

# Implementasi *Boundary Element Method* untuk Persamaan Panas Syarat Batas Dirichlet- Neumann Domain Lengkungan

**Millatuz Zahroh**

Jurusan Matematika, Universitas Jember  
e-mail: [millatuz@unej.ac.id](mailto:millatuz@unej.ac.id)

**Abstract:** *The problem of two dimension heat equation is modeled as Laplace Equation. However, the analytical solution of Laplace Equation is relatively difficult to be solved directly especially with mixed boundary conditions (Dirichlet-Neumann) and arch domain. Then alternatively, numerical method is needed. Boundary Element Method (BEM) is one of powerfull numerical method that can be employed to solve partial differential equations with boundary discretization technique, expecially for complex domain problem. In this study, two dimensional Laplace Equation with Dirichlet-Neumann boundary conditions and arch domains which is having exact value, is evaluated using Boundary Element Method. The simulation of numerical results obtained with BEM giving indication that this method can produce an accurate numerical solution.*

**Keywords:** *Heat equation, Dirichlet-neumann, Boundary Element Method, Arch domain*

**Abstrak:** *Permasalahan persamaan panas dimensi dua tidak bergantung waktu dapat dimodelkan dalam persamaan Laplace. Akan tetapi, persamaan Laplace dengan syarat batas campuran (Dirichlet-Neumann) dan domain lengkungan sulit diselesaikan solusinya secara analitik. Dengan demikian dibutuhkan alternatif penyelesaian, yaitu menggunakan metode numerik. Boundary Element Method (BEM) merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan dengan baik untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan teknik pendiskritisasian batas domain dari suatu permasalahan, khususnya untuk masalah domain yang rumit. Dalam penelitian ini, persamaan panas dimensi dua, dengan syarat batas Dirichlet-Neumann dan domain berbentuk lengkungan, yang telah diketahui solusi eksaknya dievaluasi menggunakan metode numerik BEM. Hasil simulasi solusi yang dihasilkan menunjukkan bahwa BEM dapat menghasilkan solusi numerik yang cukup akurat.*

**Kata Kunci:** *Persamaan panas, Dirichlet-neumann, Boundary Element Method, Domain lengkungan*

## 1. Pendahuluan

Fenomena perambatan panas dua dimensi kondisi *steady* atau tak bergantung waktu dapat dimodelkan dalam persamaan Laplace dimensi dua sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

dengan  $U(x, y)$  adalah temperatur (suhu) yang merambat pada bidang koordinat  $x$  dan  $y$  (Zill et all, 2013).

Selanjutnya, persamaan Laplace (1) membutuhkan suatu syarat batas ataupun syarat awal untuk menjamin ketunggalan solusinya. Syarat batas (SB) dari suatu persamaan differensial berdimensi dua domain  $R^2$  yang terletak pada kurva tertutup  $C$  dapat diklasifikasikan sebagai berikut.

1. Syarat Batas Dirichlet

$$U = \bar{U} \quad \text{pada } C$$

2. Syarat Batas Neumann

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \bar{U}_n \quad \text{pada } C$$

3. Syarat Batas Robin

$$\alpha U + \beta \frac{\partial U}{\partial n} = \gamma \quad \text{pada } C$$

dengan  $\bar{U}$ ,  $\bar{U}_n$  dan  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  adalah fungsi yang telah diketahui dan terdefinisi.

Permasalahan perambatan panas yang melibatkan syarat batas campuran (Dirichlet dan Neumann) dan domain lengkungan sulit diselesaikan secara analitik. Dengan demikian, dibutuhkan alternatif metode numerik dalam menyelesaikan masalah ini. Salah satu metode numerik yang cukup efektif untuk menyelesaikan permasalahan terkait fisika-matematis adalah Boundary Element Method (BEM).

Menurut Katsikadelis (2016), beberapa diantara kelebihan metode BEM jika dibandingkan metode numerik lain seperti metode beda hingga ataupun metode elemen hingga yaitu titik kolokasi yang dibutuhkan lebih sedikit, karena pendiskritisasian hanya dilakukan pada batas domain. Selain itu, BEM lebih fleksibel jika digunakan untuk menyelesaikan masalah domain yang rumit seperti lekukan ataupun retakan

Adapun penelitian sebelumnya, Manaqib (2008) telah mengimplementasikan BEM untuk menyelesaikan persamaan Laplace pada domain persegi. Pada penelitian ini, BEM akan diaplikasikan sebagai metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan (1) dengan syarat batas Dirichlet-Neumann dan domain lengkungan. Berikutnya simulasi numerik yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi analitiknya, untuk menguji keakuratan solusi numerik menggunakan BEM.

## 2. Metodologi

Masalah syarat batas (MSB) adalah masalah yang terdiri dari suatu PD yang dilengkapi dengan syarat batasnya. MSB persamaan panas dimensi dua dengan syarat

batas Dirichlet dan Neumann pada kurva tertutup  $C$  dapat dimodelkan dalam persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} U &= f_1(x,y) \text{ untuk } (x,y) \in C_1 \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= f_2(x,y) \text{ untuk } (x,y) \in C_2 \end{aligned} \quad (2)$$

dimana  $f_1(x,y)$  dan  $f_2(x,y)$  adalah fungsi yang telah diketahui dan terdefinisi pada kurva tertutup terbatas  $C$  dan  $C_1 \cup C_2 = C$

Adapun prosedur BEM untuk menyelesaikan MSB (2) yaitu

1. Relasi Resiprokal yaitu relasi persamaan integral atas persamaan Laplace dan Solusi Fundamental Laplace
2. Formulasi Integral diperoleh dengan memodifikasi domain pada pusat titik kolokasi untuk mendapatkan nilai konstanta  $\lambda$  yang bersesuaian dengan lokasi titik kolokasi
3. Persamaan Integral Batas, digunakan untuk menentukan solusi Persamaan (2) melalui perdiskritisasian batas domainnya. Pendiskritisasian ini dilakukan dengan cara membuat segmen atau ruas garis yang saling menyambung dengan ujungnya berada pada kurva.
4. Terakhir, dengan mensubstitusikan syarat batas yang diketahui, diperoleh Sistem Persamaan Linier (SPL) Persamaan Panas dimensi dua menggunakan BEM

Selanjutnya, SPL dari MSB Laplace divalusi dengan memanfaatkan software MATLAB. Adapun tahapan yang dilakukan yaitu tahap penentuan titik kolokasi dan pendiskritisasian kurva, berikutnya yaitu tahap pemrosesan data, yang terakhir yaitu hasil evaluasi data untuk mengetahui kekuratan BEM

### 3. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini akan membahas evaluasi permasalahan persamaan panas dimensi dua atau persamaan Laplace *steady-state* dengan syarat batas Dirichlet-Neumann dan domain lengkungan menggunakan BEM.

### 3.1. Prosedur BEM

#### 1. Relasi Resiprokal

Jika  $U_1$  dan  $U_2$  adalah solusi dari PDP (1), maka berlaku

$$U_2 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) = 0$$

berikutnya

$$\left( U_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - U_1 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \right) + \left( U_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - U_1 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) = 0$$

diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial y} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

Dengan teori Divergensi Gauss maka

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial}{\partial x} \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial y} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) dx dy \\ = \int_C \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (4)$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial n} &= \frac{\partial U_1}{\partial x} n_x + \frac{\partial U_1}{\partial y} n_y \\ \frac{\partial U_2}{\partial n} &= \frac{\partial U_2}{\partial x} n_x + \frac{\partial U_2}{\partial y} n_y \end{aligned}$$

dimana  $(n_x, n_y)$  merupakan vektor normal kurva  $C$

Berdasarkan (3) dan (4) maka diperoleh

$$\int_C \left( U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) ds = 0$$

Jika  $U_1$  merupakan solusi fundamental Laplace dan  $U_2 = U$ , merupakan solusi dari (1), maka diperoleh

$$\int_C \left( U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (5)$$

dimana

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \ln((x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2)$$

dengan  $x \neq \bar{x}$  dan  $y \neq \bar{y}$

## 2. Formulasi Integral

Persamaan (5) tidak terdefinisi untuk  $(\bar{x}, \bar{y}) \in R \cup C$ . Maka melalui modifikasi domain jika  $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$  dan  $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$ , seperti yang ditunjukkan Manaqib (2017), diperoleh formulasi integral dari (5) sebagai berikut

$$\lambda(\bar{x}, \bar{y})U(\bar{x}, \bar{y}) = \int_C \left( U(x, y) \frac{\partial \Phi(x, y; \bar{x}, \bar{y})}{\partial n} - \Phi(x, y; \bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} \right) ds \quad (6)$$

dengan

$$\lambda(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 & (\bar{x}, \bar{y}) \in R \cup C \\ 1 & (\bar{x}, \bar{y}) \in R \\ \frac{1}{2} & (\bar{x}, \bar{y}) \in \text{bagian mulus } C \end{cases}$$

## 3. Persamaan Integral Batas

Persamaan integral batas dari metode numerik BEM digunakan untuk menentukan solusi (6) melalui perdiskritisasian batas domainnya. Pendiskritisasian ini dilakukan dengan cara membuat segmen atau ruas garis yang saling menyambung dengan ujungnya berada pada kurva. Misalkan dibagi menjadi  $N$  segmen, maka terdapat  $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \dots, C^{(N)}$  dan diambil titik tengah  $(x^{(i)}, y^{(i)})$  di setiap segmen sebagai titik kolokasinya dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Langkah berikutnya, dengan mengasumsikan  $U(x, y)$  dan  $\frac{\partial U(x, y)}{\partial n}$  bernilai konstan yaitu

$$\begin{aligned} U(x, y) &\approx U(x^{(i)}, y^{(i)}) = U^{(i)} \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} &\approx \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} \Big|_{(x, y) = (x^{(i)}, y^{(i)})} = P^{(i)} \end{aligned}$$

Sehingga (6) menjadi

$$\lambda(\bar{x}, \bar{y})U(\bar{x}, \bar{y}) = U^{(i)} \int_{C^{(i)}} \frac{\partial \Phi(x, y; \bar{x}, \bar{y})}{\partial n} ds - P^{(i)} \int_{C^{(i)}} \Phi(x, y; \bar{x}, \bar{y}) ds$$

Atau untuk  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$  dengan  $k = 1, 2, 3, \dots, N$  dapat ditulis

$$\lambda(x^{(k)}, y^{(k)})U(x^{(k)}, y^{(k)}) = \sum_{i=1}^N U^{(i)} F_{2,k}^{(i)} - P^{(i)} F_{1,k}^{(i)} \quad (7)$$

dimana

$$F_{1,k}^{(i)} = \int_{C^{(i)}} \Phi(x, y; x^{(k)}, y^{(k)}) ds$$

$$F_{2,k}^{(i)} = \int_{C^{(i)}} \frac{\partial}{\partial n} (\Phi(x, y; x^{(k)}, y^{(k)})) ds$$

4. Sistem Persamaan Linier (SPL) Persamaan Panas dimensi dua dengan BEM  
 Diperhatikan bahwa titik  $(x^{(k)}, y^{(k)})$  terletak pada bagian *smooth* kurva  $C$  maka (7) menjadi

$$\frac{1}{2} U(x^{(k)}, y^{(k)}) = \sum_{i=1}^N U^{(i)} F_{2,k}^{(i)} - P^{(i)} F_{1,k}^{(i)} \quad (8)$$

Selanjutnya, diperhatikan syarat batas (2), untuk nilai  $(x, y) \in C_1$  maka  $U^{(i)}$  diketahui dan  $P^{(i)}$  tidak diketahui dan untuk nilai  $(x, y) \in C_2$  maka  $P^{(i)}$  diketahui dan  $U^{(i)}$  tidak diketahui. Dengan meletakkan nilai yang tidak diketahui di sisi sebelah kiri dan nilai yang diketahui di sebelah kanan pada (8), maka akan terbentuk SPL dari persamaan panas dimensi dua sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^N a^{(ki)} z^{(i)} = \sum_{i=1}^N b^{(ki)} \quad (9)$$

Dengan

$$a^{(ki)} = \begin{cases} -F_{1,k}^{(i)} & \text{jika SB dirichlet pada } C \\ F_{2,k}^{(i)} - \frac{1}{2}\delta_{ki} & \text{jika SB neumann pada } C \end{cases}$$

$$b^{(ki)} = \begin{cases} U^{(i)} \left( \frac{1}{2}\delta_{ki} - F_{2,k}^{(i)} \right) & \text{jika SB dirichlet pada } C \\ P^{(i)} F_{1,k}^{(i)} & \text{jika SB neumann pada } C \end{cases}$$

$$z^{(i)} = \begin{cases} P^{(i)} & \text{jika SB dirichlet pada } C \\ U^{(i)} & \text{jika SB neumann pada } C \end{cases}$$

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{jika } k \neq i \\ 1 & \text{jika } k = i \end{cases}$$

### 3.2. Prosedur MATLAB

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada Prosedur BEM, MSB Laplace dapat diselesaikan dengan BEM dengan mengevaluasi (9) memanfaatkan *Software* MATLAB.

#### 1. Input File

- menentukan titik ujung segmen garis (sebanyak  $N$ ), pada kurva dengan koordinat  $(x_b(i), y_b(i))$
- mendeskripsikan batas domain yang berbentuk lengkungan sehingga terbentuk segmen  $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \dots, C^{(N)}$  beserta syarat batasnya pada kurva tertutup  $C$ .

2. *Pre-Proceesing*

- menghitung  $l(i)$  yaitu panjang ruas garis  $C^{(i)}$  beserta vektor normalnya yaitu  $(n_x(i), n_y(i))$
- menentukan titik kolokasi yaitu titik tengah segmen garis dengan koordinat  $(x(i), y(i))$  untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ .
- menghitung integral nilai  $F_{1,k}^{(i)}$  dan  $F_{2,k}^{(i)}$  untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ . yang terdiri dari dua kasus, yaitu ketika  $k = i$  dan  $k \neq i$ .

3. *Proceesing*

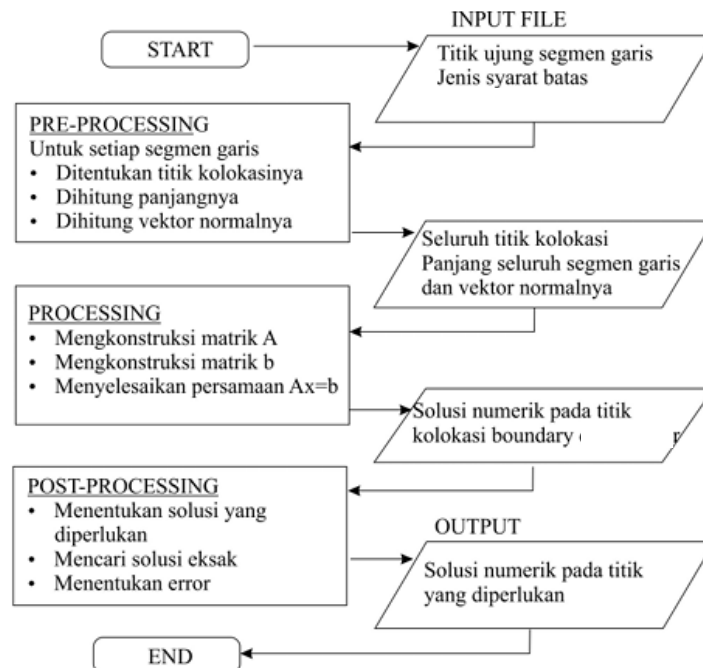
- mengkonstruksi matrik  $AX = B$ , dengan  $X = z(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  sesuai syarat batas yang diketahui, Dirichlet atau Neumann seperti pada persamaan (9)
- menyelesaikan nilai matrik  $X = A^{-1}B$  sehingga diperoleh nilai  $U^{(i)}$  dan  $P^{(i)}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, N$

4. *Post-Proceesing*

- Menentukan titik yang akan dicari solusinya dengan koordinat  $(u(i) v(i))$ .
- Mencari solusi eksak dan solusi numerik dengan BEM sehingga diperoleh nilai *Error* pada titik yang akan dicari solusinya

5. *Output File*

Diperoleh solusi numerik, solusi eksak dan *Error* pada koordinat titik yang ingin dievaluasi solusinya pada domain R dan dibatasi kurva C untuk MSB Laplace domain lengkungan



Gambar 1. *Flowchart* Program pada MATLAB

### 3.3. Simulasi Numerik

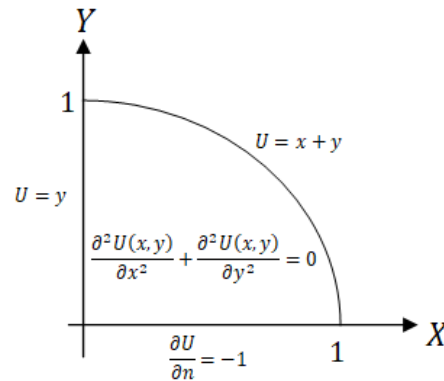
Adapun distribusi panas dimensi dua yang akan diselesaikan berupa lempengan berbentuk seperempat lingkaran dengan jari-jari satu satuan. Berikut diberikan masalah syarat batas (MSB) persamaan Laplace *steady-state*

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{untuk } x > 0, y > 0 \text{ dan } x^2 + y^2 < 1 \quad (10)$$

dimana

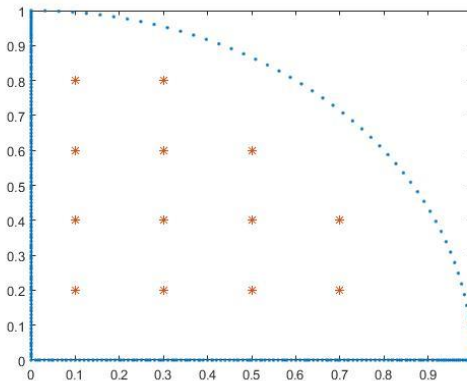
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial n} &= -1 && \text{untuk } y = 0 \text{ dan } 0 < x < 1 \\ U &= x + y && \text{untuk } x^2 + y^2 = 1 \text{ dan } x > 0 \\ U &= y && \text{untuk } x = 0 \text{ dan } 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya, MSB (10) tersebut dapat diilustrasikan pada Gambar 1 sebagai berikut



Gambar 2. Ilustrasi MSB Laplace (10) Domain Lengkungan

Menurut Keng (2008), dapat ditunjukkan bahwa nilai eksak dari MSB (10) yaitu  $U(x,y) = x + y$ . Berikutnya nilai eksak ini dibandingkan dengan solusi numerik BEM. Adapun titik yang akan dievaluasi diilustrasikan Gambar 2 berupa titik-titik berwarna merah.



Gambar 3. Titik-titik (merah) yang Dievaluasi pada Domain



Jika  $N_a$  adalah jumlah segmen pada  $y = 0$  dan  $0 < x < 1$ ,  $N_b$  adalah jumlah segmen pada  $x^2 + y^2 = 1$  dan  $x > 0$ , dan  $N_c$  adalah jumlah segmen pada  $x = 0$  dan  $0 < y < 1$ . Berikut ini adalah hasil evaluasi dengan pendekatan beberapa segmen pada kurva tertutup  $C$

Tabel 1. Hasil Evaluasi untuk Diskritisasi 60 Segmen Garis  
 ( $N_a=N_c=10$  Segmen,  $N_b=40$  Segmen)

Titik $(x, y)$	BEM	Eksak	Error
(0.1,0.2)	0.30264838	0.30000000	0.00264838
(0.1,0.4)	0.50365765	0.50000000	0.00365765
(0.1,0.6)	0.70589320	0.70000000	0.00589320
(0.1,0.8)	0.91210950	0.90000000	0.01210950
(0.3,0.2)	0.50738187	0.50000000	0.00738187
(0.3,0.4)	0.70996030	0.70000000	0.00996030
(0.3,0.6)	0.91501156	0.90000000	0.01501156
(0.3,0.8)	1.12492110	1.10000000	0.02492110
(0.5,0.2)	0.71081631	0.70000000	0.01081631
(0.5,0.4)	0.91398945	0.90000000	0.01398945
(0.5,0.6)	1.11967479	1.10000000	0.01967479
(0.7,0.2)	0.91226401	0.90000000	0.01226401
(0.7,0.4)	1.11555415	1.10000000	0.01555415

Maksimal *Error* untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0249210958

Tabel 2. Hasil Evaluasi untuk Diskritisasi 120 Segmen Garis  
 ( $N_a=N_c=20$  Segmen,  $N_b=80$  Segmen)

Titik $(x, y)$	BEM	Eksak	Error
(0.1,0.2)	0.30128153	0.30000000	0.00128153
(0.1,0.4)	0.50182174	0.50000000	0.00182174
(0.1,0.6)	0.70295350	0.70000000	0.00295350
(0.1,0.8)	0.90610416	0.90000000	0.00610416
(0.3,0.2)	0.50365950	0.50000000	0.00365950
(0.3,0.4)	0.70496572	0.70000000	0.00496572
(0.3,0.6)	0.90751142	0.90000000	0.00751142
(0.3,0.8)	1.11248245	1.10000000	0.01248245
(0.5,0.2)	0.70536476	0.70000000	0.00536476
(0.5,0.4)	0.90697542	0.90000000	0.00697542
(0.5,0.6)	1.10984042	1.10000000	0.00984042
(0.7,0.2)	0.90604729	0.90000000	0.00604729
(0.7,0.4)	1.10776103	1.10000000	0.00776103

Maksimal *Error* untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0124824488

Tabel 3. Hasil Evaluasi untuk Diskritisasi 300 Segmen Garis  
( $N_a=N_c=50$  Segmen,  $N_b=200$  Segmen)

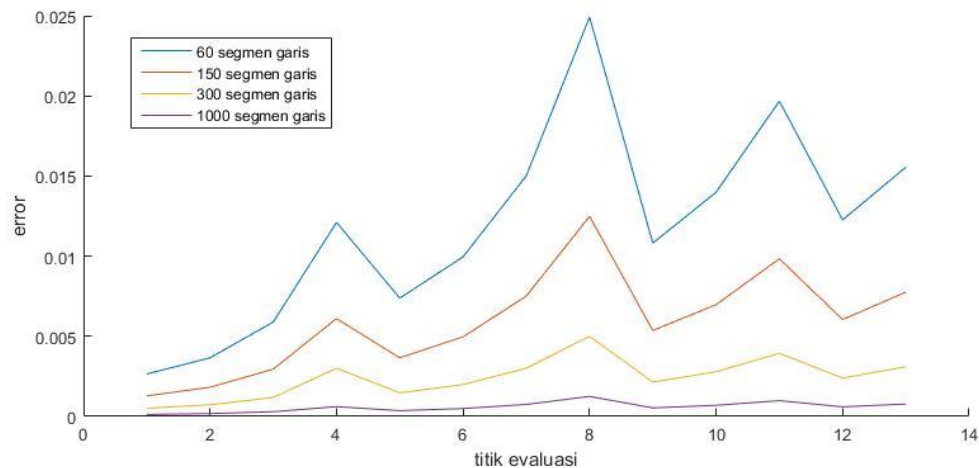
Titik ( $x, y$ )	BEM	Eksak	<i>Error</i>
(0.1,0.2)	0.30051405	0.30000000	0.00051405
(0.1,0.4)	0.50073029	0.50000000	0.00073029
(0.1,0.6)	0.70118350	0.70000000	0.00118350
(0.1,0.8)	0.90300869	0.90000000	0.00300869
(0.3,0.2)	0.50147204	0.50000000	0.00147204
(0.3,0.4)	0.70198940	0.70000000	0.00198940
(0.3,0.6)	0.90300869	0.90000000	0.00300869
(0.3,0.8)	1.10500023	1.10000000	0.00500023
(0.5,0.2)	0.70214287	0.70000000	0.00214287
(0.5,0.4)	0.90279055	0.90000000	0.00279055
(0.5,0.6)	1.10394065	1.10000000	0.00394065
(0.7,0.2)	0.90239668	0.90000000	0.00239668
(0.7,0.4)	1.10310255	1.10000000	0.00310255

Maksimal *Error* untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0050002309

Tabel 4. Hasil Evaluasi untuk Diskritisasi 1000 Segmen Garis  
( $N_a=N_c=100$  Segmen,  $N_b=800$  Segmen)

Titik ( $x, y$ )	BEM	Eksak	<i>Error</i>
(0.1,0.2)	0.30012416	0.30000000	0.00012416
(0.1,0.4)	0.50018157	0.50000000	0.00018157
(0.1,0.6)	0.70029568	0.70000000	0.00029568
(0.1,0.8)	0.90061219	0.90000000	0.00061219
(0.3,0.2)	0.50036364	0.50000000	0.00036364
(0.3,0.4)	0.70049569	0.70000000	0.00049569
(0.3,0.6)	0.90075169	0.90000000	0.00075169
(0.3,0.8)	1.10125169	1.10000000	0.00125169
(0.5,0.2)	0.70053511	0.70000000	0.00053511
(0.5,0.4)	0.90069684	0.90000000	0.00069684
(0.5,0.6)	1.10098383	1.10000000	0.00098383
(0.7,0.2)	0.90060279	0.90000000	0.00060279
(0.7,0.4)	1.10077634	1.10000000	0.00077634

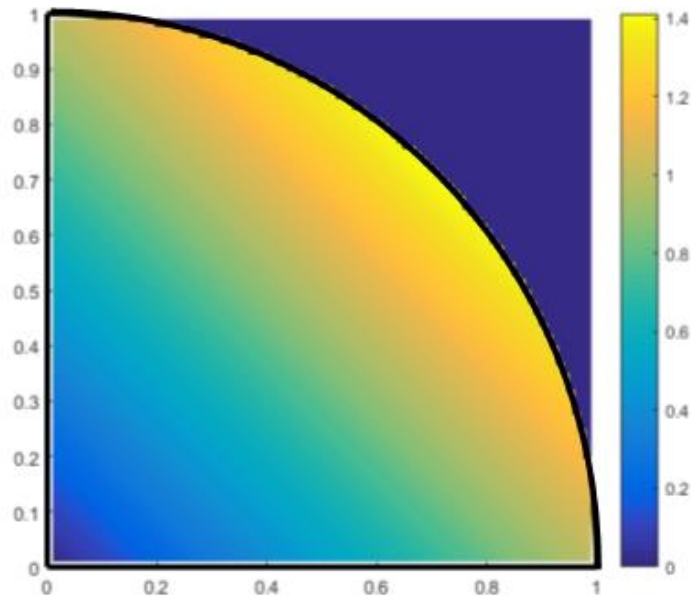
Maksimal *Error* untuk beberapa titik tersebut adalah 0.0012516897



Gambar 4. Grafik Error pada 13 Titik yang Dievaluasi

Tabel 1-4 merupakan hasil solusi numerik BEM dan solusi eksak disertai dengan nilai *Error*nya yang ditunjukkan pada Gambar 4 untuk persamaan Laplace syarat batas Dirichlet-Neumann domain seperempat lingkaran, di beberapa titik yang tersebar pada domain. Adapun jumlah segmen yang digunakan bervariasi, yaitu dari 60 segmen garis hingga 1000 segmen garis. Berdasarkan hasil evaluasi yang ditunjukkan oleh Tabel 1-4 menunjukkan bahwa solusi yang diperoleh menggunakan metode numerik BEM cukup akurat. Keakuratan tersebut dapat dilihat dari nilai galat/*Error* yang cukup kecil di setiap solusinya, dimana untuk 60 segmen garis diperoleh nilai maksimum *Error* sebesar 0.0249210958 hingga 1000 segmen garis diperoleh 0.0012516897.

Nilai galat terbesar hingga terkecil pada Gambar 4 yaitu ketika dipilih sebanyak 60, 120, 300, hingga 1000 segmen garis. Artinya dapat diambil kesimpulan bahwa semakin banyak segmen garis yang digunakan maka nilai *Error* yang diperoleh akan semakin kecil. Dengan kata lain jika jumlah segmen garis semakin banyak, solusi numerik dengan BEM yang diperoleh, akan lebih akurat dibandingkan dengan jumlah segmen yang sedikit. Selain itu dapat diperhatikan bahwa nilai *Error* terbesar untuk solusi numerik BEM persamaan Laplace domain lengkungan pada Tabel 1-4, selalu terletak pada koordinat  $(x, y) = (0.3, 0.8)$ . Berdasarkan hasil tersebut, mengindikasikan bahwa solusi numerik pada daerah domain yang paling dekat dengan kurva lengkungan akan menghasilkan *Error* yang lebih besar dibandingkan dengan solusi numerik di domain yang jauh dengan kurva lengkungan.



Gambar 5. Surface Plot Persamaan Panas Domain Lengkungan

Hasil surface plot Gambar 3 menunjukkan distribusi panas dari MSB (10) pada domain lengkungan bentuk seperempat lingkaran. Warna kuning hingga biru mengindikasikan bahwa distribusi nilai  $U(x,y)$  di setiap bagian pada domain berada pada rentang antara 1,4 hingga 0.

#### 4. Kesimpulan dan Saran

Metode Numerik Boundary Elemen Method (BEM) telah digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan panas dimensi dua syarat batas Dirichlet-Neumann domain lengkungan. Adapun langkah yang dilakukan yaitu melalui relasi resiprokal, formulasi integral melalui modifikasi domain, persamaan integral batas melalui diskritisasi batas domain, hingga terbentuk SPL dengan BEM dan diselesaikan menggunakan MATLAB.

Solusi numerik BEM bergantung pada jumlah segmen yang digunakan untuk mendekati kurva tertutup  $C$  atau batas domainnya. Berdasarkan hasil yang diperoleh, solusi numerik BEM lebih akurat jika jumlah segmen yang digunakan semakin banyak. Selain itu, Sebaiknya jumlah segmen pada batas domain kurva lengkungan lebih banyak dibandingkan pada kurva lurus, agar solusi numerik yang diperoleh, terutama yang paling dekat dengan kurva lengkungan, lebih akurat.

## Daftar Pustaka

- Gundalia, M. (2018). Estimation of infiltration rate based on complementary *Error* function peak for Ozat watershed in Gujarat. *International Journal of Hydrology*, 2(3)
- Humi, M. dan Miller, W. B. (1992). *Boundary Value Problems and Partial Differential Equation*, PWS-KENT, Boston.
- Katsikadelis, J. T. (2016). The BEM for Potential Problems in Two Dimensions. *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists*, 35–57.
- Keng C.A. (2008). Introducing the boundary element method with MATLAB. *Int. J. Math. Edu. Sci. and Technol.* 39(4): 505-519.
- Inayah, N., Manaqib, M., & Majid, W. N. (2021). Furrow irrigation infiltration in various soil types using dual reciprocity boundary element method. *AIP Conference Proceedings*, 2329(February). <https://doi.org/10.1063/5.0042682>
- Manaqib, M. (2017). Boundary Element Method untuk Menyelesaikan Masalah Syarat Batas Persamaan Laplace Dimensi Dua. *Jurnal Logika*. 7(2): 122-136
- Mendez, V., Campos, D. and Bartumeus, F. (2014). *Stochastic Foundations in Movement Ecology; Anomalous Diffusion, Front Propagation and Random Searches*. Springer-Verlag, Berlin.
- Solekhudin, I., & Sumardi. (2017). A DRBEM for steady infiltration from periodic semi-circular channels with two different types of roots distribution. *AIP Conference Proceedings*, 1848(May). <https://doi.org/10.1063/1.4983947>
- Solekhuddin, I. dan Zahroh, M. (2020). A Numerical Study of Unsteady Infiltration into Two-Layered Soil. *JP Journal of Heat and Mass Transfer* 20(2): 133 – 144.
- Yang, X.-J. and Gao, F. (2017) A New Technology for Solving Diffusion and Heat Equations, *Thermal Science*, 21, 133-140.
- Zahroh, M. dan Solekhuddin, I (2022). Root Water Uptake Process for Different Types of Soil in Unsteady Infiltration from Periodic Trapezoidal Channels. *Proceeding of International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*. Atlantis Press. 113-119.
- Zill, Dennis G, and Michael R Cullen. (2013). *Differential Equations with Boundary-Value Problems* 8th edition, Cengage Learning.
- Zahroh, M. (2021). Penentuan Jenis Fungsi Basis Radial Dalam Dual Reciprocity Boundary Element Method. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, Vol 21 pp 53-62.
- Zahroh, M. dan Solekhuddin, I. (2022). Root Water Uptake Process for Different Types of Soil in Unsteady Infiltration from Periodic Trapezoidal Channels. *Proceeding of International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*. Atlantis Press. 113-119