

Kekuatan Ketakteraturan Sisi Modular Pada Graf Rantai $C(nC_m)$

I Nyoman Budayana

Jurusan Matematika, Universitas Pendidikan Ganesha
e-mail: nyoman.budayana@undiksha.ac.id

Sariyasa

Jurusan Matematika, Universitas Pendidikan Ganesha
e-mail: sariyasa@undiksha.ac.id

Abstract: Modular edge irregular labeling of graph G is an vertex labeling f from $V(G)$ to $\{1,2,3,\dots,k\}$ which is induced a bijection w from $E(G)$ to Z_n , where $w(xy) = f(x) + f(y)$. Modular edge irregularity strength of graph G , $mes(G)$, is the minimum number k such that f is a modular edge irregular labeling on G . In this paper, we discuss the modular edge irregularity strength of chain graph $C(nC_m)$, for $m = 4, 6, \text{and } 8$.

Keywords: modular edge irregular labeling, modular edge irregularity strength, chain graph

Abstrak: Pelabelan takteratur sisi modular pada graf G adalah suatu pelabelan titik f dari $V(G)$ ke $\{1,2,3,\dots,k\}$ yang menginduksi sebuah fungsi bijektif w , dari $E(G)$ ke Z_n , dengan $w(xy) = f(x) + f(y)$. Kekuatan ketakteraturan sisi modular dari graf G , $mes(G)$, adalah bilangan k terkecil sehingga f merupakan pelabelan takteratur sisi modular pada G . Pada artikel ini diberikan kekuatan ketakteraturan sisi modular pada graf rantai $C(nC_m)$, untuk $m=4, 6, 8$.

Kata kunci: pelabelan takteratur sisi modular, kekuatan ketakteraturan sisi modular, graf rantai

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari, tanpa disadari konsep- konsep dalam teori graf sudah banyak digunakan. Contohnya, jalan atau jembatan yang menghubungkan satu kota dengan kota lainnya. Kota – kota merupakan objek diskrit yang dapat dipandang sebagai himpunan titik dan jalan atau jembatan yang menghubungkan objek – objek tersebut dipandang sebagai sisi. Contoh lainnya misalnya dalam masalah lampu pemandu lalu lintas di suatu persimpangan jalan, untuk menentukan jalur mana yang bisa dibuka bersamaan, jalur mana yang tidak boleh dibuka bersamaan. Konsep graf dapat membantu permasalahan tersebut melalui pemodelan yang baik, tepatnya menggunakan pewarnaan graf yang merupakan salah satu contoh pelabelan graf. Pelabelan graf, juga dapat

dimanfaatkan dalam kriptography, seperti yang dilakukan oleh Deepa, dkk (2019).

Salah satu jenis pelabelan yang relatif baru dan sedang berkembang adalah pelabelan takteratur sisi modular (*modular edge irregular labeling*). Pelabelan takteratur sisi modular tergolong pelabelan yang relatif baru karena baru diperkenalkan pada tahun 2022. Oleh karena itu, belum banyak hasil penelitian yang terekam dalam survei yang dilakukan oleh Gallian (2023). Pada prinsipnya, pelabelan ini merupakan variasi dari pelabelan takteratur sisi yang diperkenalkan dalam Ahmad, dkk. (2014) dan dalam Ahmad, dkk (2018) telah dibahas mengenai kekuatan ketakteraturan sisi pada graf rantai dan hasil join dari dua graf. Modifikasi yang dilakukan serupa dengan pendefinisian pelabelan takteratur modular dari pelabelan takteratur yang dilakukan oleh Baca, dkk (2020). Dalam Koam, dkk. (2023) dijelaskan bahwa pelabelan takteratur sisi modular merupakan pelabelan yang diciptakan setelah terinspirasi dari pelabelan takteratur sisi, yaitu dengan menambahkan satu syarat yang membatasi nilai bobot sisi pada graf. Pada suatu graf $G(V, E)$ dengan ukuran q , suatu pelabelan titik $\psi: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ disebut pelabelan takteratur sisi modular jika terdapat fungsi bijektif $\phi: E(G) \rightarrow Z_q$ dengan $\phi(uv) = \psi(u) + \psi(v) \pmod{q}$, yang disebut bobot modulo q dari sisi uv . Himpunan Z_q merupakan himpunan bilangan bulat modulo q . Bilangan terkecil k sedemikian hingga G memiliki pelabelan takteratur sisi modular disebut dengan kekuatan ketakteraturan sisi modular (*modular edge irregularity strength*) dan dinotasikan dengan $mes(G)$. Jika graf G tidak memiliki pelabelan takteratur sisi modular, maka $mes(G) = \infty$.

Adapun beberapa penelitian yang telah dilakukan adalah, penelitian oleh Koam, dkk (2023) yang memberikan definisi pelabelan ini, dan telah menemukan estimasi dari nilai batas untuk kekuatan ketakteraturan sisi modular pada graf *caterpillar*, *cycle*, dan *friendship graph*. Penelitian oleh Haryeni, dkk. (2022) telah memberikan pelabelan takteratur sisi modular pada graf kipas dan graf roda. Untuk graf rantai, telah diteliti kekuatan ketakteraturan sisinya oleh Ahmad (2018), namun belum sampai pada kekuatan ketakteraturan sisi modular.

Jika ingin mengkolaborasikan pelabelan graf dalam penyandian, diperlukan graf yang panjangnya bisa diatur sesuai kebutuhan atau sesuai panjang karakter yang akan dienskripsi. Salah satu keluarga graf yang memiliki sifat seperti itu adalah graf lintasan, namun graf lintasan terlalu sederhana untuk digunakan dalam kasus ini. Pilihan lainnya adalah keluarga graf rantai. Jenis graf rantai merupakan salah satu graf yang belum banyak dibahas dalam pelabelan takteratur sisi modular. Graf rantai terdiri dari blok-blok yang membentuk suatu lintasan. Menyandingkan graf rantai dengan pelabelan takteratur sisi modular menurut penulis merupakan salah satu kombinasi yang baik jika nantinya bisa diterapkan dalam kriptografi. Beberapa rasional tersebut memotivasi peneliti untuk lebih mendalami penelitian tentang pelabelan takteratur sisi modular pada beberapa keluarga graf rantai.

2. Metode Penelitian

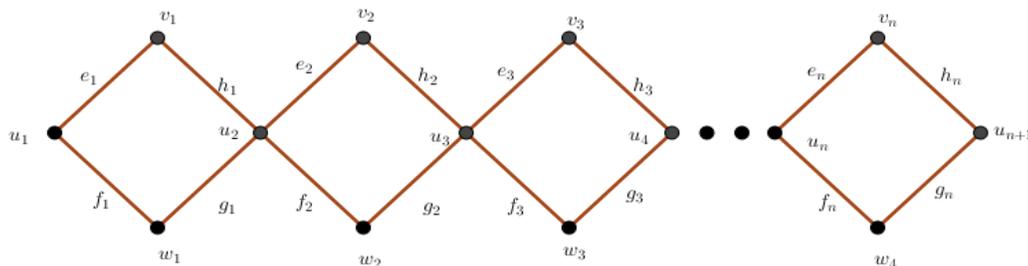
Penelitian ini dilakukan dengan metode studi pustaka. Adapun tahapan- tahapan dalam menemukan pelabelan takteratur sisi modular dari keluarga graf yang sudah ditentukan, yaitu graf rantai $C(nC_m)$, pada penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut.

- 1) Melakukan usaha pelabelan dengan teknik trial-error. Percobaan pelabelan ini dilakukan pada graf –graf yang berukuran relative kecil. Sebuah graf yang berukuran sama, mungkin dapat dilabeli dengan cara yang berbeda namun masih memberikan kekuatan yang sama.
- 2) Menganalisis hasil pelabelan-pelabelan yang telah didapatkan untuk menemukan pola-pola pelabelan yang dapat digunakan. Dari semua pelabelan yang sudah diperoleh pada graf yang berukuran kecil, dianalisis untuk dicari pelabelan-pelabelan yang memiliki keserupaan pola, sehingga dapat dikembangkan menjadi pola umum untuk kasus-kasus tertentu.
- 3) Mengkonstruksi suatu pemetaan yang diduga merupakan pelabelan takteratur sisi modular untuk keluarga graf tersebut. Dari kelompok pola yang sudah didapatkan, dikonstruksi sebuah pemetaan agar lebih mudah untuk melabelkan graf-graf dengan ukuran lebih besar.
- 4) Melakukan pembuktian secara analitik terhadap pemetaan yang telah dikonstruksi, untuk menjamin kebenaran secara analitik bahwa pemetaan yang dikonstruksi akan memberikan pelabelan takteratur sisi modular dengan kekuatan yang optimum.

3. Hasil Dan Pembahasan

3.1 Pelabelan pada Graf $C(nC_4)$

Penelitian ini diawali pada graf rantai $C(nC_4)$, yaitu graf rantai yang setiap bloknya merupakan graf cycle C_4 . Penamaan titik dan sisi dari graf rantai $C(nC_4)$ yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.



Gambar 3.1. Penamaan titik dan sisi pada graf rantai $C(nC_4)$

Beberapa catatan penting yang harus diingat dalam memberikan pelabelan takteratur sisi

modular adalah sebagai berikut:

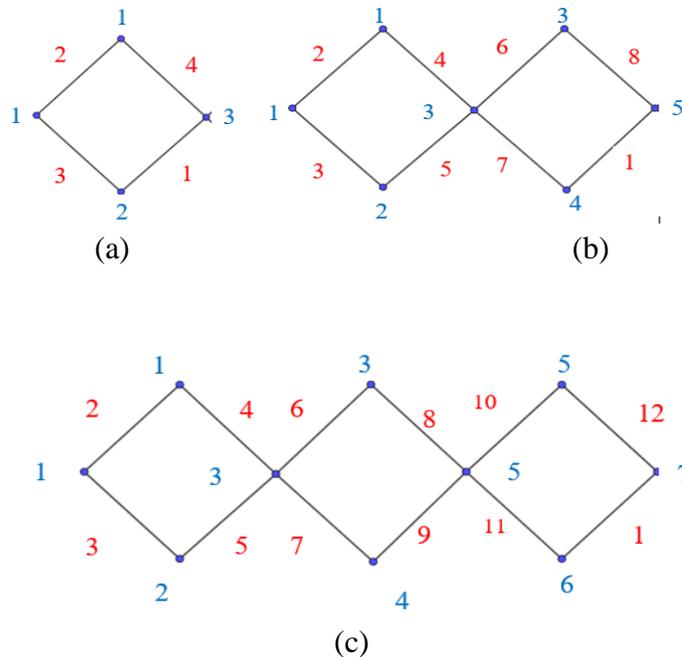
- 1) Pelabelan dilakukan pada titik dengan label berupa bilangan asli.
- 2) Bobot dihitung pada setiap sisi dengan menjumlahkan label pada setiap titik yang insiden dengan sisi tersebut. Bobot berupa bilangan modulo p (dengan p adalah banyaknya sisi pada graf).
- 3) Kekuatan ketakteraturan sisi graf G dan kekuatan ketakteraturan sisi modular graf G , memenuhi $\max\left\{\left\lceil\frac{|E(G)|+1}{2}\right\rceil, \Delta(G)\right\} \leq es(G) \leq mes(G)$, dengan $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum dari titik di G . Jadi, nilai $mes(G)$ tidak akan kurang dari $\max\left\{\left\lceil\frac{|E(G)|+1}{2}\right\rceil, \Delta(G)\right\}$.
- 4) Jika G adalah graf sederhana dengan $es(G) = k$ dan himpunan bobot sisi dari G membentuk bilangan asli berurutan, maka $mes(G) = es(G) = k$.

Diperhatikan bahwa, pada graf $C(nC_4)$ banyaknya titik adalah $3n + 1$ dan banyaknya sisi adalah $4n$. Derajat tertinggi dari titik pada $C(nC_4)$ dengan $n > 1$ adalah 4. Dengan demikian,

$$\max\left\{\left\lceil\frac{|E(G)|+1}{2}\right\rceil, \Delta(G)\right\} = \max\left\{\left\lceil\frac{4n+1}{2}\right\rceil, 4\right\} = \max\{2n+1, 4\}$$

Merupakan batas bawah dari $mes(C(nC_4))$.

Setelah dilakukan pelabelan pada beberapa graf rantai, diperoleh beberapa hasil sebagai berikut.



Gambar 3.2. Pelabelan takteratur sisi modular pada graf (a) $C(1C_4)$, (b) $C(2C_4)$, dan (c) $C(3C_4)$

Dari ketiga pelabelan di atas, pada graf $C(1C_4)$, $C(2C_4)$, dan $C(3C_4)$, sudah terlihat pola untuk pelabelan setiap titiknya, yaitu :

$$\begin{aligned} \psi(u_i) &= 2i - 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n + 1 \\ \psi(v_i) &= 2i - 1, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \\ \psi(w_i) &= 2i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi di atas akan menginduksi sebuah fungsi bijektif :

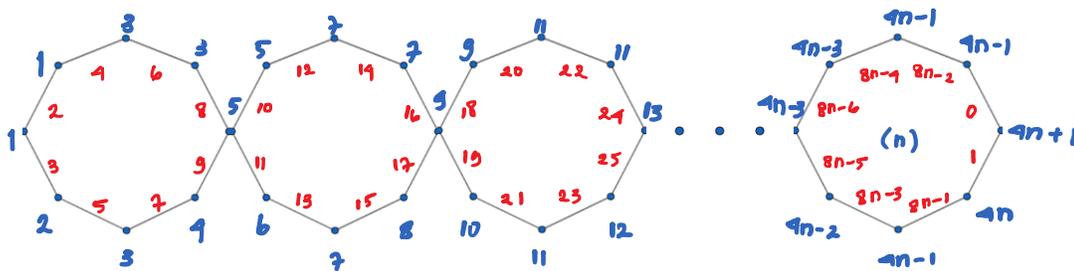
$$\begin{aligned} \phi(u_i v_i) &= 4i - 2 \pmod{4n} \\ \phi(u_i w_i) &= 4i - 1 \pmod{4n} \\ \phi(u_{i+1} v_i) &= 4i \pmod{4n} \\ \phi(u_{i+1} w_i) &= 4i + 1 \pmod{4n} \end{aligned}$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, n$

Jika dilihat label titik yang digunakan, untuk $n > 1$, label terbesar yang digunakan adalah $2n + 1$. Nilai tersebut merupakan batas bawah dari $mes(C(nC_4))$. Dengan demikian, telah diperoleh nilai optimum dari $mes(C(nC_4))$ untuk $n > 1$, yaitu $2n + 1$. Sedangkan untuk $n = 1$, $mes(C_4)$ adalah 3.

3.2 Pelabelan pada Graf Rantai $C(nC_8)$

Hasil untuk pelabelan takteratur sisi modular pada graf $C(nC_8)$ dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.3. Pelabelan tak teratur sisi modular pada graf $C(nC_8)$

Pada Gambar 3.3 di atas, terlihat teknik pelabelan untuk graf rantai $C(nC_8)$, dimana graf tersebut memiliki size $|E| = 8n$ dengan bobot sisi adalah dari 0 sampai $8n - 1$, serta label titik terbesar adalah $4n + 1$. Batas bawah untuk kekuatan ketakteraturan sisinya adalah

$$es(C(nC_8)) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{8n + 1}{2} \right\rceil, 4 \right\} = 4n + 1$$

Karena batas bawahnya telah sama dengan label terbesar yang digunakan pada pelabelan yang ditunjukkan pada Gambar 4.3, maka dapat disimpulkan bahwa $mes(C(nC_8)) = 4n + 1$.

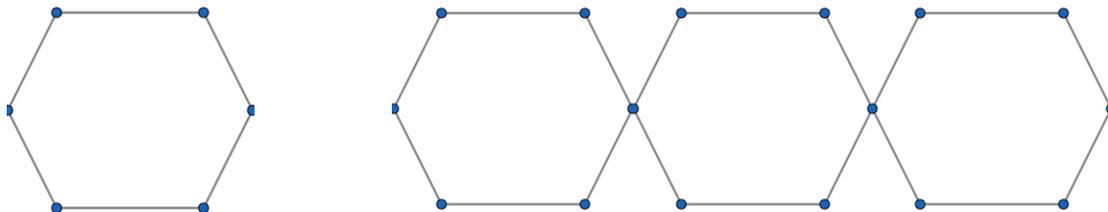
Melihat dari pelabelan pada $C(nC_4)$ dan $C(nC_8)$ dapat dilihat bahwa:

- 1) Pelabelan setiap blok graf *cycle*-nya memiliki keserupaan pola dengan *cycle* sebelumnya, dengan label titik terkecil sama dengan label titik terbesar pada *cycle* sebelumnya dan label titik terbesar sama dengan label titik terkecil pada *cycle* setelahnya.
- 2) Titik yang memiliki label terbesar dan terkecil adalah titik penghubung antar *cycle*.
- 3) Setiap *cycle* memiliki bobot sisi yang berurutan, yang juga dilanjutkan pada bobot sisi pada *cycle* setelahnya.

Tiga kondisi ini mengindikasikan bahwa jika dapat melakukan pelabelan takteratur sisi modular pada sebuah *cycle*, maka dapat digeneralisasi pada setiap *cycle* berikutnya, hingga menghasilkan pelabelan pada graf rantai.

3.3 Pelabelan pada Graf Rantai $C(nC_6)$

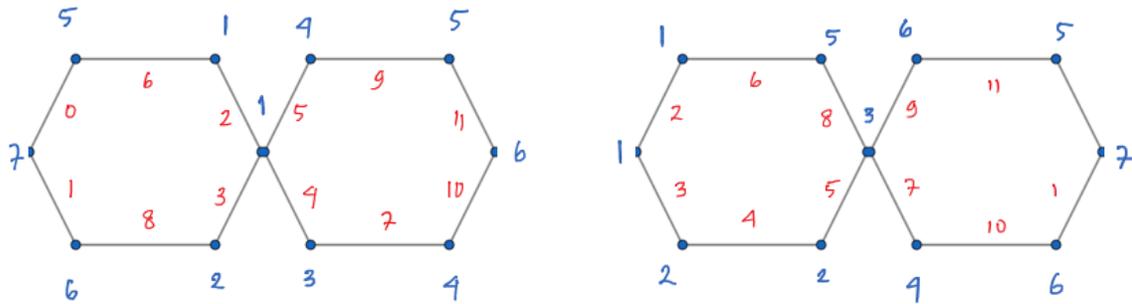
Untuk rantai dari C_6 bisa diperhatikan terlebih dahulu Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Rantai $C(1C_6)$ dan rantai $C(3C_6)$

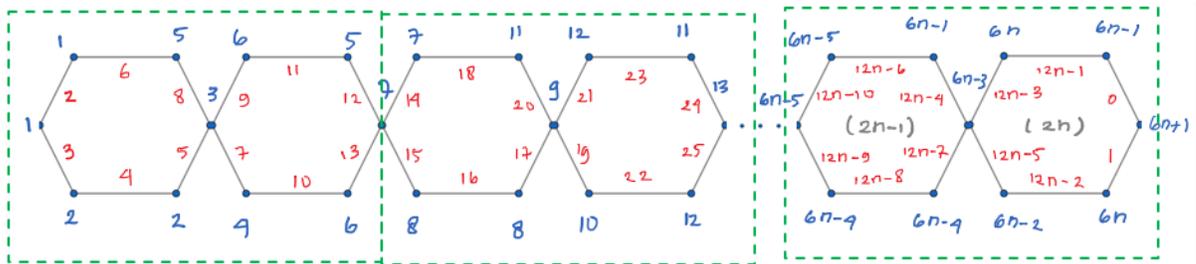
Untuk rantai C_6 dengan panjang rantai ganjil, maka banyaknya sisi adalah sebanyak $6n$, dengan n bilangan ganjil. Akibatnya, akan terdapat sebanyak $3n$ bobot ganjil dan $3n$ bobot genap, dimana jumlah semua bobot ini merupakan bilangan ganjil. Di sudut pandang lain, jumlah bobot semua sisi adalah sama dengan jumlah dari label titik dikalikan dengan derajatnya, karena kontribusi setiap titik bergantung pada derajatnya. Semua titik berderajat genap, sehingga jumlah dari semua label kali derajat titik adalah bilangan genap. Di sini terjadi kontradiksi, sehingga tidak mungkin terdapat pelabelan takteratur sisi modular pada graf rantai $C(nC_6)$ untuk n ganjil. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa untuk n ganjil, $\text{mes}(C(nC_6)) = \infty$. Hal serupa juga terjadi untuk semua graf rantai $C(nC_{2k})$ dengan n dan k bilangan ganjil.

Untuk n genap, dapat diperhatikan pelabelan yang diberikan pada gambar 4.5 berikut



Gambar 3.5 Dua buah pelabelan takteratur sisi modular pada Graf $C(2C_6)$

Dari pelabelan pada Gambar 3.5 di atas, dicari pola untuk melakukan pelabelan pada rantai yang lebih panjang, dengan memperhatikan panjang rantai genap, maka disini setiap C_6 dikelompokkan secara berpasangan dua-dua. Sehingga akhirnya diperoleh pelabelan untuk Rantai $C(2nC_6)$, seperti yang diberikan pada Gambar 3.6 berikut.



Gambar 3.6 Pelabelan takteratur sisi modular pada graf rantai $C(2nC_6)$

Dari pola pelabelan di atas, diperoleh bahwa graf tersebut memiliki size $|E| = 12n$ dengan bobot sisi adalah dari 0 sampai $12n - 1$, serta label titik terbesar adalah $6n + 1$. Batas bawah untuk kekuatan ketakteraturan sisinya adalah

$$es(C(2nC_6)) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{12n + 1}{2} \right\rceil, 4 \right\} = 6n + 1$$

Karena batas bawahnya telah sama dengan label terbesar yang digunakan pada pelabelan yang ditunjukkan pada Gambar 4.6, maka dapat disimpulkan bahwa $mes(C(2nC_6)) = 6n + 1$.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pelabelan takteratur sisi modular pada graf rantai $C(nC_4)$ diberikan oleh pemetaan :

$$\psi(u_i) = 2i - 1, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n + 1$$

$$\psi(v_i) = 2i - 1, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$\psi(w_i) = 2i, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n$$
 Dengan nilai optimum $mes(C(nC_4)) = 2n + 1$
2. Pelabelan takteratur sisi modular pada graf rantai $C(nC_8)$ diberikan pada Gambar 3.3 dengan $mes(C(nC_8)) = 4n + 1$
3. Kekuatan ketakteraturan sisi modular pada graf $C(nC_6)$ adalah $mes(C(nC_6)) = \infty$, untuk n ganjil
4. Kekuatan ketakteraturan sisi modular pada graf $C(nC_{2k})$ adalah $mes(C(nC_{2k})) = \infty$, untuk n dan k ganjil
5. Pelabelan takteratur sisi modular pada graf rantai $C(2nC_6)$ diberikan pada Gambar 3.6 dengan $mes(C(2nC_6)) = 6n + 1$

Berdasarkan pembahasan, disebutkan bahwa jika C_m memiliki pelabelan takteratur sisi dengan bobot sisi berurutan, besar kemungkinan rantai $C(nC_m)$ memiliki pelabelan takteratur sisi modular. Untuk graf rantai $(C(2nC_{2k}))$, pada artikel ini baru dibahas hanya untuk $k = 3$ untuk bilangan ganjil k lainnya masih terbuka untuk diteliti. Penelitian berikutnya juga dapat dilanjutkan pada keluarga graf rantai lainnya, dimana bloknya bukan graf *cycle*.

Daftar Pustaka

- Ahmad, A., A. Gupta, R. Simanjuntak. (2018). Computing the edge irregularity strengths of chain graphs and the join of two graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (ejgta)*, vol 6(no 1). doi:<http://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2018.6.1.15>
- Ahmad, A., O. Al-Mushayt, M. Bača.(2014). On edge irregularity strength of graphs. *Appl. Math. Comput.*243, 607–610
- Bača, M., K. Muthugurupackiam, KM. Kathiresan, S. Ramya. (2020). Modular irregularity strength of graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (ejgta)*, vol 8(no 2), hal 435-443. doi: <http://dx.doi.org/10.5614/ejgta.2020.8.2.19>
- Deepa, B., V. Maheswari, V. Balaji.(2019).Creating ciphertext and decipher using graph labeling techniques. *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)*, vol 9(issue 1s), hal 206-212.
- Gallian, J. A. (2023). Dynamic Survey of Graph Labeling.*The Electronics Journal of Combinatorics* #DS6
- Haryeni, D.O., Z.Y. Awanis, M. Bača, A. Semanicova-Fenovicikova.(2022). Modular Version of Edge Irregularity Strength for Fan and Wheel Graphs. *Symmetry*, 14,

2671. <https://doi.org/10.3390/sym14122671>
Koam, A.N.A., A. Ahmad, M. Bača, A. Semanicova-Fenovcikova. (2023). Modular edge
irregularity strength of graphs. *AIMS Math*, 8, 1475–148.