

Penyelesaian Persamaan Schrodinger Takgayut Waktu untuk Osilator Harmonik Menggunakan Metode Beda Hingga

Solution of Time-Independent Schrodinger Equation (TISE) by Using Finite Difference Approach

I Gusti Agung Widagda^{1*}, Nengah Artawan, I Gde Antha Kasmawan¹, I Wayan Gede Suharta¹, Ni Putu Yuni Nurmalasari¹

¹Program studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana, Kampus Bukit Jimbaran, Badung, Bali, Indonesia 80361

Email: *igawidagda@unud.ac.id; artawan@unud.ac.id; anthakas67@unud.ac.id; suharta@unud.ac.id; niputu.yuni@gmail.com

Received: 31th October 2024; Revised: 18th November 2024; Accepted: 30th November 2024

Abstrak – Penelitian ini menyelidiki penyelesaian numerik dari persamaan Schrodinger takgayut waktu untuk osilator harmonik kuantum dengan metode beda hingga. Osilator harmonik dinyatakan dengan potensial berbentuk fungsi kuadrat, adalah model dasar dalam mekanika kuantum karena aplikasinya yang luas mulai dari vibrasi molekul sampai teori medan kuantum. Persamaan Schrodinger bergantung waktu, adalah persamaan diferensial orde dua, yang biasanya menghadapi masalah jika diselesaikan secara analitik untuk potensial yang bentuknya kompleks. Metode beda hingga menjadi pilihan yang menarik, mengubah persamaan diferensial kontinu menjadi sebuah sistem persamaan linear yang dapat diselesaikan secara komputasi dengan kode program komputer. Dalam penelitian ini domain spasial dideskripsikan dan turunan kedua dihitung dengan beda sentral, mentransformasi TISE ke dalam matrik tridiagonal yang merepresentasikan Hamiltonian dari sistem. Dengan mencari penyelesaian dari masalah matrik eigenvalue ini, diperoleh fungsi gelombang dan energi. Hasil penyelidikan menunjukkan metode beda hingga mampu menyelesaikan TISE untuk osilator harmonik dengan efektif. Hasil yang diperoleh metode beda hingga sangat mendekati hasil analitik. Dari hasil regresi linear memperlihatkan secara berurutan nilai gradien (m), koefisien regresi (c) dan koefisien determinasi (R^2) mendekati nilai ideal yaitu: 1, 0 dan 1. Hasil uji z juga memperlihatkan nilai z hitung $< z$ kritis, mengindikasikan hasil perhitungan fungsi gelombang dan rapat kebolehjadian baik dengan metode beda hingga maupun analitik adalah sama dengan tingkat kepercayaan 95 persen.

Kata kunci: Persaman Schrodinger; osilator harmonic; beda hingga; uji z ; regresi linear

Abstract – This research investigates the numeric solution of the time-independent Schrödinger equation for the quantum harmonic oscillator by finite difference approach. The harmonic oscillator, described by a quadratic function potential, is a fundamental model in quantum mechanics due to its broad applications, ranging from molecular vibrations to quantum field theory. The time-independent Schrödinger equation is a second-order differential equation that typically poses challenges when solved analytically for complex potentials. The finite difference method become an attractive choice as it transforms the continuous differential equation into a system of linear equations that can be computationally solved through computer programming code. In this study, the spatial domain is discretized, and the second derivative is calculated by using central differences, transforming the TISE into a tridiagonal matrix representing Hamiltonian of system. By finding solutions to this matrix eigenvalue problem, wavefunctions and eigenvalues are obtained. The study results demonstrate that the finite difference approach effectively solves the TISE for the harmonic oscillator. The results obtained by using the finite difference method closely approximate the analytical results. The linear regression results show respectively that the gradient (β_1), regression coefficient (β_0) and coefficient of determination (R^2) approach ideal values of 1, 0, and 1. The z -test results also show that the value of calculated $z < z$ critical z , indicating that the wavefunction and probability density, whether estimated by using finite difference approach or analytical methods, are equivalent with confidence level of 95 percent.

Keywords: Schrodinger equation; harmonic oscillator; finite difference; z -test; linear regression.

1. Pendahuluan

Persamaan Schrodinger takgayut waktu (*Time Independent Schrodinger Equation* (TISE)) adalah persamaan dasar dalam mekanika kuantum yang dipakai untuk menjelaskan keadaan stasioner dari sistem kuantum. Dalam sistem satu dimensi, TISE bisa dituliskan sebagai: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. dengan \hbar adalah konstanta Plank tereduksi, m adalah massa partikel, $V(x)$ adalah energi potensial sebagai fungsi posisi x , E adalah energi total dan $\psi(x)$ adalah fungsi gelombang dari partikel.

Osilator harmonik dengan potensial yang diberikan dengan: $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ [1] berfungsi sebagai model prototipe dalam mekanika kuantum karena bentuknya yang sederhana dan aplikasinya yang luas. Banyak sistem fisika seperti: vibrasi molekul, phonon di dalam fisika zat padat dan beberapa pendekatan di bidang kuantum bisa dimodelkan dengan osilator harmonik. Penyelesaian analitik dari TISE untuk osilator harmonik menghasilkan penyelesaian dalam bentuk polinomial Hermite yang merepresentasikan tingkat energi yang diperbolehkan [2]. Namun pencarian penyelesaian analitik bisa menjadi tantangan atau masalah untuk sistem dimensi yang lebih tinggi. Konsekuensinya, metode numerik menjadi alat penting, khususnya dalam kasus dimana potensial lebih rumit atau penyelesaian eksak tidak mungkin dilakukan.

Metode beda hingga (*finite difference*) adalah sebuah metode numerik yang umum digunakan untuk menemukan penyelesaian persamaan differensial, termasuk TISE [3]. Metode ini meliputi pendiskretan domain ruang ke dalam sejumlah grid titik tertentu dan menyelesaikan turunan dengan rumus beda hingga. Dalam konteks TISE, turunan kedua dari fungsi gelombang dapat digantikan dengan persamaan diferensial, menghasilkan sistem persamaan aljabar yang mendekati persamaan diferensial. Metode beda hingga mengubah TISE ke dalam sebuah masalah matrik *eigen value*. Pendekatan diskret ini membolehkan perhitungan *eigen function* dan *eigen value* dengan menyelesaikan persamaan matrik hasil. Metode beda hingga berguna khususnya untuk mengkaji sistem dengan potensial yang berbeda dari bentuk dasarnya, karena metode ini bisa disesuaikan dengan mudah untuk setiap bentuk fungsi $V(x)$.

Penyelesaian TISE untuk osilator harmonik yang dihasilkan metode beda hingga perlu dibandingkan dengan hasil analitik. Uji statistik seperti model regresi linear, uji t dan uji diperlukan untuk meyakinkan secara kuantitatif apakah penyelesaian dari metode numerik sudah sama dengan penyelesaian metode analitik. Dengan uji z atau uji t kita dapat menyimpulkan bahwa penyelesaian dari kedua metode tersebut sudah sama atau berbeda dengan tingkat kepercayaan tertentu, misal: 90, 95 atau 99 persen [4, 5].

2. Landasan Teori

2.1 Penyelesaian Persamaan Schrodinger takgayut waktu untuk osilator harmonik

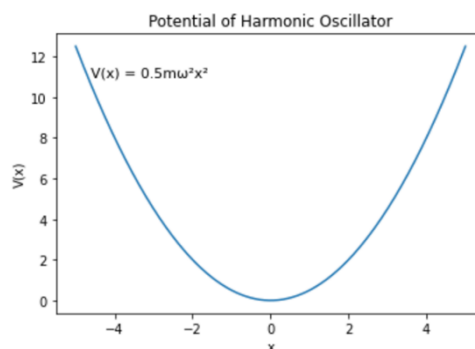
Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu (*time independent Schrodinger equation* (TISE) yaitu [6]:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

Untuk osilator harmonik, energi potensial $V(x)$ dinyatakan dengan [7]:

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad (2)$$

dengan $\omega = \sqrt{k/m}$ adalah frekuensi sudut dan x adalah posisi. Bentuk kurva $V(x)$ diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Potensial pada osilator harmonik.

Sehingga untuk osilator harmonik Persamaan (1) akan berubah menjadi:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (3)$$

atau bisa ditulis

$$\hat{H} \psi(x) = E \psi(x) \quad (4)$$

dimana \hat{H} adalah Hamiltonian untuk osilator harmonik:

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (5)$$

Penyelesaian dari Persamaan (3) diperoleh dengan mendefinisikan sebuah variabel tidak berdimensi yaitu:

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (6)$$

sehingga TISE berubah menjadi:

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} = \xi^2 \psi(\xi) - \frac{2E}{\hbar\omega} \psi(\xi) \quad (7)$$

misal $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ adalah besaran tidak berdimensi (*dimensionless quantity*), maka Persamaan (7) akan menjadi:

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} = \xi^2 \psi(\xi) - \epsilon \psi(\xi) \quad (8)$$

jika besar atau $\xi \rightarrow \infty$ maka Persamaan (8) bisa disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} \approx \xi^2 \psi(\xi) \quad (9)$$

Sehingga penyelesaian untuk $\xi \rightarrow \infty$

$$\psi(\xi) \sim e^{-\xi^2/2} \quad (10)$$

Sehingga kita mencari penyelesaian berbentuk:

$$\psi(\xi) \sim h(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (11)$$

dimana $h(\xi)$ adalah fungsi polinomial. Dengan mensubstitusikan Persamaan (11) ke dalam TISE (Persamaan (8)) akan memberikan persamaan differensial dalam $h(\xi)$

$$\frac{\partial^2 h(\xi)}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} + (\epsilon - 1)h(\xi) = 0 \quad (12)$$

Penyelesaian dari persamaan diferensial ini berbentuk polinomial yang disebut polinomial Hermite $H_n(x)$. Persamaan differensial Hermite biasanya ditulis dalam index n , yang menyatakan bilangan kuantum yang terkait dengan tingkat energi E_n :

$$H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \text{ atau } H_n \left(\frac{x}{x_0} \right) \quad (13)$$

Dimana $\frac{1}{x_0} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$. Sehingga penyelesaian dari TISE yaitu [8]:

$$\psi_n(x) = N_n H_n \left(\frac{x}{x_0} \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (14)$$

dimana N_n adalah konstanta normalisasi, H_n adalah polinomial Hermite dan n adalah bilangan quantum. Konstanta normalisasi adalah konstanta yang dipakai untuk menormalisasi fungsi gelombang $\psi_n(x)$ sehingga [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (15)$$

mengganti $\psi_n(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| N_n H_n \left(\frac{x}{x_0} \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \right|^2 dx = 1 \quad (16)$$

Persamaan ini bisa dijabarkan sebagai:

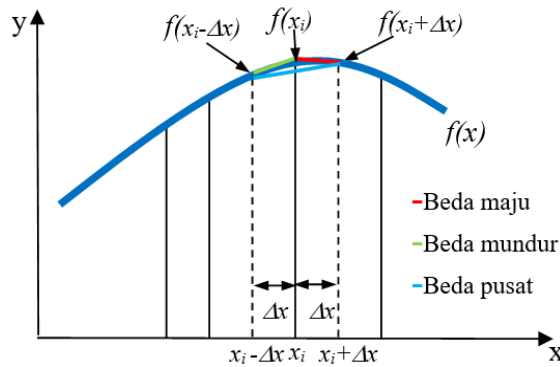
$$N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_n \left(\frac{x}{x_0} \right) \right]^2 e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} dx = 1 \quad (17)$$

Dari Persamaan (17) akan diperoleh konstanta normalisasi N_n [7]:

$$N_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (18)$$

2.2 Penyelesaian turunan dengan metode beda hingga (finite difference)

Turunan (*derivative*) dapat dihitung secara numerik dengan memakai metode Beda Hingga. Turunan pertama $f'(x)$ dari fungsi $f(x)$ pada x_i dapat ditentukan dengan 3 cara yaitu: beda maju, beda mundur dan beda sentral. Ilustrasi dari metode ini diperlihatkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Metode beda hingga.

Ketiga metode tersebut diuraikan secara rinci berikut ini [10]:

a) Beda maju (*forward difference*)

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+\Delta x}) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (19)$$

b) Beda mundur (*backward difference*)

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-\Delta x})}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (20)$$

c) Beda sentral (*central difference*)

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+\Delta x}) - f(x_{i-\Delta x})}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (21)$$

dimana $x_{i+\Delta x}$ dan $x_{i-\Delta x}$ dinyatakan dengan x_{i+1} dan x_{i-1} , secara berurutan. Jika kita menentukan turunan pertama dengan metode beda maju:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Maka turunan kedua $f''(x)$ dapat dinyatakan dengan:

$$f''(x_i) \approx \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{\Delta x} \quad (22)$$

Jika turunan pertama pada Persamaan (22) ditentukan dengan metode beda mundur maka akan menghasilkan:

$$f''(x_i) \approx \frac{\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1}))}{\Delta x}}{\Delta x} \quad (23)$$

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (24)$$

Persamaan (24) bisa dipakai untuk menyatakan operator turunan kedua dalam bentuk matrik tridiagonal yaitu:

$$\frac{d^2}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

2.3 Penyelesaian Persamaan Schrodinger Tidak Bergantung Waktu untuk Osilator Harmonik dengan metode Beda Hingga

Untuk menyelesaikan TISE pada osilator harmonik (Persamaan 3) dapat dilakukan dengan metode numerik yaitu metode beda hingga. Langkah-langkah penyelesaian TISE yaitu:

- 1) Menentukan (*define*) grid titik-titik x_i , dimana $i = 1, 2, \dots, N$. Jarak grid (*grid spacing*) adalah Δx , sehingga $x_i = x_{\min} + i\Delta x$
- 2) Turunan kedua ditentukan (*approximated*) dengan:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \approx \frac{\psi(x_{i+1})-2\psi(x_i)+\psi(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (26)$$

- 3) TISE dapat dinyatakan dengan matrik Hamiltonian yaitu:

$$H\psi(x) \approx E\psi(x) \quad (27)$$

Dimana matrik Hamiltonian H terdiri dari 2 bagian yaitu: energi kinetik dan energi potensial. Energi kinetik dinyatakan dengan turunan kedua (Persamaan 26). Sedangkan energi potensial ditentukan dengan $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Sehingga elemen-elemen dari matrik H yaitu:

$$H_{ii} = \frac{\hbar^2}{m\Delta x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2 \quad (28)$$

serta

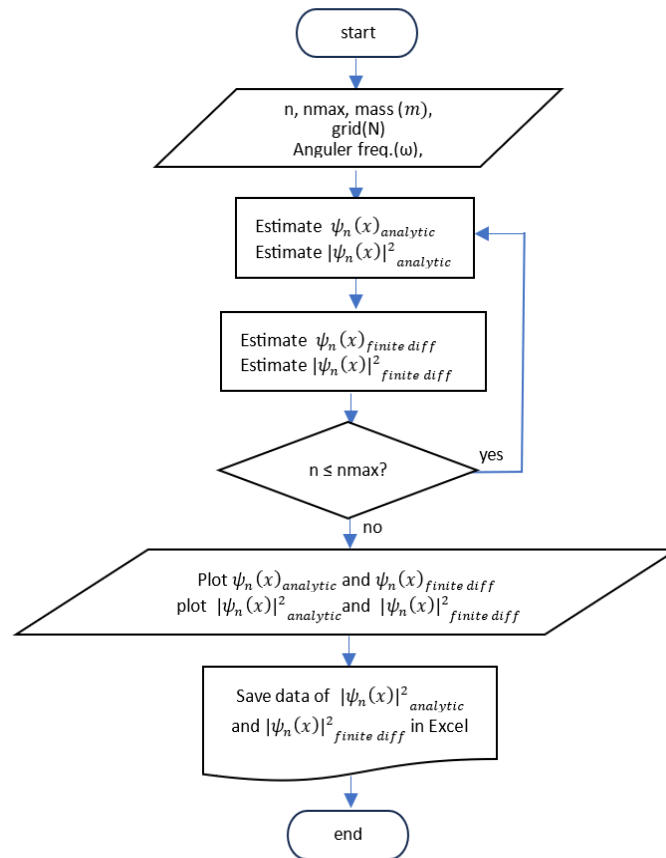
$$H_{i,i+1} = H_{i,i-1} = -\frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} \quad (29)$$

Sedangkan semua elemen lain sama dengan nol.

3. Metode Penelitian

3.1 Perancangan diagram alir (flow chart)

Gambar diagram alir dari metode beda hingga untuk penyelesaian TISE ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Diagram alir penyelesaian TISE dengan *Finite Difference*.

3.2 Pengimplementasian kode program (source code)

Langkah selanjutnya adalah pengimplementasian diagram alir ke dalam kode program. Bahasa pemrograman yang dipakai yaitu Python [11]. Komputer yang dipakai dalam penelitian ini yaitu laptop merk HP dengan spesifikasi: prosesor intel core i7, memori RAM 16 GB dan GPU 8 GB. Potongan kode program Python dari penyelesaian TISE dengan *finite difference* dituliskan di bawah ini.

```

****Analytic Solution ****
def analytic_solution(m,omega,hbar,x):
    # Define function for the wave function of the quantum harmonic oscillator
    def psi_n(x, n, m, omega):
        xi = cp.sqrt(m * omega / hbar) * x
        Hn = eval_hermite(n, cp.asnumpy(xi)) # Convert to NumPy for scipy function
        normalization = (m * omega / (cp.pi * hbar))**0.25 / cp.sqrt(2**n * np.math.factorial(n))
        psi = normalization * cp.array(Hn) * cp.exp(-xi**2 / 2)
        return psi
    ****Finite Difference Solution****
def finite_diff_solution(N):
    kinetic = cp.zeros((N, N))
    for i in range(1, N-1):
        kinetic[i, i] = -2.0
        kinetic[i, i-1] = 1.0
        kinetic[i, i+1] = 1.0
    kinetic *= -hbar**2 / (2 * m * dx**2)
    potential = cp.zeros((N, N))
    for i in range(N):
        potential[i, i] = 0.5 * m * omega**2 * x[i]**2
    H = kinetic + potential
    energies, wavefunctions = eigh(cp.asnumpy(H)) # Convert to NumPy for scipy function
    wavefunctions = cp.array(wavefunctions)
    
```

```

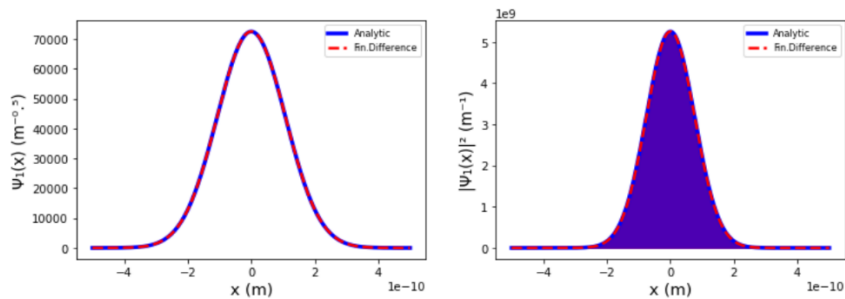
normalized_wavefunctions = cp.zeros_like(wavefunctions)
for n in range(6):
    norm = cp.sqrt(cp.sum(wavefunctions[:, n]**2) * dx)
    normalized_wavefunctions[:, n] = wavefunctions[:, n] / norm
return normalized_wavefunctions
*****Plot Psi and |Psi|^2*****
def plot_psi(psi_anal,psi_fin_diff):
    ...
    for n in range(nmax):
        ...
        plt.plot(x, psi_anal[n], 'b', linewidth='3.5',label='Analytic')
        plt.plot(x, psi_fin_diff[:, n+1], '--r',linewidth='2.5',label='Fin.Difference')
        plt.plot(x, psi_anal[n]**2, 'b', linewidth='3.5',label='Analytic')
        plt.plot(x, psi_fin_diff[:, n+1]**2, '--r',linewidth='2.5',label='Fin.Difference')
    ...
return
*****Saving data into Excel*****
def save_data(psi_anal,normalized_wavefunctions):
    for n in range(nmax):
        ...
        df1 = pd.DataFrame(psi_anal[n]**2,psi_fin_diff[:, n+1]**2) #(y,x)
        df1.to_excel(excel_writer = "data_psi(x)_kuadrat"+str(n)+".xlsx",startrow=0, header=False)
    return
*****Main Program*****
psi_anal=analytic_solution(m,omega,hbar,x)
psi_fin_diff=finit_diff_solution(N)
plot_psi(psi_anal,psi_fin_diff)
save_data(psi_anal,psi_fin_diff)

```

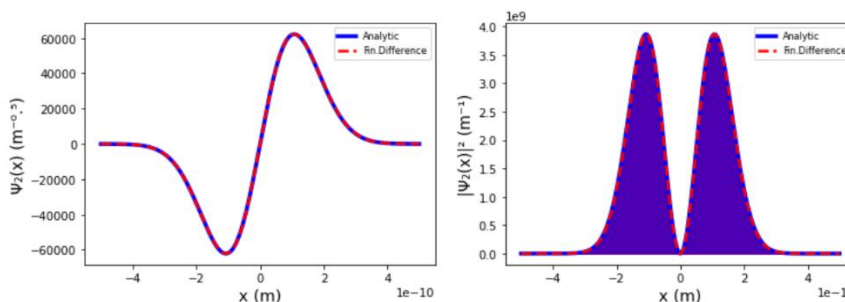
4. Hasil Dan Pembahasan

4.1 Hasil

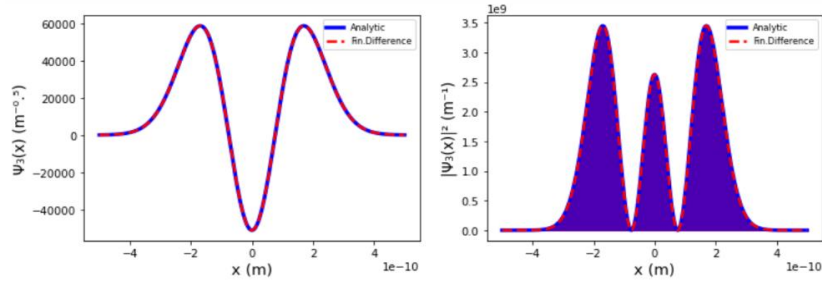
Jika ditentukan massa partikel $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, frekuensi angular (ω) = $1.0 \cdot 10^{16}$ Hz dan konstanta Plank tereduksi (\hbar) = $1.05 \cdot 10^{-34}$ Js dan jumlah grid (N) = 1000, maka hasil dari program Penyelesaian TISE dengan metode *Finite Difference* untuk $n = 1, 2, \dots, 5$, diperlihatkan pada Gambar 4 sampai 8.



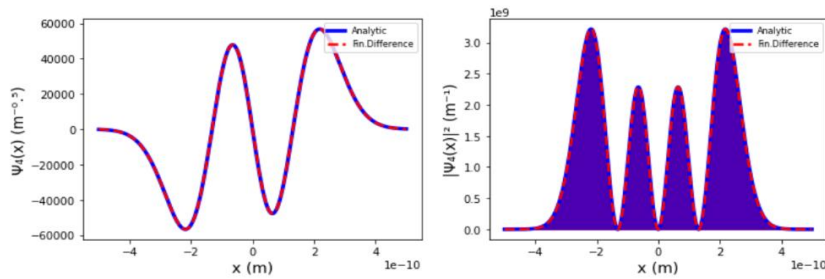
Gambar 4. Penyelesaian TISE osilator harmonik untuk $\psi_1(x)$ dan $|\psi_1(x)|^2$.



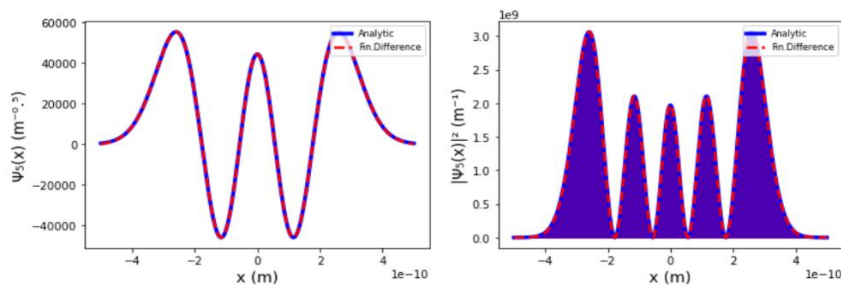
Gambar 5. Penyelesaian TISE osilator harmonik untuk $\psi_2(x)$ dan $|\psi_2(x)|^2$.



Gambar 6. Penyelesaian TISE osilator harmonik untuk $\psi_3(x)$ dan $|\psi_3(x)|^2$.



Gambar 7. Penyelesaian TISE osilator harmonik untuk $\psi_4(x)$ dan $|\psi_4(x)|^2$.



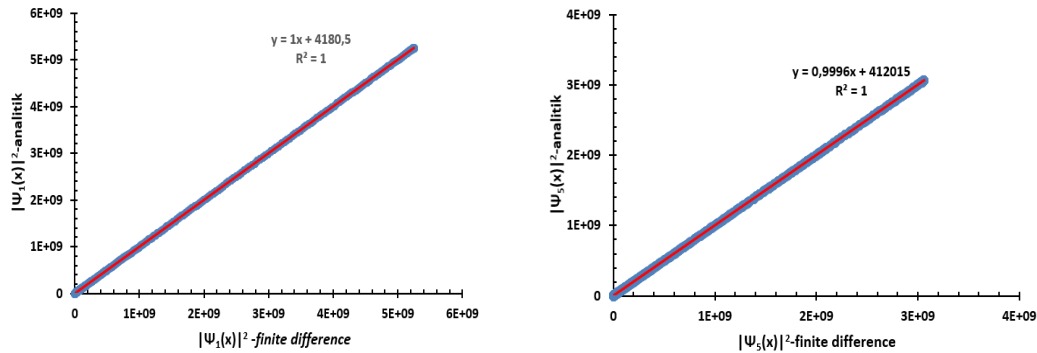
Gambar 8. Penyelesaian TISE osilator harmonik untuk $\psi_5(x)$ dan $|\psi_5(x)|^2$.

Dari hasil *run* program TISE juga dihasilkan *file excel* untuk menyimpan data kerapatan kemungkinan $|\psi_n(x)|^2$ dari $n = 1, 2, \dots, 5$, baik penyelesaian secara analitik maupun *finite difference*. Kurva warna biru adalah penyelesaian analitik dan kurva garis putus-putus warna merah adalah penyelesaian metode *finite difference*. Data rapat kebolehjadian untuk $n = 1$ ($|\psi_1(x)|^2$) diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Data $|\psi_1(x)|^2$ analitik dan *finite difference*.

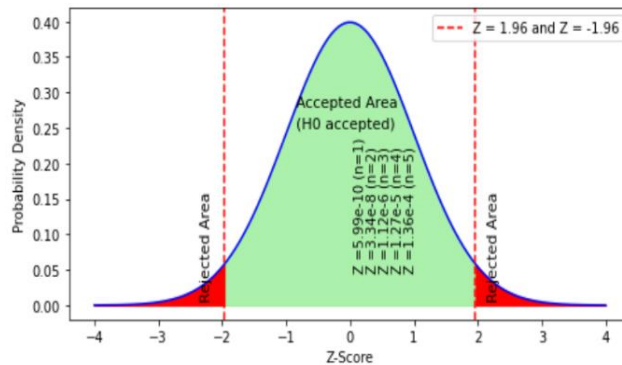
i	x_i	$ \psi_1(x) ^2$ -analitik	$ \psi_1(x) ^2$ -finite difference
1	-0,000000000500	2,044736435	0,015984255110
2	-0,000000000499	2,229852586	0,000000051484
3	-0,000000000498	2,431305553	0,015869611160
4	-0,000000000497	2,650498131	0,063705953776
⋮	⋮	⋮	⋮
997	0,000000000497	2,650498131399	0,132607991082
998	0,000000000498	2,431305552938	0,058762344457
999	0,000000000499	2,229852586002	0,014664366644
1000	0,000000000500	2,044736434960	0,000000000000

Dari data $|\psi_n(x)|^2$ baik yang dihasilkan oleh metode analitik maupun *finite difference* selanjutnya dihitung regresi linear. Hasil regresi linear untuk $|\psi_1(x)|^2$ dan $|\psi_5(x)|^2$ bisa dilihat pada Gambar 9.



Gambar 9. Regresi linear $|\psi_1(x)|^2$ dan $|\psi_5(x)|^2$.

Hasil uji z untuk $|\psi_n(x)|^2$ untuk n dari 1 sampai 5 diperlihatkan pada Gambar 10.



Gambar 10. Hasil uji z untuk $|\psi_n(x)|^2$.

4.2 Pembahasan

Pada Gambar 4 sampai 8 terlihat bahwa kurva $\psi_1(x)$ sampai $\psi_5(x)$ hasil metode analitik (biru) dan metode *finite difference* (merah) semuanya berimpit. Demikian juga $|\psi_1(x)|^2$ sampai $|\psi_5(x)|^2$. Secara kualitatif, hal ini mengindikasikan hasil perhitungan dari kedua metode hampir sama. Secara kuantitatif, kesamaan hasil perhitungan metode *finite difference* dan analitik ini didukung oleh hasil regresi linear yang diperlihatkan Gambar 9, dimana nilai gradien (β_1), *intercept* (β_0) dan koefisien determinasi (R^2) mendekati nilai ideal yaitu: 1, 0 dan 1, secara berurutan [12]. Persamaan umum garis regresi linear dinyatakan dengan $y = \beta_1x + \beta_0$, dimana β_1 adalah gradien dan β_0 adalah koefisien regresi atau *intercept* [13]. Gambar 9 (kiri) memperlihatkan regresi linear untuk $|\psi_1(x)|^2$ diperoleh nilai gradien = 1, *intercept* = 4180,5 dan $R^2 = 1$. Sedangkan pada Gambar 9 (kanan) diperlihatkan hasil regresi linear $|\psi_5(x)|^2$ yaitu nilai $\beta_1 = 1$, $\beta_0 = 412015$ dan $R^2 = 1$. Kesamaan hasil perhitungan dari kedua metode juga didukung oleh hasil uji z seperti diperlihatkan pada Gambar 10. Semua nilai z hitung terletak pada daerah yang diterima berwarna hijau (*accepted area*). Misal untuk $n = 1$, nilai z hitung adalah $5,9 \cdot 10^{-10}$ sedangkan nilai z kritis adalah 1,96 (*significance level* ($\alpha = 0,05$) atau tingkat kepercayaan = 95%). Oleh karena z hitung < z kritis maka dapat disimpulkan hasil perhitungan $|\psi_1(x)|^2$ dengan metode analitik sama dengan hasil perhitungan metode *finite difference*, dengan tingkat kepercayaan 95 persen. Atau bisa dikatakan, 95 persen kita bisa yakin bahwa hasil perhitungan dari kedua metode adalah sama.

5. Kesimpulan

Metode *finite difference* bisa dipakai untuk mencari penyelesaian TISE untuk osilator harmonik. Penyelesaian TISE metode *finite difference* sangat mendekati metode analitik. Hal ini didukung oleh hasil regresi linear dan uji z. Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk membandingkan metode *finite difference* ini dengan metode analitik berbasis operator aljabar yaitu: anihilasi dan kreasi.

Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Bapak Kepala Laboratorium Fisika Komputasi, Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Udayana, Bali yang sudah memberikan fasilitas dalam penelitian ini. Serta teman-teman dosen Program Studi Fisika yang telah memberikan saran dan pendapat terkait dengan penelitian ini.

Pustaka

- [1] Shankar, R., 1994, Principles of Quantum Mechanics, second edition, Plenum Press, New York, USA.
- [2] Boas, Mary L., 2006, Mathematical Methods in the Physical Sciences, John Willey and Sons, Inc., USA.
- [3] Izaac, J., Wang, J., 2018, Computational Quantum Mechanics, Springer Nature, Switzerland.
- [4] Bramer, M., 2020, Principles of Data Mining, Springer-Verlag Ltd, London
- [5] Ott, R.L., Longnecker, M., 2016, An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis, Sixth edition, Cengage Learning, Boston, USA.
- [6] Weinberg, S., 2021, Foundations of Modern Physics, Cambridge University Press, New York, USA.
- [7] Beiser, Arthur, 2003, Concept of Modern Physics, sixth edition, McGraw-Hill Company, New York, USA.
- [8] Griffiths, David J., Schroeter, Darrell F., 2018, Introduction to Quantum Mechanics, Cambridge University Press, New York, USA.
- [9] Krane, Kenneth S., 2020, Modern Physics, fourth edition, John Willey and Sons, Inc., New Jersey, USA.
- [10] Burden, Richard L., Faires J.D, Burden A.M, Numerical Analysis, Cengage Learning, Boston, USA.
- [11] Pine, David J., 2019, Introduction to Python for Science and Engineering, CRC Press, New York, USA.
- [12] Widagda, IGA, Trisnawati, NLP, Suharta IWG, Perancangan Aplikasi Metode Newton-Rapshon Termodifikasi dalam Pembuktian Panjang Gelombang Maksimum pada Hukum Pergeseran Wien, Buletin Fisika, vol.24, no.2, 2023
- [13] Montgomery, Douglas C., Peck, Elizabeth A., Vining, G. Geoffrey, 2021, Introduction to Linear Regression Analysis, sixth edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, USA.