{1}{\sqrt{p^{2k} - 2p^k + p^2 + 1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1}.$$

Bukti. Dengan asumsi yang sama pada teorema sebelumnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
So(\Gamma_G; x) &= \sum_{u_1v_1 \in E(\Gamma_G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u_1)^2 + \deg v_1)^2}} x^{\deg(u_1)^2+\deg(v_1)^2} \\
&\quad + \sum_{u_1v_2 \in E(\Gamma_G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u_1)^2 + \deg v_2)^2}} x^{\deg(u_1)^2+\deg(v_2)^2} \\
&\quad + \sum_{u_2v_1 \in E(\Gamma_G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u_2)^2 + \deg v_1)^2}} x^{\deg(u_2)^2+\deg(v_1)^2} \\
&= S_{p-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(p^k-1)^2 + (p^k-1)^2}} x^{(p^k-1)^2+(p^k-1)^2} + \left(p^{k-1} - 1\right)S_p \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2(p^k-1)^2 + p^2}} x^{(p^k-1)^2+p^2} + \left(p^{k-1} - 1\right)S_{p-1} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2(p^k-1)^2}} x^{p^2+(p^k-1)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(p-1)p \cdot \frac{1}{\sqrt{2(p^k-1)^2}} x^{2\left(p^k-1\right)^2} +$$
$$= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)(p^2+p) \frac{1}{\sqrt{p^{2k}-2p^k+p^2+1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1} +$$
$$= \frac{1}{2}\left(p^{k-1}-1\right)(p^2-p) \cdot \frac{1}{\sqrt{p^{2k}-2p^k+p^2+1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1}$$
$$= \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)\sqrt{2}} x^{2\left(p^k-1\right)^2}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}p^{k+1} + \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}p\right) \frac{1}{\sqrt{p^{2k}-2p^k+p^2+1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}p^{k+1} - \frac{1}{2}p^k - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p\right) \frac{1}{\sqrt{p^{2k}-2p^k+p^2+1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1}$$
$$So(\Gamma_G; x) = \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)\sqrt{2}} x^{2\left(p^k-1\right)^2} + \left(p^{k+1}-p^2\right) \frac{1}{\sqrt{p^{2k}-2p^k+p^2+1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1}.$$

4. Kesimpulan dan Saran

Diperoleh beberapa rumus umum dari indeks topologi untuk graf koprima prima untuk grup bilangan bulat modulo, yaitu

a. Indeks Atom Bond Connectivity (ABC)

$$ABC\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) = \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)} \cdot \sqrt{2(p^k-2)} + (p^{k+1}-p^2) \cdot \sqrt{\frac{p^k+p-3}{(p^k-1)\cdot p}}$$

b. Forgotten

$$F(\Gamma_G) = \frac{1}{2}(p-1)p \cdot \frac{2}{2(p^k-1)} + p^2(p^{k-1}-1) \cdot \frac{2}{p+(p^k-1)}$$

c. Polinomial Sombor

$$So(\Gamma_G; x) = \frac{(p-1)p}{2(p^k-1)\sqrt{2}} x^{2\left(p^k-1\right)^2} + (p^{k+1}-p^2) \frac{1}{\sqrt{p^{2k}-2p^k+p^2+1}} x^{p^{2k}-2p^k+p^2+1}$$

Daftar Pustaka

Abdurahim, A., Pratiwi, L. F., Karang, G. Y., Wardhana, I. G. A. W., Irwansyah, I., Awanis, Z. Y., & Romdhini, M. U. (2024). INDEKS WIENER PADA GRAF KOPRIMA PRIMA DARI GRUP BILANGAN BULAT MODULO. *Jurnal Matematika UNAND, 2024,* in review.

Abdurahim, A., Qudsi, J., Muawanah, S., & Salwa, S. (2025). Indeks Harmonik, Randic, dan Gutman dari Graf Koprima Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo. *Jurnal Diferensial*, *7*(1), 38–46.

https://doi.org/https://ejurnal.undana.ac.id/index.php/JD/article/view/18227

Adhikari, A., & Banerjee, S. (2022). Prime coprime graph of a finite group. *Novi Sad Journal of Mathematics*, *52*(2), 41–59. https://doi.org/10.30755/NSJOM.11151

Ali, A., Das, K. C., Dimitrov, D., & Furtula, B. (2021). Atom–bond connectivity index of graphs: A review over extremal results and bounds. *Discrete Mathematics Letters*, *5*, 68–93. https://doi.org/10.47443/dml.2020.0069

Das, K. C., Çevik, A. S., Cangul, I. N., & Shang, Y. (2021). On sombor index. *Symmetry*, *13*(1), 1–12. https://doi.org/10.3390/sym13010140

Das, K. C., Mohammed, M. A., Gutman, I., & Atan, K. A. (2016). Comparison between atom-bond connectivity indices of graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, *76*(1), 159–170.

Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-662-53622-3

Ghanbari, N. (2022). On the Sombor characteristic polynomial and Sombor energy of a graph. *Computational and Applied Mathematics*, *41*(6), 1–14. https://doi.org/10.1007/s40314-022-01957-5

Ghorbani, M., Darafsheh, M. R., & Yousefzadeh, P. (2021). On the Prime Graph of a Finite Group. *Miskolc Mathematical Notes*, *22*(1), 201–210. https://doi.org/10.18514/MMN.2021.1668

Gutman, I. (2021). Geometric Approach to Degree-Based Topological Indices: Sombor Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, *86*, 11–16.

Khaksari, A., & Ghorbani, M. (2017). On the forgotten topological index. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, *8*(3), 327–338. https://doi.org/https://doi.org/10.22052/ijmc.2017.43481

Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, *3*(2), 13–23. https://doi.org/https://doi.org/10.22108/ijgt.2014.4363

Mansoori, F., Erfanian, A., & Tolue, B. (2016). Non-coprime graph of a finite group. *AIP Conference Proceedings*, *1750*(Juni 2016), 1–9. https://doi.org/10.1063/1.4954605

Pratama, R. B., Maulana, F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2024). *Topological Indices of GCD Graph Representations for Integer Modulo Groups with Prime Power Order*. *26*, 79–84.

Vasiliev, A. V, & Vdovin, E. P. (2005). An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group. *Algebra and Logic*, *44*(6), 381–406. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10469-005-0037-5