

KONVERGENSI NUMERIK FLUKS RUSANOV DAN HLL E PADA METODE BEDA VOLUME UNTUK MENGHAMPIRI PERSAMAAN AIR DANGKAL

Eko Meidianto N. R.^{1,*}, P. H. Gunawan², A. Atiqi Rohmawati³

¹Prodi Ilmu Komputasi, Fakultas Informatika – Universitas Telkom [Email: ekomeidianto@student.telkomuniversity.ac.id]

²Prodi Ilmu Komputasi, Fakultas Informatika – Universitas Telkom [Email: phgunawan@telkomuniversity.ac.id]

³Prodi Ilmu Komputasi, Fakultas Informatika – Universitas Telkom [Email: aniqatitqi@telkomuniversity.ac.id]

*Corresponding Author

ABSTRACT

This one-dimensional simulation is performed to find the convergence of different fluxes on the water wave using shallow water equation. There are two cases where the topography is flat and not flat. The water level and grid of each simulation are made differently for each case, so that the water waves that occur can be analyzed. Many methods can be used to approximate the shallow water equation, one of the most used is the finite volume method. The finite volume method offers several numerical solutions for approximate shallow water equation, including Rusanov and HLL E. The derivation result of the numerical solution is used to approximate the shallow water equation. Differences in numerical and topographic solutions produce different waves. On flat topography, the Rusanov flux has an average error 0.06403 and HLL E flux with an average error 0.06163. While the topography is not flat, the rusanov flux has a 1.63250 error and the HLL E flux has an error of 1.56960.

Keywords: shallow water equation, finite volume method, convergence, topography, rusanov, harten-lax-van leer-einfeldt.

1 PENDAHULUAN

Jurnal ini fokus pada simulasi gelombang air dan mencari konvergensi dari dua fluks numerik yang berbeda. Persamaan yang digunakan adalah persamaan air dangkal atau sering disebut *Shallow Water Equation* (SWE). Persamaan air dangkal berdasar pada hukum konservasi dan sistem hiperbolik (Gallouët et al., 2003). Beberapa metode untuk menghitung hukum konservasi telah diselidiki. Kemudian diusulkanlah metode *finite volume*, khususnya skema keseimbangan (*well-balanced scheme*). Kemudian skema keseimbangan ini telah diperluas ke persamaan air dangkal dengan topografi (LeRoux, 1998; Bon, 1997) dan gesekan Chinnayya and LeRoux (1999) didalamnya.

Beberapa solusi fluks numerik telah dipaparkan seperti *Riemann flux*, *Lax–Friedrichs approximation*, *Roe scheme*, *Engquist–Osher*, *Harten–Lax–van Leer (HLL E) flux functions*, atau *Rusanov flux* (Bassi and Rebay, 1997). Namun jurnal ini akan memaparkan perhitungan secara numerik dengan metode beda volume menggunakan fluks *Rusanov* dan *Harten-Lax-van Leer-Einfeldt* (HLL E) untuk mendekati nilai dari persamaan air dangkal. Persamaan air dangkal juga terkenal dengan nama *Saint-Venant* yang merupakan sistem dua persamaan simultan yang terdiri atas hukum kekekalan momentum dan hukum kekekalan massa (Doyen and Gunawan, 2014; Mungkasi, 2011).

Batasan-batasan yang dikerjakan dalam jurnal ini antara lain, topografi dibuat dengan

dua kondisi yaitu datar dan tidak datar, ketinggian permukaan air juga dibuat berbeda untuk setiap topografi, kecepatan awal air diatur sama, dan batas (*boundary*) kanan dan kiri untuk setiap simulasi menggunakan *dirichlet boundary*. Simulasi ini dibangun untuk membandingkan hasil perhitungan solusi numerik untuk mendekati solusi *reference* dari persamaan air dangkal (SWE). Selain itu, dilakukan perhitungan konvergensi antara solusi numerik yang diterapkan terhadap solusi *reference*. Solusi *reference* diperoleh dari hasil simulasi menggunakan fluks *HLLC* dengan pembagian sel sebanyak 3200.

2 METODE PENELITIAN

2.1 Persamaan Air Dangkal

Persamaan air dangkal atau *shallow water equation* (SWE) juga terkenal dengan nama *Saint-Venant* yang merupakan sistem dua persamaan simultan yang terdiri atas hukum kekekalan momentum dan hukum kekekalan massa (Doyen and Gunawan, 2014; Mungksa, 2011), yang diberikan sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x &= -ghz_x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dimana h adalah ketinggian air, u adalah kecepatan air, z adalah tinggi dasar permukaan air (topografi), dan g adalah percepatan gravitasi dengan nilai 9.8 m/s^2 . Pada bentuk vektor persamaan air dangkal (1) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S_b \quad (2)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} \quad (3)$$

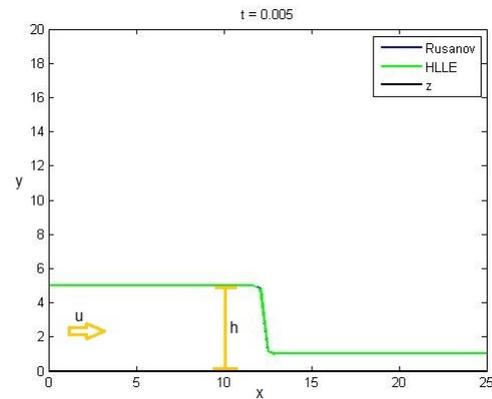
$$F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$S_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

dimana U adalah vektor permukaan air, F adalah pengatur fluks, dan S_b adalah vektor pembentuk dasar permukaan air.

2.2 Topografi

Topografi dibuat dengan dua kondisi, yaitu datar (*flat bottom*) dan tidak datar (terdapat tonjolan pada bagian tertentu). Untuk lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 1 dan Gambar 2.



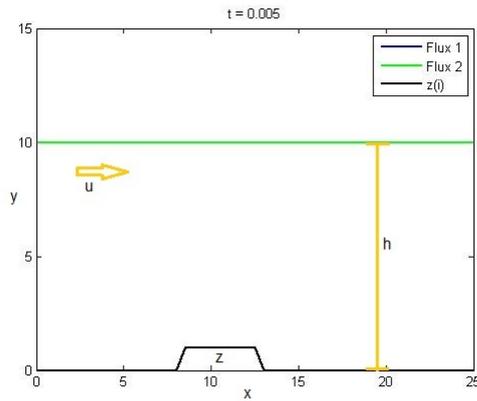
Gambar 1. Kondisi awal ($t = 0$) dengan topografi datar ($z = 0$)

Pada Gambar 1 terlihat dasar permukaan adalah datar ($z = 0$) dengan tinggi permukaan $h = 7$ jika $x < \frac{L}{2}$ (L adalah panjang total domain terhadap sumbu x) dan $h = 3$ untuk kondisi lainnya, sehingga Persamaan (1) bersifat homogen. Karenanya, akan diperoleh sistem konservasi sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Sedangkan pada Gambar 2 dasar permukaan tidak datar ($z \neq 0$) dengan tinggi permukaan air $h = 10$. Untuk inisial z dapat dilihat pada Persamaan (7). Sedangkan untuk sistem konservasinya dapat dilihat pada Persamaan (8).

$$z = \begin{cases} 1 & \text{if } 12.5 > x > \frac{25}{3} \\ 0 & \text{Lainnya} \end{cases} \quad (7)$$



Gambar 2. Kondisi awal ($t = 0$) dengan topografi tidak datar ($z \neq 0$)

$$\left. \begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + ghz_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

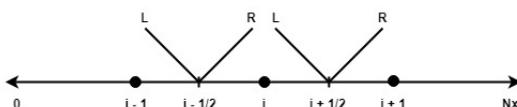
Kondisi awal pada Gambar 1 dan Gambar 2 berlaku untuk fluks *Rusanov* dan *HLLC*.

2.3 Model Numerik

Pada jurnal ini, untuk menghampiri persamaan air dangkal digunakan metode beda volume dengan fluks *Rusanov* dan *HLLC* sebagai solusi numerik, yang akan didiskritkan berdasarkan waktu dan ruang dengan domain $\Omega = (0, L)$. Berikut adalah bentuk diskrit dari persamaan air dangkal (2) (Audusse et al., 2004; Hu et al., 2012).

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) + \Delta t S_b \quad (9)$$

dimana Δt adalah langkah waktu, dan Δx adalah langkah spasial. Nilai U_i^n mewakili nilai pendekatan rata-rata pada interval x_i dan pada waktu t_n . Notasi $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ digunakan sebagai pendekatan untuk rata-rata flux di titik $x = x_{i\pm\frac{1}{2}}$.



Gambar 3. Ilustrasi diskritisasi pada domain L menjadi N_x bagian

2.3.1 Fluks Rusanov

Pendekatan nilai fluks $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ (9) menggunakan solusi numerik *Rusanov* adalah sebagai berikut (Audusse et al., 2000; Botta et al., 2004; Klein et al., 2001).

$$F_{i\pm\frac{1}{2}} = f(U_L, U_R) = \frac{F(U_L) + F(U_R)}{2} - c \frac{U_R + U_L}{2} \quad (10)$$

dimana c merupakan kecepatan gelombang dengan nilai sebagai berikut.

$$c = \text{maks} \left(\left| u_L \pm \sqrt{gh_L^{mod}} \right|, \left| u_R \pm \sqrt{gh_R^{mod}} \right| \right) \quad (11)$$

Pada saat mencari nilai c terdapat notasi h^{mod} yaitu variabel ketinggian air baru, yang merupakan hasil modifikasi dari ketinggian air (h) dan topografi (z). Modifikasi ini dilakukan untuk mendapatkan skema keseimbangan yang sederhana dan cepat dari fluks numerik tertentu untuk masalah homogen. Modifikasi antara h dan z ini disebut *Reconstruction Scheme* yang mengacu pada (Audusse et al., 2004; Bouchut, 2004). Notasi R adalah nilai sebelah kanan dari indeks yang dicari dan L adalah nilai sebelah kiri dari indeks yang dicari (Gambar 3).

$$\begin{aligned} h_R^{mod} &= \text{maks}(0, h_R + \min(0, \Delta z)) \\ h_L^{mod} &= \text{maks}(0, h_L - \text{maks}(0, \Delta z)) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta z^\pm = z_R - z_L \quad (13)$$

2.3.2 Fluks HLLC (Harten-Lax-van Leer-Einfeldt)

Perhitungan numerik menggunakan fluks *HLLC* berbeda dengan fluks *Rusanov*. Untuk mendekati nilai $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ menggunakan solusi numerik *HLLC* adalah sebagai berikut (Bassi and Rebay, 1997; Quirk, 1997).

$$F_{i\pm\frac{1}{2}} = t_1 F(U_R) + t_2 F(U_L) - t_3 (U_R - U_L) \quad (14)$$

dimana nilai t_1 , t_2 , dan t_3 berturut-turut adalah.

$$t_1 = \frac{\min(c_2, 0) - \min(c_1, 0)}{c_2 - c_1} \quad (15)$$

$$t_2 = 1 - t_1 \quad (16)$$

$$t_3 = \frac{c_2|c_1| - c_1|c_2|}{2(c_2 - c_1)} \quad (17)$$

dengan c_1 dan c_2 adalah kecepatan gelombang. Pada solusi numerik fluks *HLLC* persamaan kecepatan gelombang adalah sebagai berikut.

$$c_1 = \begin{cases} u_R - 2\sqrt{gh_R^{mod}} & \text{if } h_L = 0 \\ \min(u_L - \sqrt{gh_L^{mod}}, u^* - \sqrt{gh^*}) & \text{if } h_L > 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$c_2 = \begin{cases} u_L - 2\sqrt{gh_L^{mod}} & \text{if } h_R = 0 \\ \min(u_R - \sqrt{gh_R^{mod}}, u^* - \sqrt{gh^*}) & \text{if } h_R > 0 \end{cases} \quad (19)$$

Pada saat mencari nilai c_1 dan c_2 terdapat variabel h^{mod} yang merupakan variabel ketinggian air hasil modifikasi dan telah dijelaskan pada bagian 2.3.1. Perlu diketahui ketika menghampiri persamaan air dangkal menggunakan fluks *Rusanov* dan fluks *HLLC*, ketinggian air yang digunakan adalah ketinggian air hasil modifikasi (h^{mod}). Selain itu terdapat variabel u^* (kecepatan air) dan h^* (ketinggian air) yang sudah dimodifikasi. Variabel u^* dan h^* hanya digunakan saat mencari nilai c_1 dan c_2 . Berikut adalah persamaan untuk mencari nilai dari u^* dan h^* .

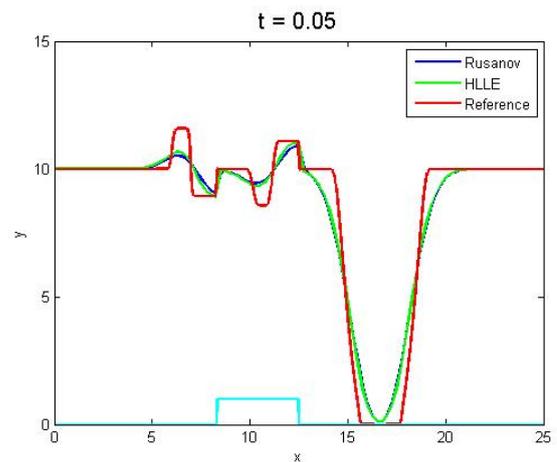
$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{gh_L^{mod}} - \sqrt{gh_R^{mod}} \quad (20)$$

$$h^* = \frac{\left(\frac{\sqrt{gh_L^{mod}} - \sqrt{gh_R^{mod}}}{2} \times \frac{u_L - u_R}{4} \right)^2}{g} \quad (21)$$

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

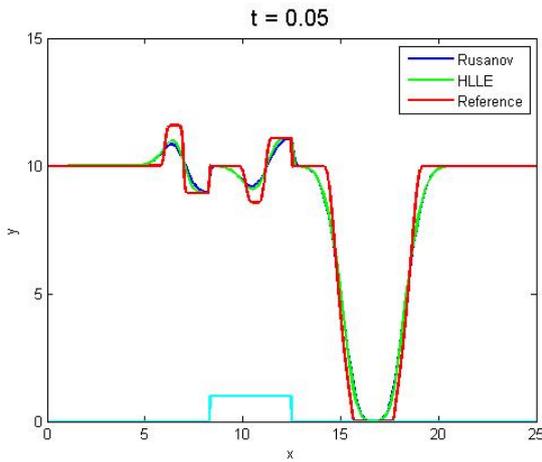
Pada simulasi dilakukan uji numerik *vacuum occurrence* yang berdasar pada usulan E. F. Toro (Goutal and Maurel, 1997). Namun pada makalah ini tidak membahas tentang skema numerik untuk menghitung *vacuum occurrence*. Berdasar pada (Gallouët et al., 2003), inisial awal untuk panjang total domain $\Omega(0, L)$ adalah 25, kecepatan aliran air $hu = -350$ jika $x < 50/3$ dan $hu = 350$ untuk kondisi lainnya, waktu akhir adalah $t = 0.05$, dan pembagian sel (Nx) pada domain $\Omega(0, L)$ adalah 100, 200, 400, 800, dan 1600. Sedangkan untuk tinggi permukaan air (h) dan topografi (z) untuk masing-masing kasus telah disebutkan sebelumnya (pada bagian topografi).

3.1 Topografi Tidak Datar

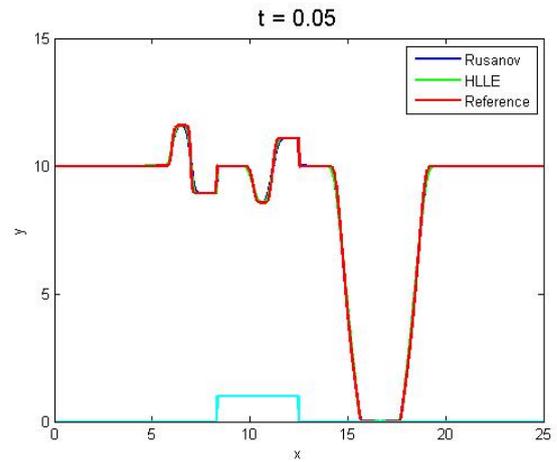


Gambar 4. ($Nx = 100$)

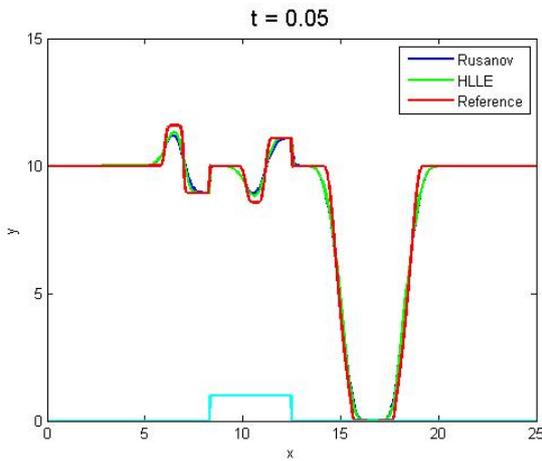
Hasil simulasi yang dilakukan dapat dilihat pada Gambar 4 sampai 8. Saat mengamati Gambar 4 sudah terlihat bahwa fluks *HLLC* lebih mendekati fluks *reference* daripada fluks *Rusanov*. Perbedaan ini terlihat lebih jelas pada lekukan gelombang. Pada Gambar 5 dan 6 mulai terlihat bahwa gelombang yang dihasilkan fluks *HLLC* dan *Rusanov* lebih mendekati fluks *reference* dibanding pada Gambar 4, begitupun pada Gambar 7. Sedangkan pada Gambar 8 fluks *Rusanov* dan *HLLC* hampir mendekati fluks *reference* secara sempurna dan fluks *HLLC* tetap yang paling mendekati. Perbedaan pendekatan pada



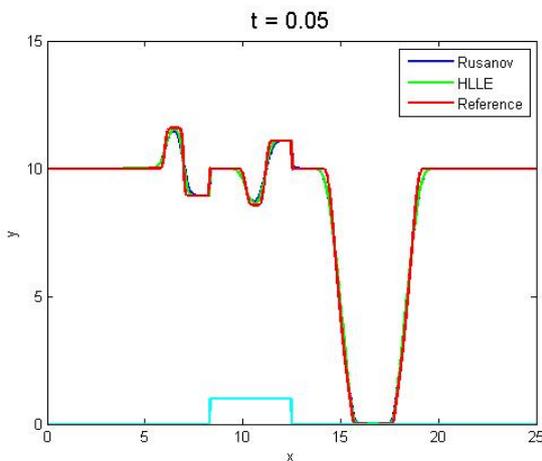
Gambar 5. ($N_x = 200$)



Gambar 8. ($N_x = 1600$)



Gambar 6. ($N_x = 400$)



Gambar 7. ($N_x = 800$)

Gambar 4 sampai Gambar 8 disebabkan oleh pembagian sel (*grid*) yang berbeda-beda.

Tabel 1 menunjukkan konvergensi dan *error* ketinggian air (*h*) secara numerik dari solusi numerik terhadap solusi *reference* pada waktu akhir ($t = 0.05$). Pada tabel tersebut dapat dilihat bahwa *error* fluks *HLLE* lebih kecil dibandingkan fluks *Rusanov*, dengan rata-rata *error* 0.06403 untuk fluks *Rusanov* dan 0.06163 untuk fluks *HLLE*. Pembagian sel (N_x) pada saat simulasi ternyata mempengaruhi *error* dari setiap solusi numerik baik *Rusanov* maupun *HLLE*. Simulasi dengan $N_x = 100$ memiliki *error* yang lebih besar daripada simulasi dengan $N_x = 200$. Begitupun simulasi dengan $N_x = 200$ memiliki *error* yang lebih besar dari simulasi dengan $N_x = 400$, dan seterusnya. Hal tersebut sesuai dengan hasil simulasi yang dilakukan bahwa fluks *HLLE* lebih mendekati fluks *reference* dibanding fluks *Rusanov*. Sedangkan konvergensi untuk setiap fluks sama yaitu menuju satu. *Error* diperoleh dari selisih antar solusi numerik dan solusi *reference* dikalikan dengan Δx ($\Delta x = \frac{L}{N_x}$). Sedangkan tingkat konvergensi τ_{12} antar dua sel dihitung menggunakan persamaan (22).

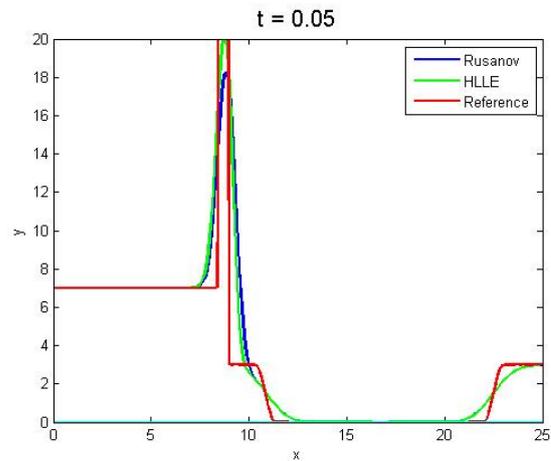
$$\tau_{12} = \frac{\log\left(\frac{Error_2}{Error_1}\right)}{\log\left(\frac{N_{x1}}{N_{x2}}\right)} \quad (22)$$

Tabel 1. Error dan konvergensi antara solusi numerik dan solusi *reference* pada topografi tidak datar ($z \neq 0$).

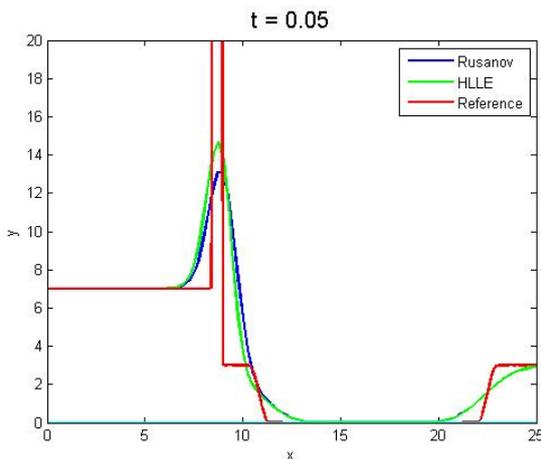
N_x	$Error_{Rusanov}$	$Error_{HLLC}$	$\tau_{Rusanov}$	τ_{HLLC}
100	0.161517982	0.157520289	-	-
200	0.075664113	0.078228159	1.094013686	1.009777739
400	0.047301863	0.045362923	0.677712194	0.786174404
800	0.024256513	0.019367743	0.963524815	1.22785781
1600	0.011425722	0.007677328	1.086086879	1.334979601

3.2 Topografi Datar

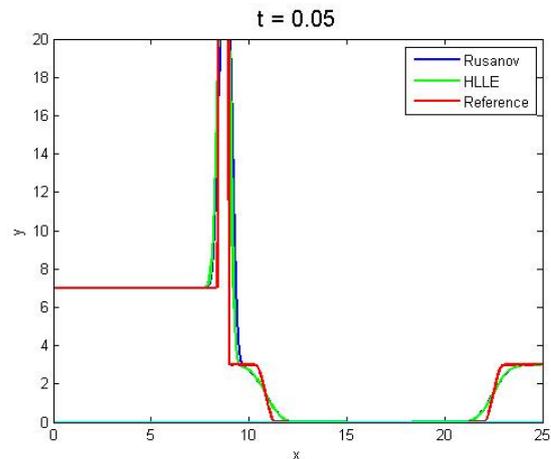
Hasil simulasi dengan kasus topografi datar dapat dilihat pada Gambar 9 sampai 13. Pada Gambar 9 dan Gambar 10 dapat dilihat bahwa fluks *Rusanov* dan fluks *HLLC* yang diterapkan masih cukup jauh dari fluks *reference*. Namun fluks yang paling mendekati tetaplah fluks *HLLC*. Pada Gambar 11 dan 12 gelombang yang dihasilkan fluks *Rusanov* dan *HLLC* sudah lebih mendekati fluks *reference*. Sedangkan pada Gambar 13 fluks *reference* hampir didekati secara sempurna meskipun masih terlihat perbedaan di beberapa lekukan gelombang. Sama dengan evaluasi bagian sebelumnya (topografi tidak datar) perbedaan ini dikarenakan pembagian sel (N_x) yang berbeda setiap hasil simulasi.



Gambar 10. ($N_x = 200$)



Gambar 9. ($N_x = 100$)

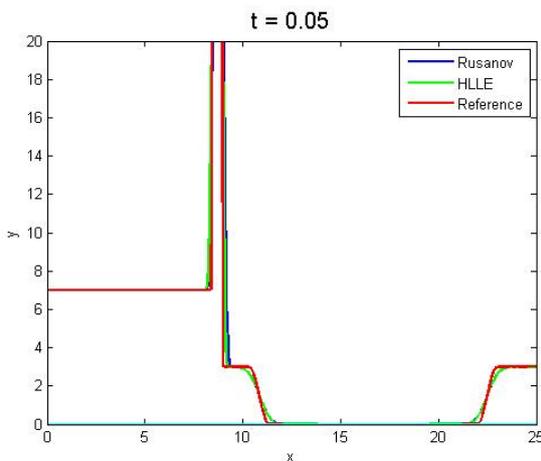


Gambar 11. ($N_x = 400$)

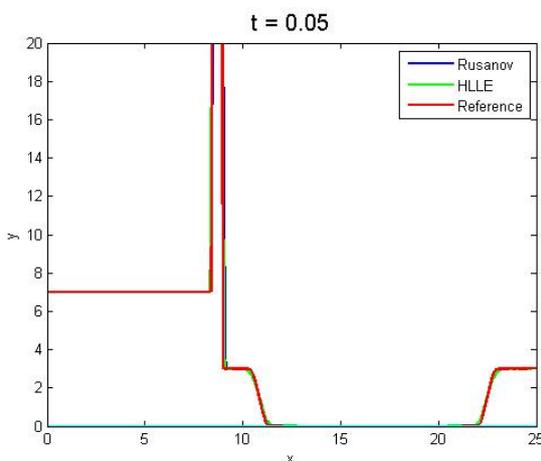
Untuk melihat konvergensi dan *error* secara numerik antara kedua fluks dapat dilihat pada Tabel 2. Pada saat $N_x = 100$ dan $N_x = 200$ fluks *HLLC* memiliki *error* yang lebih besar dibandingkan dengan fluks *Rusa-*

Tabel 2. Error dan konvergensi antara solusi numerik dan solusi *reference* pada topografi datar ($z = 0$).

N_x	$Error_{Rusanov}$	$Error_{HLLC}$	$\tau_{Rusanov}$	τ_{HLLC}
100	4.163281568	4.176158969	-	-
200	2.099454075	2.153918915	0.987706903	0.95521269
400	1.138772752	1.035167268	0.882534352	1.057100034
800	0.556136387	0.40805968	1.03396924	1.343011836
1600	0.204869372	0.074737235	1.440734417	2.448881075



Gambar 12. ($N_x = 800$)



Gambar 13. ($N_x = 1600$)

nov, namun pada N_x selanjutnya fluks HLLC memiliki error yang lebih kecil. Seperti halnya pada kasus topografi tidak datar, simulasi dengan pembagian sel yang lebih sedikit memiliki *error* yang lebih besar daripada simulasi dengan pembagian sel yang lebih banyak. Rata-rata *error* yang diperoleh dari hasil simulasi untuk fluks HLLC adalah 1.5696 dan fluks Rusanov adalah 1.6325. Sedangkan konvergensi masing-masing fluks dapat dilihat pada Tabel 2. Cara untuk mendapatkan *error* dan konvergensi telah dijelaskan pada bagian sebelumnya.

4 KESIMPULAN DAN SARAN

Uji numerik yang dilakukan telah menunjukkan ketahanan dari solusi numerik yang telah dipaparkan. Konvergensi yang didapat untuk setiap fluks cenderung menuju ke satu dengan rata-rata konvergensi untuk fluks Rusanov adalah 0.8689 dan fluks HLLC dengan rata-rata konvergensi 1.13810 pada topografi datar. Sedangkan pada topografi tidak datar, rata-rata konvergensi untuk fluks Rusanov adalah 0.76426 dan fluks HLLC dengan rata-rata konvergensi 0.87175. Konvergensi akan bernilai tetap menuju ke satu jika pada waktu setelahnya gelombang berhenti. Sebaliknya, jika gelombang masih bergerak pada waktu selanjutnya maka nilai konvergensi juga akan berubah.

Simulasi yang dihasilkan menunjukkan bahwa fluks HLLC lebih mendekati fluks *reference* dengan rata-rata *error* yang lebih kecil dibanding fluks Rusanov. Dimana pada kondisi topografi tidak datar, rata-rata *error* yang dihasilkan fluks HLLC adalah 0.06403 dan fluks Rusanov dengan rata-rata *error* 0.06163 pada waktu $t = 0.05$. Begitu juga dengan kon-

disi topografi datar fluks *HLLC* memiliki rata-rata galat 1.56960 dan fluks *Rusanov* memiliki rata-rata *error* 1.63250 ($t = 0.05$). Perbedaan *error* yang dihasilkan dari setiap simulasi dipengaruhi oleh pembagian sel (Nx) yang dilakukan, dimana simulasi dengan Nx yang lebih sedikit akan memiliki galat yang lebih besar dibanding dengan Nx yang lebih banyak.

Daftar Pustaka

- Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M.-O., Klein, R., and Perthame, B. t. (2004). A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6):2050–2065.
- Audusse, E., Bristeau, M.-O., and Perthame, B. (2000). *Kinetic schemes for Saint-Venant equations with source terms on unstructured grids*. PhD thesis, INRIA.
- Bassi, F. and Rebay, S. (1997). High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2d euler equations. *Journal of computational physics*, 138(2):251–285.
- Bon, C. (1997). *Modélisation et simulation numérique d'écoulements hydrauliques et de ruissellement en topographie quelconque*. PhD thesis, Bordeaux 1.
- Botta, N., Klein, R., Langenberg, S., and Lützenkirchen, S. (2004). Well balanced finite volume methods for nearly hydrostatic flows. *Journal of Computational Physics*, 196(2):539–565.
- Bouchut, F. (2004). *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws: And Well-Balanced schemes for sources*. Springer Science & Business Media.
- Chinnayya, A. and LeRoux, A. (1999). A new general riemann solver for the shallow-water equations with friction and topography, 1999. Available in the conservation law preprint server <http://www.math.ntnu.no/conservation>.
- Doyen, D. and Gunawan, P. H. (2014). An explicit staggered finite volume scheme for the shallow water equations. In *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects*, pages 227–235. Springer.
- Gallouët, T., Hérard, J.-M., and Seguin, N. (2003). Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers & Fluids*, 32(4):479–513.
- Goutal, N. and Maurel, F. (1997). *Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation*. Electricité de France. Direction des études et recherches.
- Hu, P., Cao, Z., and Pender, G. (2012). Well-balanced two-dimensional coupled modeling of submarine turbidity currents. In *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Maritime Engineering*, volume 165, pages 169–188. Thomas Telford Ltd.
- Klein, R., Botta, N., and Owinoh, A. (2001). Distinguished limits, multiple scales asymptotics, and numerics for atmospheric flows.
- LeRoux, A. (1998). Discrétisation des termes sources raides dans les problèmes hyperboliques. *Systemes hyperboliques: nouveaux schémas et nouvelles applications. Ecoles CEA-EDFINRIA "problèmes non linéaires appliqués"*, INRIA Rocquencourt (France).
- Mungkasi, S. (2011). Metode volume hingga untuk menyelesaikan masalah bendungan-bobol. *Jurnal Mat Stat*, 11(01).
- Quirk, J. J. (1997). A contribution to the great riemann solver debate. In *Upwind and High-Resolution Schemes*, pages 550–569. Springer.