STUDI PARAMETRIK PEMBEBANAN DINAMIK DENGAN HEAVISIDE STEP FUNCTION DAN PENGARUHNYA TERHADAP RESPONS DINAMIK PELAT

Timmoty Tjahjadi[1] dan Sofia W. Alisjahbana[2]
[1]Program Studi Teknik Sipil, Universitas Tarumanagara
[2]Program Studi Teknik Sipil, Universitas Bakrie
Email: timmotytjahjadi21@gmail.com

Abstrak: Pelat merupakan salah satu elemen struktur yang berfungsi sebagai media penerima beban dan mendistribusikan beban tersebut ke struktur pendukungnya. Beban yang bekerja pada pelat dapat berupa beban terpusat, beban garis, dan area yang bersifat statik atau dinamik. Pemodelan beban dalam analisis pelat memiliki peranan yang penting, karena masing-masing model beban dapat menghasilkan respons pelat yang berbeda. Dalam analisis pelat perkerasan kaku, umumnya beban yang digunakan dalam pemodelan adalah beban titik yang bergerak. Pada kenyataanya, beban yang bekerja pada perkerasan dapat berupa beban titik, garis ataupun area yang bergerak. Pada penelitian ini, akan dilakukan studi mengenai respons dinamik pelat akibat beban garis yang bergerak. Fungsi gerak beban dalam pemodelan dapat berupa *dirac delta function* maupun *heaviside step function*. *Dirac delta function* digunakan untuk memodelkan beban titik yang bergerak, sedangkan *Heaviside step function* digunakan untuk memodelkan beban garis yang bergerak. Pergerakan beban dimodelkan bergerak secara tiba-tiba dalam kurun waktu tertentu. Studi parametrik ini menunjukkan hasil bahwa faktor panjang beban mempengaruhi respons dinamik pelat. Selain panjang beban, akan ditinjau beberapa parameter lain yang dapat mempengaruhi respons dinamik pelat, seperti kecepatan, kondisi tanah, dan tebal pelat. Respons dinamik yang akan diperoleh berupa lendutan dan tegangan.

Kata kunci: pelat, beban, perkerasan kaku, *Dirac Delta Function*, *Heaviside Step Function*, respons dinamik.

PARAMETRIC STUDY OF DYNAMIC LOADING WITH HEAVISIDE STEP FUNCTION AND THE EFFECTS ON DYNAMIC RESPONSE OF PLATES

Abstract: *A plate is a structural element that received loads and distribute them to the supporting structure. The loads acting on the plate can be point load, line load, or area load in either static or dynamic. Loads modeling in plate analysis has an important role, considering that each loading conditions results in different plate response. For rigid pavement analysis, it is common to model the loads as influence line, while in reality the applied loads were in forms of point load, line load, or moving area loads. This research focus on dynamic responses of the plate due to moving line loads. Equation of motions are modelled with Dirac delta function and Heaviside step function. Dirac delta function was used to model the moving point load, while Heaviside step function was used for moving line load. The loads were modelled to move suddenly in a range of time. Parametric study result shows that load length affects the dynamic plate response. Other parameters that could affects dynamic plate response such as velocity, soil condition, and plate thickness were studied. Dynamic responses were in forms of deflection and stress.*

Keywords: *plate, loading, rigid pavement, Dirac Delta Function, Heaviside Step Function, dynamic response.*

PENDAHULUAN

Topik analisis pelat pada perkerasan jalan mengundang banyak perhatian para peneliti, karena pemodelan analisis yang sesuai dengan kondisi sesungguhnya sangat mempengaruhi tingkat efisiensi dan keamanan struktur yang didesain. Kurekti (1992) meneliti bagaimana pengaruh dinamik pelat terhadap beban yang diskontinu. Dari penelitian tersebut ditemukan bahwa efek diskontinuitas beban menghasilkan tegangan yang besar pada bagian sambungan pelat. Pada tahun 2005, Sun meneliti respons dinamik pelat akibat beban bergerak harmonik. Beban harmonik dimodelkan sebagai beban titik dan garis, kemudian tumpuan pelat dimodelkan sebagai pondasi winkler. Dari penelitian tersebut ditemukan bahwa pemodelan beban titik dan garis menghasilkan respons pelat yang cukup signifikan. Pada tahun 2013, Idowu dkk meneliti respons dinamik pelat akibat beban garis bergerak diatas pondasi pasternak. Dari penelitian tersebut ditemukan bahwa modulus pondasi dapat mereduksi defleksi pada pelat dan area distribusi beban memiliki efek yang signifikan terhadap *displacement amplitude*.

Teori mengenai desain perkerasan kaku sudah berkembang sejak lama. Namun, banyak diantaranya yang menggunakan asumsi bahwa pelat perkerasan dan tanah bekerja secara terpisah. Pada kenyataanya, pelat perkerasan dan tanah saling berinteraksi ketika beban kendaraan yang bekerja ditransfer ke bagian tanah pendukung. Pada tahun 1867, Winkler mengusulkan pemodelan tanah sebagai pegas elastis, dan hubungan antara beban dan deformasi yang terjadi bersifat liniear. Namun kekurangan dari pemodelan ini adalah kontinuitas antar pegas tidak termodelkan, sehingga dapat terjadi deformasi yang ekstrim saat pelat menerima beban. Pasternak (1954) mengusulkan pemodelan tanah sebagai 2 lapisan. Lapisan atas merupakan lapisan isotropic yang memiliki kekakuan geser saja, sedangkan pada lapisan bawah terdapat lapisan pegas sama seperti model Winkler. Lapisan geser pada bagian atas berperan sebagai penghubung sehingga ada interaksi antar satu pegas dengan pegas lainnya dalam proses pembebanan vertikal. Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan diatas, perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk mengetahui efek dinamis pada pelat akibat beban bergerak dengan pemodelan pondasi Pasternak.

MODEL MATEMATIKA BEBAN

Beban transversal dinamik yang bekerja diatas pelat merupakan beban dinamik yang dapat dinyatakan sebagai:

$$P(x.y.t) = \frac{P_0}{r}(1 + \alpha \cos \omega_b \, t)H\left(x - vt + \frac{r}{2}\right)\delta(y - y_1) \quad (1)$$

Dalam persamaan (1) diatas:

H(x) = Heaviside step function
α = Koefisien jenis kendaraan = 0,5
$\delta(x)$ = Dirac delta function
v = kecepatan
ω_b = frekuensi beban dinamik
P_0 = beban
t = waktu
r = panjang beban

MODEL MATEMATIKA PELAT

Pelat yang akan ditinjau merupakan pelat ortotropik yang didukung oleh pondasi Pasternak. Persamaan diferensial pelat ortotropik yang teredam serta dibebani beban transversal dinamik p(x,y,t) yang bergerak dapat dinyatakan dengan:

$$D_x\left(\frac{\partial^4 w\,(x,y,t)}{\partial x^4}\right) + 2B\left(\frac{\partial^4 w\,(x,y,t)}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + D_y\left(\frac{\partial^4 w\,(x,y,t)}{\partial y^4}\right) + \gamma h \frac{\partial w\,(x,y,t)}{\partial t} + \rho h\left(\frac{\partial^2 w\,(x,y,t)}{\partial t^2}\right) + k_f w - G_s\left[\frac{\partial^2 w\,(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w\,(x,y,t)}{\partial y^2}\right] = p\,(x,y,t) \quad (2)$$

Dalam persamaan (2) diatas:

D_x : Kekakuan lentur (*flexural rigidity*) pelat sumbu x [Nm/m']

$$D_x = \frac{h^3}{12}\left(\frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y}\right) \quad (3)$$

D_y : Kekakuan lentur (*flexural rigidity*) pelat sumbu y [Nm/m']

ISSN: 1411-1292
E-ISSN: 2541-5484

$$D_y = \frac{h^3}{12}\left(\frac{E_y}{1-v_x v_y}\right) \quad (4)$$

B : Kekakuan puntir (*torsional rigidity*) pelat ortotropik [Nm/rad/m']

$$B = \sqrt{D_x\, D_y} \quad (5)$$

E_x : Modulus elastisitas pelat arah x [N/m^2]

E_y : Modulus elastisitas pelat arah y [N/m^2]

ρ : Massa jenis [kg/m^3]

γ : Koefisien redaman *viscous* ekuivalen pelat

h : Tebal pelat [m]

υ_x : *Poisson's ratio* arah x

υ_y : *Poisson's ratio* arah y

w(x,y,t) : Fungsi lendutan yang bergantung pada fungsi posisi dan waktu [m]

p(x,y,t) : Fungsi beban yang bergantung pada fungsi posisi dan waktu [N]

k_f : Kekakuan pegas Pondasi Pasternak [N/m^3]

G_s : Modulus geser Pondasi Pasternak [N/m]

PENYELESAIAN PERSAMAAN GERAK PELAT

Solusi umum persamaan gerak pelat ortotropik terdiri dari solusi homogen (w_h) getaran bebas dan solusi partikuler (w_p) getaran paksa yang dinyatakan sebagai berikut:

$$w(x,y,t) = w_h + w_p \quad (6)$$

Modified Bolotin Method digunakan untuk memperoleh solusi homogen (w_h), sedangkan solusi partikuler (w_p) menggunakan metode pemisahan variabel. Untuk mendapatkan solusi homogen, dilakukan análisis getaran bebas pelat dengan menggunakan asumsi – asumsi bahwa pelat merupakan pelat orthotropik, yang memiliki tumpuan semirigid pada keempat sisinya. Dengan demikian solusi homogen ,w_h , pelat persegi panjang orthotropik dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$w_h = w(x,y,t) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}[X_{pq}(x)Y_{pq}(y)]e^{-\xi\omega_{pq}t}(a_{0_{[pq]}}\, cos[\omega_D]\, t + b_{0_{[pq]}}\, sin[\omega_D]\, t) \quad (7)$$

Solusi partikuler dari persamaan gerak sistem sesuai dengan persamaan w_p, dapat diperoleh dengan cara menggunakan metode pemisahan variabel. Koefisien-koefisien yang terdapat pada solusi homogen sesuai dengan persamaan (7) diekspansikan sesuai dengan pengaruh beban luar (*excitation forces*) yang belum ada pada solusi homogen.

Solusi total sistem dinyatakan sebagai w = w_h + w_p di mana w_h adalah sesuai dengan persamaan (7) dan w_p adalah sesuai dengan persamaan (8) yang secara lengkap dapat dinyatakan sebagai:

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[X_{pq}(x)Y_{pq}(y)].$$

Beban dinamik yang bergerak berupa beban garis yang bergerak secara harmonis. Persamaan gerak beban garis dapat dinyatakan dengan menggunakan *heaviside step function* dengan fungsi seperti yang ditunjukkan pada persamaan (1). Bila persamaan (1) disubtitusikan ke dalam persamaan (9) akan diperoleh persamaan berikut:

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[X_{pq}(x)Y_{pq}(y)].$$

$$w_p = \int_0^t \left[\frac{P(x,y,t)}{\rho h Q_{pq}} \int_{x=0}^{a} X_{pq}(x)dx \int_{y=0}^{b} Y_{pq}(y)dy \left(\frac{e^{-\xi\omega_{pq}(t-\tau)}}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_{pq}} sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_{pq}(t-\tau)\right)\right)\right] d\tau \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} e^{-\xi\omega_{pq}}\left[a_{0pq}e^{(i\omega_{pq}\sqrt{1-\xi^2})(t-t_0)} b_{0pq}e^{(-i\omega_{pq}\sqrt{1-\xi^2})(t-t_0)}\right] + e^{-\xi\omega_{pq}t} \\ \int_0^t \frac{P(x,y,t)}{\rho.h.Q_{pq}} \int_{x=0}^{a} Y_{pq}(y)dy \left(\frac{e^{-\xi\omega_{pq}t}}{\sqrt{1-\xi^2\omega_{pq}}} sin\left(\sqrt{1-\xi^2\omega_{pq}}(t-\tau)\right)\right) d\tau \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} e^{-\xi\omega_{pq}}\left[a_{0pq}e^{(i\omega_{pq}\sqrt{1-\xi^2})(t-t_0)}b_{0pq}e^{(-i\omega_{pq}\sqrt{1-\xi^2})(t-t_0)}\right]+e^{-\xi\omega_{pq}t} \\ \int_0^t \frac{P_0(1+\alpha\cos\omega\tau)}{\rho.h.Q_{pq}} \int_{x=0}^{a} X_{pq}(x).H[x-(Vt+r)]dx \\ \int_{y=0}^{b} Y_{pq}(y).\left[y-\frac{b}{2}\right]dy.\left(\frac{e^{-\xi\omega_{pq}t}}{\sqrt{1-\xi^2\omega_{pq}}}sin\left(\sqrt{1-\xi^2\omega_{pq}}(t-\tau)\right)\right)d\tau \end{bmatrix} \quad (10)$$

Integral *spatial* dalam persamaan (10) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_{x=0}^{a} X_{pq}(x).H[x-(Vt+r)]dx \int_{y=0}^{b} Y_{pq}(y).\delta\left[y-\frac{b}{2}\right]dy = X_{pq}(Vt+r)Y_{pq}\left(\frac{b}{2}\right) \quad (11)$$

Karena fungsi gerak beban dalam arah $x = V_o t + r$ merupakan fungsi waktu, maka persamaan (10) menjadi:

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[X_{pq}(x)Y_{pq}(y)].$$

$$\begin{bmatrix} e^{-\xi\omega_{pq}}\left[a_{0pq}e^{(i\omega_{pq}\sqrt{1-\xi^2})(t-t_0)}b_{0pq}e^{(-i\omega_{pq}\sqrt{1-\xi^2})(t-t_0)}\right]+e^{-\xi\omega_{pq}t} \\ \int_0^t \frac{P_0(1+\alpha\cos\omega\tau).Y(y_0)}{\rho.h.Q_{pq}} \int_{x=0}^{a} X_{pq}[(Vt+r)] \\ \left(\frac{e^{-\xi\omega_{pq}t}}{\sqrt{1-\xi^2\omega_{pq}}}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2\omega_{pq}}(t-\tau)\right)\right)d\tau \end{bmatrix} \quad (12)$$

HASIL

Pelat yang akan dianalisis merupakan pelat perkerasan dengan data properti pelat sesuai dengan Tabel 1.

Tabel 1. *Material properties* pelat

Parameter	Notasi	Nilai	Dimensi Satuan
Panjang pelat (Sumbu x)	*a*	6	m
Lebar pelat (Sumbu y)	*b*	4	m
Tebal pelat	*h*	0,20	m
Massa jenis beton	ρ	2400	kg/m^3
Mutu material	*fc'*	3,5 x 10^7	N/m^2
Kekakuan lentur beton (Sumbu x)	D_x	1,89 x 10^7	N. m
Kekakuan lentur beton (Sumbu y)	D_y	2,04 x 10^7	N. m

ISSN: 1411-1292
E-ISSN: 2541-5484

Tabel 2. Kekakuan pegas (k_f) dan modulus geser (G_s) dari pondasi Pasternak

Konstanta	Satuan	Jenis Tanah		
		Lunak (*Soft*)	Sedang (*Medium*)	Keras (*Hard*)
k_f	$\frac{\text{MN}}{\text{m}^3}$	27,2	54,4	108,8
G_s	$\frac{\text{MN}}{\text{m}}$	9,52	19,04	38,08

Tabel 3. Data pembebanan

Parameter	Notasi	Nilai	Dimensi Satuan
Beban	P_o	80000	N
Kecepatan sudut beban	ω_b	150	$\frac{\text{rad}}{\text{det}}$
Panjang beban	r	2	m
Rentang waktu pergerakan beban secara tiba-tiba	t_1	0,01	detik
Koefisien beban	α	0,5	
Kecepatan gerak beban	v	60	$\frac{\text{km}}{\text{jam}}$
Rasio Redaman	ζ	5	%

Tabel 4 Nilai lendutan absolut maksimum (kasus 1&2) kondisi tanah lunak

V (km/h)	Lendutan Maksimum (mm)					
	r = 0.1 m	r = 0.5 m	r = 1 m	r = 2 m	r = 3 m	r = 4 m
50	4,240	4,240	4,227	4,372	4,455	4,294
60	5,042	5,042	5,028	5,155	5,228	5,063
70	5,826	5,824	5,810	5,911	5,974	5,815
80	5,271	5,269	5,258	5,310	5,352	5,261
90	4,621	4,619	4,610	4,637	4,612	4,612

Dalam penelitian ini, diambil beberapa kasus berdasarkan parameter yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya. Adapun penelitian ini akan dibagi menjadi 4 kasus sebagai berikut:

1. Kasus 1: Analisis pengaruh panjang beban dan panjang beban kritis pada pelat perkerasan
2. Kasus 2: Analisis pengaruh kecepatan gerak beban, dan kecepatan kritis pada pelat perkerasan.
3. Kasus 3: Analisis pengaruh kekakuan pegas elastis pondasi Pasternak terhadap lendutan pelat.
4. Kasus 4: Analisis pengaruh tebal pelat terhadap lendutan pelat

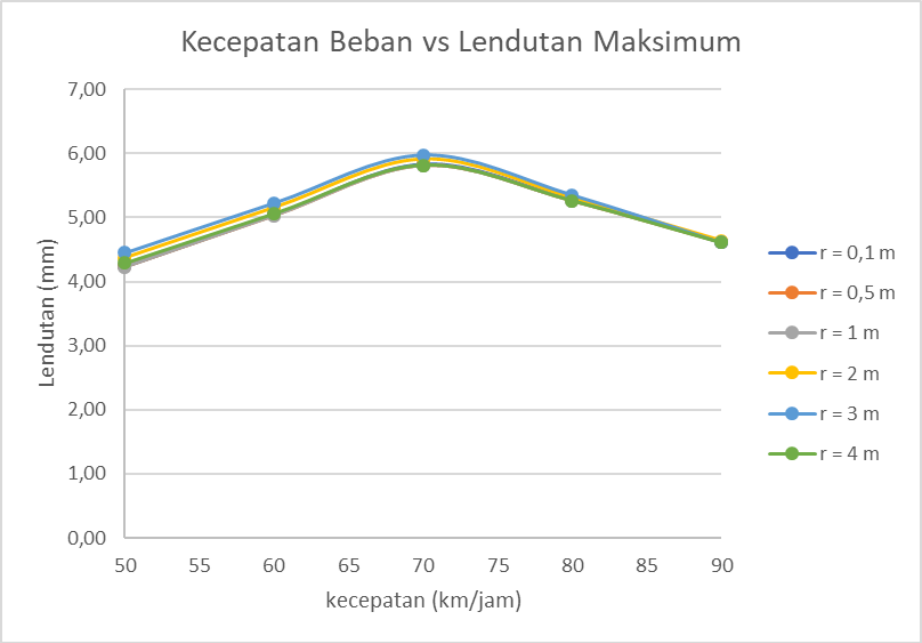
Lendutan absolut maksimum merupakan besarnya nilai lendutan terbesar yang timbul pada pelat. Nilai lendutan absolut maksimum pada kasus 1 dan kasus 2 dengan meninjau berbagai nilai r pada kecepatan 50–90 km/ jam dengan kondisi tanah lunak dapat dilihat pada Tabel 4, untuk kondisi tanah sedang pada Tabel 5, dan untuk tanah keras pada Tabel 6.

Tabel 5. Nilai lendutan absolut maksimum (kasus 1&2) kondisi tanah sedang

V (km/h)	Lendutan Maksimum (mm)					
	r = 0.1 m	r = 0.5 m	r = 1 m	r = 2 m	r = 3 m	r = 4 m
50	2,847	2,848	2,871	2,927	2,946	2,901
60	3,384	3,384	3,380	3,435	3,451	3,403
70	3,908	3,907	3,893	3,929	3,972	3,898
80	3,534	3,532	3,521	3,553	3,584	3,525
90	3,291	3,289	3,280	3,308	3,282	3,282

Tabel 6. Nilai lendutan absolut maksimum (kasus 1&2) kondisi tanah keras

V (km/h)	Lendutan Maksimum (mm)					
	r = 0.1 m	r = 0.5 m	r = 1 m	r = 2 m	r = 3 m	r = 4 m
50	2,391	2,403	2,413	2,426	2,431	2,420
60	2,847	2,858	2,868	2,880	2,885	2,874
70	3,293	3,304	3,314	3,326	3,329	3,318
80	2,984	2,992	3,000	3,009	3,011	3,002
90	2,784	2,791	2,797	2,805	2,798	2,798

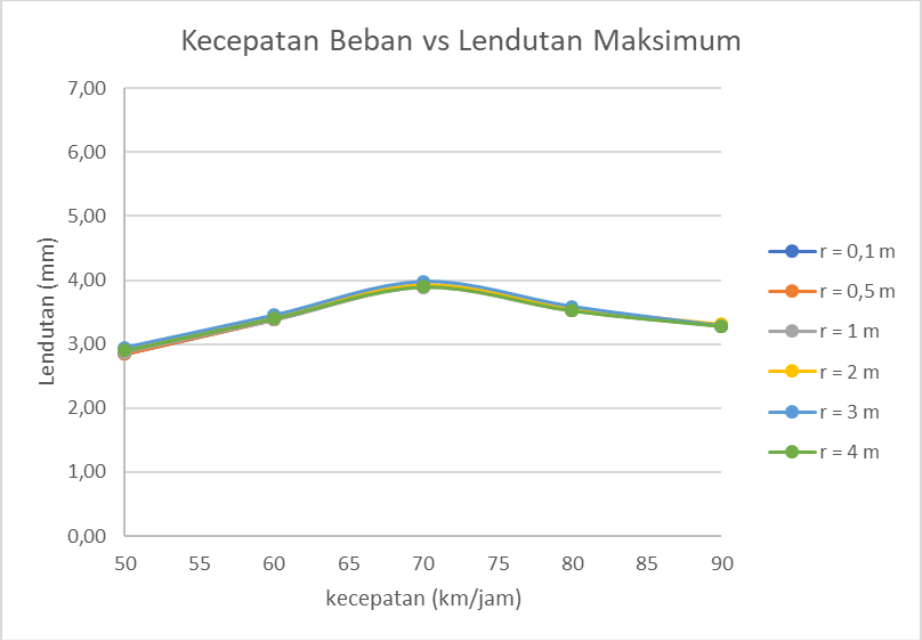


Gambar 1. Grafik kecepatan beban dan lendutan maksimum pada tanah lunak

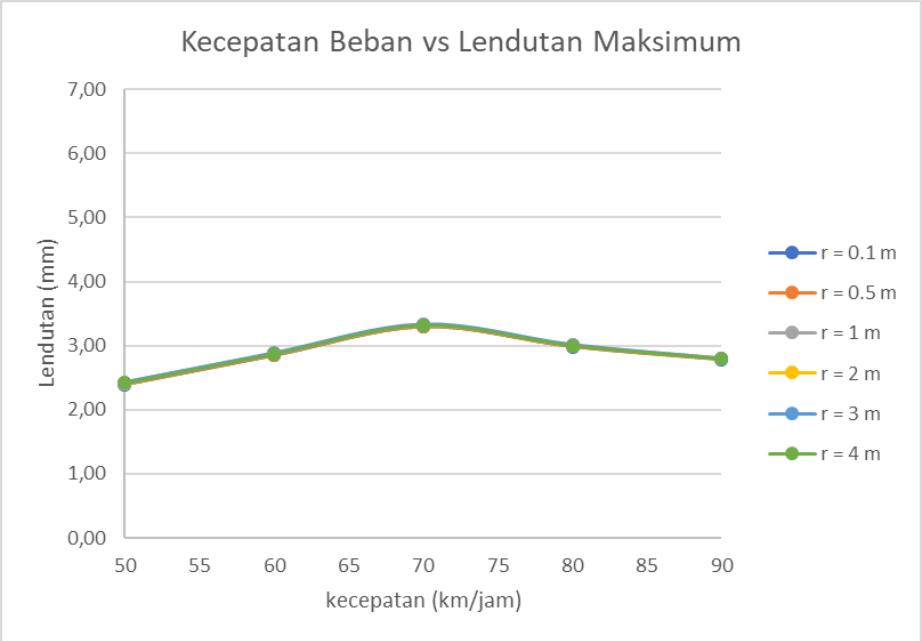
Berdasarkan tabel di atas, dapat dilihat bahwa secara umum beban dengan panjang 3m menimbulkan lendutan paling besar pada hampir seluruh kondisi kecepatan yang diuji coba. Sedangkan untuk kecepatan kritis pada hasil uji parametrik ini adalah 70 km/jam.

Grafik hubungan antara kecepatan gerak beban dan lendutan yang ditimbulkan pada pelat dengan kondisi tanah lunak dapat dilihat pada Gambar 1, tanah sedang pada Gambar 2, dan tanah keras pada Gambar 3.

ISSN: 1411-1292
E-ISSN: 2541-5484



Gambar 2. Grafik kecepatan beban dan lendutan maksimum pada tanah sedang

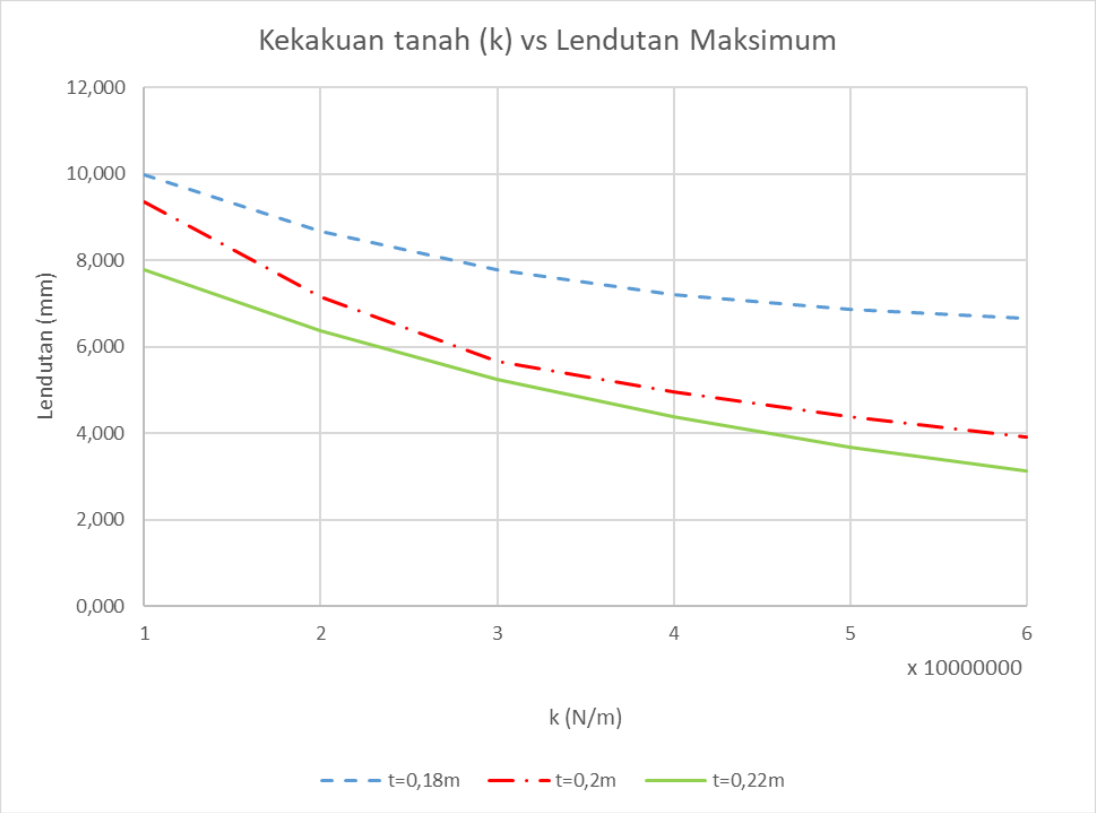


Gambar 3. Grafik kecepatan beban dan lendutan maksimum pada tanah keras

Dari Tabel 4, Tabel 5, Tabel 6, dan Gambar 1, Gambar 2, Gambar 3 dapat dilihat bahwa panjang beban kritis adalah 3m dan kecepatan kritis beban adalah 70 km/jam. Dengan menggunakan panjang dan kecepatan kritis tersebut, akan diteliti nilai lendutan maksimum pada kasus 3 dan 4.

Tabel 7 Nilai lendutan absolut maksimum (kasus 3&4)

Tebal pelat (m)	Lendutan Maksimum (mm)					
	k = $1x10^7$	k = $2x10^7$	k = $2x10^7$	k = $4x10^7$	k = $5x10^7$	k = $6x10^7$
0,18	9,97	8,66	7,79	7,22	6,86	6,65
0,20	9,36	7,17	5,66	4,95	4,38	3,91
0,22	7,79	6,37	5,26	4,38	3,68	3,12



Gambar 4 Grafik kekakuan tanah vs lendutan maksimum

SIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang dilakukan pada penelitian ini, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Pemodelan panjang beban mempengaruhi waktu tempuh beban saat bergerak dari satu sisi pelat ke sisi lainnya. Walaupun tidak memberikan pengaruh yang cukup signifikan, namun pemodelan panjang beban dapat mempengaruhi nilai lendutan maksimum pelat. Penambahan panjang beban dari 1m, menjadi 2m, 3m, dan 4m beruturut – turut menyebabkan peningkatan defleksi maksimum pada pelat sebesar 3.4%, 1.9%, dan menurun 3,6% pada kecepatan 50km/jam. Peningkatan defleksi ini menurun seiring dengan mengingkatnya kecepatan. Pada kecepatan 90km/jam, nilai defleksi maksimum pada masing-masing panjang beban menjadi relatif sama besar.
2. Kecepatan gerak beban mempengaruhi durasi beban saat bergerak melintasi pelat. Kecepatan kritis beban pada studi parametrik ini adalah 70 km/jam. Nilai ini berlaku untuk berbagai panjang beban dan berbagai kondisi tanah.
3. Perpindahan beban secara tiba-tiba dalam kurun waktu 0,01 detik menyebabkan timbulnya defleksi dinamik sebesar 5mm pada tanah lunak; 3,4mm pada tanah sedang, dan 2,9mm pada tanah keras. Hal ini menunjukkan bahwa kondisi tanah

ISSN: 1411-1292
E-ISSN: 2541-5484

dapat mempengaruhi nilai defleksi dinamik maksimum.

4. Pertambahan tebal pelat menyebabkan kekakuan pelat bertambah dan mereduksi lendutan yang terjadi. Penambahan tebal sebesar 20mm menyebabkan pengurangan defleksi maksimum rata-rata sebesar 20%.
5. Dengan meningkatkan koefisien kekakuan lapisan pendukung Pasternak k untuk nilai Gs konstan menyebabkan menurunnya nilai defleksi dinamik maksimum untuk berbagai nilai ketebalan pelat.
6. Tegangan maksimum yang ditimbulkan dari simulasi pembebanan yang dilakukan terjadi pada sisi-sisi pelat dengan nilai kecepatan kritis dan panjang beban kritis. Hal ini menunjukkan bahwa tegangan yang timbul pada sisi pelat harus dapat diantisipasi pada saat proses desain penulangan.

DAFTAR PUSTAKA

Alisjahbana, S.W. 2011. Dinamika Struktur Pelat II. B Press, Universitas Bakrie, Jakarta.

Bolotin, V. V. 1960. *The Edge Effect in The Oscillations of Elastic Shells.* PMM, Vol. 24, No. 5, 1960, Moscow, Rusia, pp. 831-843.

Idowu, A.S., Are, E.B., Joseph, K.M., and Daniel, S.K. 2013. *Dynamic Effects of Viscous Damping on Isotropic Rectangular Plates Resting on Pasternak Foundation, Subjected to Moving Loads.* International Journals of Mathematics and Statistical Studies. 1(2): 12-19.

Kurekti, A.R., Taheri, M.R., dan Ledesma, R.H. 1992. *Dynamic Analysis of Rigid Airport Pavements with Discontinuities.* Journal of Transportation Engineering. 118(3): 341-360.

Pasternak, P.L. 1954. *A New Method of Analysis of An Elastic Foundation by Means of Two Foundation*. Moscow.

Sun, L. 2005. *Dynamics of Plate Generated by Moving Harmonic Loads.* Journal of Applied Mechanics, 72: 772-777.

Winkler, E. 1867. *Die Lehre von Elastizitat und Festigkeit (on Elasticity and Fixity)*. Dominicus, Prague.