ALGORITMA NEWTON RAPHSON DENGAN FUNGSI NON-LINIER

I Wayan Santiyasa
Program Studi Teknik Informatika, Jurusan Ilmu Komputer
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Udayana
Email : santiyasa@ilkom.unud.ac.id

ABSTRAK

Studi tentang karakteristik fungsi non-liier dapat dilakukan secara eksperimental maupun teoritis. Salah satu bagian dari analisa teoritis adalah dengan melakukan komputasi. Untuk keperluan komputasi ini, metode numerik dapat dipakai dalam menyelesaikan persamaan-persamaan yang rumit, misalnya persamaan non-linear. Ada sejumlah metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-linear, adalah metode Newton-Raphson.

Kata Kunci : Numerik, Newton Raphson.

Abstact

Studies on the characteristics of non-linear function can be either experimental or theoretical. One part of the theoretical analysis is to perform computation. For this purpose computation, numerical methods can be used in the complete equations of the complex, such as non-linear equation. There are a number of numerical methods that can be used to complete the non-linear equation, is the Newton-Raphson method.

Key Word : Numeric, Newton Raphson.

PENDAHULUAN

Dalam permasalahan non-linier, terutama permasalahan yang mempunyai hubungan fungsi eksponensial dalam pembentukan polanya dapat dianalisis secara eksperimental maupun teoritis. Salah satu bagian dari analisa teoritis adalah dengan melakukan komputasi dengan metode numerik. Metode numerik dalam komputasi akan sangat membatu dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang rumit diselesaikan secara aritmatika. Metode numerik akan sangat membantu setiap penyelesaian permasalahan apabila secara matematis dapat dibentuk suatu pola hubungan antar variabel/parameter. Hal ini akan menjadi lebih baik jika pola hubungan yang terbentuk dapat dijabarkan dalam bentuk fungsi

Ada sejumlah metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-linear. Dua diantaranya adalah metode *Newton-Raphson* dan metode *Secant*. Pendekatan kedua metode yang berbeda ini dalam menyelesaikan persoalan yang sama, bisa dikomparasikan terhadap solusi akhir yang diperoleh. Kesesuaian nilai yang didapat dalam kedua metode ini, menunjukkan bahwa hasil perhitungan yang diperoleh adalah tepat.

Secara komputasi, disamping ketepatan nilai akhir dari suatu metode juga akan mempertimbangkan kecepatan iterasi dalam perolehan hasil akhir. Kombinasi antara ketepatan dan kecepatan iterasi dalam metode numerik merupakan hal yang penting dalam penyelesaian permasalahan secara komputasi.

PRINSIP-PRINSIP METODE NUMERIK

Tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang permasalahan yang terlebih dahulu diperhatikan apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan biasa.

Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan. Metode numerik ini berangkat dari pemikiran bahwa permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang dapat dipertanggung-jawabkan secara analitik. Metode numerik ini disajikan dalam bentuk algoritma-algoritma yang dapat dihitung secara cepat dan mudah. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis. Sehingga dasar pemikirannya tidak keluar jauh dari dasar pemikiran analitis, hanya saja pemakaian grafis dan teknik perhitungan yang mudah merupakan pertimbangan dalam pemakaian metode numerik. Mengingat bahwa algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah *iterasi* yaitu pengulangan proses perhitungan. Dengan kata lain perhitungan dalam metode numerik adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk terus-menerus diperoleh hasil yang main mendekati nilai penyelesaian eksak.

Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Titik pendekatan ke n+1 dituliskan dengan :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{F(x_n)}{F^1(x_n)}$$

Algoritma Metode Newton Raphson :

1. Definisikan fungsi f(x) dan f_1(x)
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung f(x_0) dan f_1(x_0)
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau |f(xi)| $e \geq$

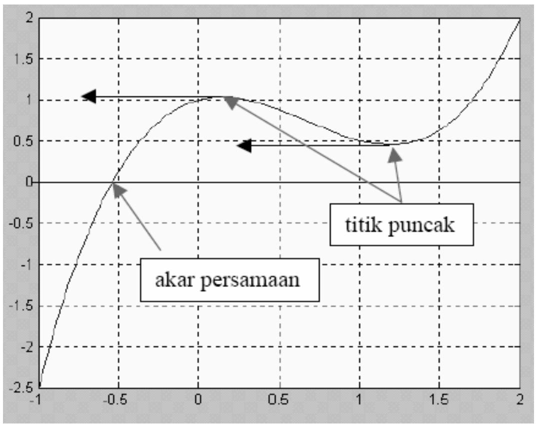
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^1(x_i)}$$

   Hitung f(x_i) dan f_1(x_i)

6.Akar persamaan adalah nilai xi yang terakhir diperoleh.

Permasalahan pada pemakaian metode Newton Raphson adalah :

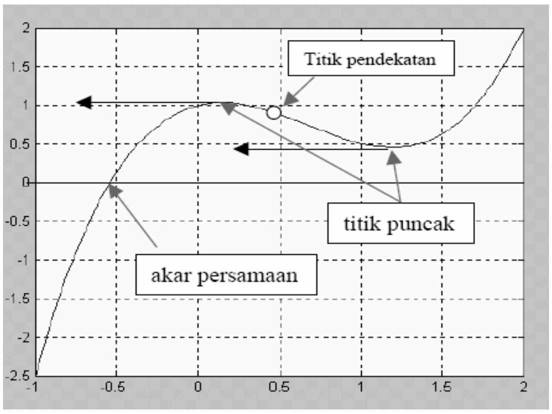
1. Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F^1(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F^1(x)}$ sama dengan nol, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 1. Pendekatan pada titik puncak

Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.

2. Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.



Gambar 3. Titik pendekatan diantara 2 titik puncak

Bila titik pendekatan berada pada dua tiitik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*). Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda. Untuk dapat menyelesaikan kedua permasalahan pada metode Newton Raphson ini, maka metode Newton Raphson perlu dimodifikasi dengan :

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit, $x_i = x_i \pm \delta$ dimana δadalah konstanta yang ditentukan dengan demikian $F^1(x_i) \neq 0$ dan metode Newton Raphson tetap dapat berjalan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode Newton Raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode Newton Raphson.

<u>Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel</u>

1. Definisikan fungsi F(x)
2. ambil range nilai x = [a,b], dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan torelansi error (e) dan masukkan iterasi n
4.Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :

$F(x_k) . F(x_k+1)<0$ maka $x_0 = x_k$

5. Hitung $F(x_0)$ dan $F_1(x_0)$
6.Bila *F(abs* $(F^1(x_0)))$ < e, maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx

$x_0 = x_0 + dx$

hitung $F(x_0)$ dan $F1(x_0)$
7. Untuk iterasi I= 1 s/d n atau |F(xi)| $e \geq$

$$x_1 = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$$

hitung $F(x_i)$ dan $F_1(xi)$
bila $|F_1(x_i)| < e$ maka

$x_i = x_i + dx$

hitung $F(x_i)$ dan $F_1(x_0)$
8.Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

Dengan menggunakan algoritma Newton Raphson yang dimodifikasikan diharapkan akar yang diperoleh sesuai dengan harapan dan bila terdapat lebih dari satu akar dalam range ditunjuk, akan ditampilkan semuanya.

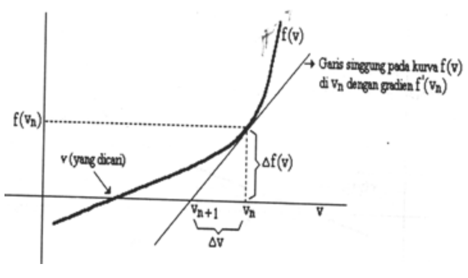
METODOLOGI KASUS

Metode perhitungan untuk menentukan tegangan kerja dioda

a. Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson yang dibahas di sini adalah metode untuk menentukan harga tegangan kerja dioda v pada fungsi f(v)= 0. Metode ini diperoleh dari penurunan secara geometis seperti

gambar 3.



Gambar 3. Metode Newton Raphson

Dari gambar diatas gradien garis singgung di v_n adalah :

$$m = f'(v_n)\ \frac{\Delta f(v)}{\Delta v} = \frac{f(v_n) - 0}{v_n - v_{n+1}} \quad \text{............................} \ (5)$$

atau

$f'(v_n) = \dfrac{f(v_n)}{v_n - v_{n+1}}$ .... (6)

Sehingga metode Newton Raphson untuk keperluan iterasi adalah :

$v_{n+1} = v_n - \dfrac{f(v_n)}{f'(v_n)}$ .... (7)

Iterasi dihentikan bila $|v_{n+1} - v_n| < \varepsilon$, dengan ε adalah tetapan yang harganya ditentukan.

b. Metode Secant

Permasalahn yang muncul dalam metode Newton-raphson adalah evaluasi turunan fungsi *f'(v).* Ada beberapa fungsi yang turunannya terlalu sulit dievaluasi terutama fungsi yang bentuknya rumit. Turunan fungsi ini dapat dihilangkan dengan cara mengganti nya dengan bentuk lain yang lebih mudah dievaluasi. Metode Newton Raphson yang diperbaiki ini dinamakan metode Secant. Gradien kurva dapat dihitung sebagai :

$$f'(v_n) = \frac{\Delta f(v)}{\Delta v} = \frac{f(v_n) - f(v_{n-1})}{v_n - v_{n-1}}$$

Persamaan di atas jika disubstitusikan ke persamaan sebelumnya akan memberikan metode Secant secara iterasi.

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)(v_n - v_{n-1})}{f(v_n) - f(v_{n-1})}$$

Iterasi dihentikan bila $|v_{n+1} - v_n| < \varepsilon$, dimana ε adalah tetapan yang harganya ditentukan.

Jika pada rangkaian diberikan nilai hambatan R = 50 Ω, arus saturasi Is = 10^{-9} ampere dan tegangan sumber searah V_B = 1,5 Volt, maka perhitungan tegangan kerja dioda untuk kedua metode Newton Raphson dan metode Secant ini dapat dilakukan.

Algoritma Program dan *Flow Chart*

Algoritma program yang dimaksud disini adalah generalisasi langkah-langkah prosedural untuk pembuatan sebuah program, Sedangkan flow chart merupakan implementasi yang khusus dari algoritma tersebut. Penyelesaian perhitungan tegangan kerja dioda menggunakan program C. Algoritma program dan flowchart masing-masing metode adalah sebagai berikut:

Metode *Newton-Raphson*

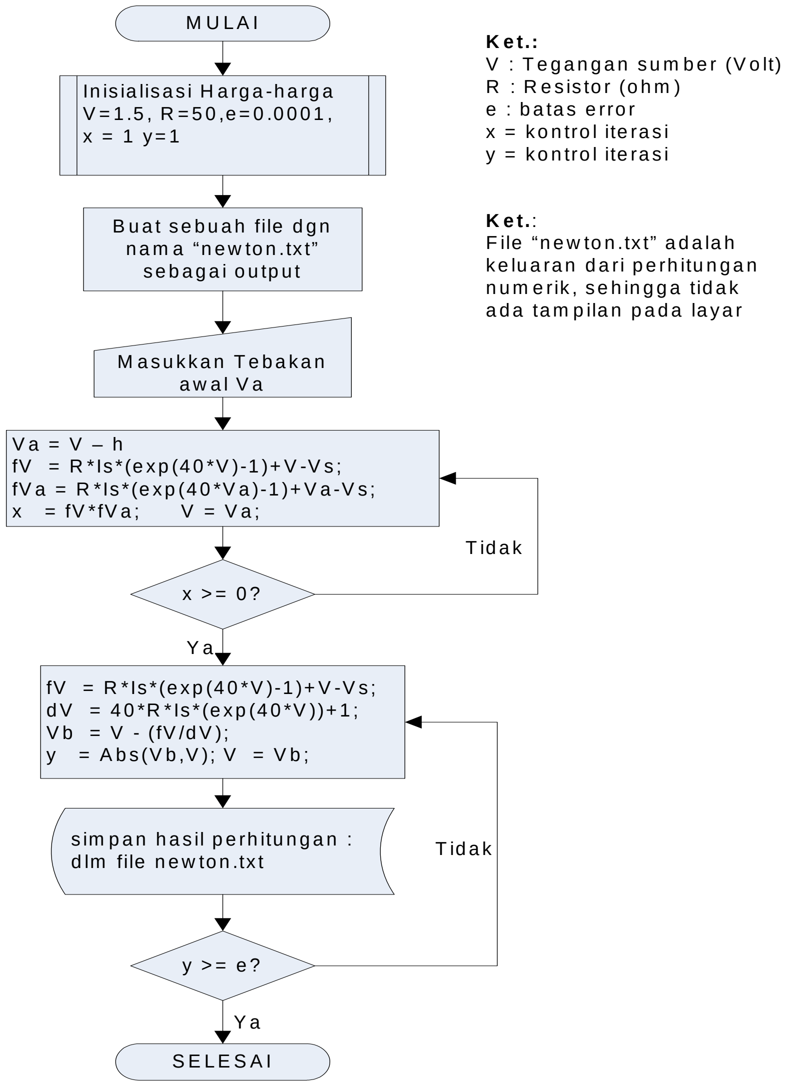
Pada metode ini algoritma programnya adalah :

1. Fungsi *f(v)* didefinisikan sebagai
   $f(v) = I_sR(e^{40v} - 1) + v - V_b$,
   dimana harga- harga R, I_s, V_b adalah bernilai tetap (konstan).
2. Fungsi *f(v)* diturunkan yaitu
   $f'(v) = 40\ I_sR(e^{40v} - 1) + 1$
3. Range nilai h digunakan sebagai peubah pendekatan nilai v_n.
4. Nilai toleransi error (ε) dimasukkan.
5. Tebakan awal v_T dimasukkan..

6. Dengan $v_k = v_T$ dan $v_{k+1} = (v_T - h)$, maka masing-masing nilai tersebut dimasukkan $f(v_k)$ dan $f(v_{k+1})$.
7. Jika nilai $f(v_k) \cdot f(v_{k+1}) \geq 0$, langkah 6 diulangi sampai diperoleh hasil perkalian $f(v_k) \cdot f(v_{k+1}) < 0$ (salah satu nilai $f(v)$ negatif).
8. Nilai v yang diperoleh dari langkah 7 digunakan untuk perhitungan nilai $f(v)$ dan $f'(v)$ sehingga bentuknya menjadi $f(v_k)$ dan $f'(v_{k+1})$.
9. Untuk iterasinya, digunakan persamaan : $v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$

   dimana nilai v_n yang dipakai adalah v_{k+1} yang diperoleh dalam langkah 7.
10. Hitung nilai $|v_{n+1} - v_n| < \varepsilon$, jika hasilnya belum memenuhi, ulangi langkah 9 dengan menggunakan nilai v_{n+1}. Sehingga bentuknya menjadi : $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{f(v_{n+1})}{f'(v_{n+1})}$
11. Bila langkah 10 sudah dipenuhi, maka diperoleh sebuah nilai v (tegangan kerja dioda) yang dicari.

1. Hitung nilai absolut $|v_n - v_{n-1}|$, jika nilai ini lebih besar atau sama dengan ($\geq$) nilai errornya (ε), maka masukkan nilai $v_{n+1} = v_n$ dan $v_{n-1} = v_n$, kemudian ulangi dari langkah 3 sampai dengan 6. Perulangan ini dihentikan saat nilai absolutnya kurang (<) dari nilai errornya.
2. Apabila langkah 6 sudah dilewati dimana nilai absolutnya kurang dari errornya, maka diperoleh nilai tegangan kerja dioda yang dicari.



Gambar 4. Flowchart Program metode Newton-Raphson

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pencarian nilai tegangan kerja dioda sama halnya dengan mencari titik-titik akar pada persamaan non-linear dimana diperlukan nilai awal untuk kedua metode ini. Apabila nilai v dibuat sedemikian rupa sehingga fungsi $f(v)$ mendekati atau sama dengan nol, maka pada titik itulah ditemukan tegangan kerja dioda.

Hasil pencarian menggunakan metode Newton-Raphson dengan berbagai nilai awal dapat dilihat pada tabel 1. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa iterasi terhenti pada iterasi ke 5. Besarnya tegangan kerja dioda pada titik ini adalah v = 0,422155 dengan nilai $f(0{,}422155)$ = 0,000017. Hasil ini telah memenuhi kedua persyaratan yang ditentukan pada persamaan. Penentuan nilai awal ditentukan secara coba-coba (*trial-error*) karena tidak ada aturan tertentu yang mengatur masalah ini.

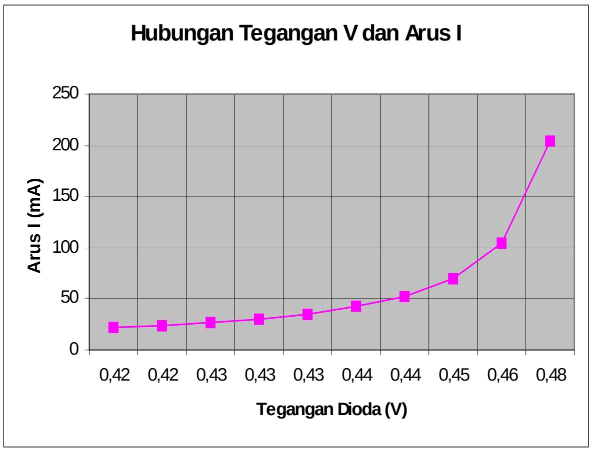
Tabel 1. Variasi nilai awal tegangan Dalam

Metode *Newton-Raphson*

V	0.5	0.9	1.0	1.2	3.0
v	0.422155	0.422155	0.422155	0.422155	0.422155
N	5	5	5	5	5
f(v)	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017

Karakteristik Tegangan (*v*) – Arus (i) Dioda

Karakteristik dioda yaitu bagaimana hubungan tegangan dan arus dioda dalam rangkaian dapat diketahui dengan melihat besarnya nilai tegangan kerja dioda (*v*). Tegangan dan arus dioda dapat dihitung dengan menggunakan metode Newton-Raphson (grafik 6) maupun metode secant (grafik 7). Perhitungan ini dilakukan untuk memperoleh besarnya nilai tegangan kerja dioda (*v*) yang mana akan menjadi masukan sebagaimana dijelaskan pada persamaan (2). Untuk mendapatkan tegangan kerja dioda yang bervariasi, ditentukan suatu nilai besaran tegangan sumber yang tetap, yaitu Vs = 1.5 V, sedang hambatan R diubah secara bertahap.



Gambar 5. Hubungan V-I dengan Newton-Raphson

Dari grafik di atas dapat dilihat bahwa perubahan tegangan kerja dioda (*v*) akan menyebabkan perubahan arus i yang naik secara eksponensial. Hal ini sesuai dengan karakteristik dari dioda.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari hasil perhitungan menggunakan metode *Newton-Raphson* ,dapat disimpulkan bahwa :

1. Penggunaan metode tersebut untuk mencari tegangan kerja dioda pada rangkaian dioda, selain penggunaan jenis metode yang dipakai, solusi akhir dari tegangan kerja dioda yang diperoleh juga akan dipengaruhi oleh nilai awal bagi metode ini.
2. Dengan mensimulasikan nilai hambatan (R) dan tegangan sumber (Vs) dalam pencarian hubungan tegangan (v) dan arus dioda (i), dapat diperoleh hasil bahwa

tegangan kerja dioda (v) hanya berubah sedikit yang berkisar antara 0,3 ~ 0,4 Volt, sedangkan grafik hubungan v-i ini merupakan fungsi eksponensial.

3. Apabila dioda dipasang dengan bias maju (seperti dalam rangkaian dioda ini), maka besarnya tegangan kerja dioda secara teoritis akan sangat kecil bila dibandingkan dengan tegangan hambatan (R). Sehingga dalam penerapan praktisnya, rangkaian dioda dianggap dihubung singkat (hambatan R dioda sangat kecil/dianggap nol).

Saran

Meskipun metode ini dapat digunakan untuk menghitung nilai tegangan kerja dioda, namun metode ini masih belum bisa memprediksi tegangan untuk semua jenis dioda (baik dari jenis *Germanium* maupun *Silikon*). Hipotesis yang mungkin bisa diusulkan untuk memperbaiki kelemahan ini adalah melakukan komputasi dengan pendekatan skala atom.

DAFTAR PUSTAKA

Chapra, Steven C dan Canale, Raymond P, 1994, "*Metode Numerik*", Jilid 1, Erlangga, Jakarta.

Neter, J and Wasserman, W., 1973, *"Applied Linear Statistical Models"* , John Willey& Sons, California.

Theraja, B.L., Theraja, A.K, 2004, "*A Text Book of Electrical Technology*", Vol. IV, S.Chand, New Delhi.