Jurnal Matematika Vol. 3 No. 1, Juli 2013. ISSN : 1693-1394

Memodelkan Ketergantungan dengan Kopula

I Wayan Sumarjaya

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Udayana
e-mail: sumarjaya@unud.ac.id

Abstrak: Dalam statistika salah satu ukuran untuk melihat ketergantungan antara dua peubah adalah dengan menggunakan koefisien korelasi. Namun, dalam banyak aplikasi finansial terutama manajemen risiko finansial penggunaan korelasi kadang tidaklah tepat. Salah satu contoh kelemahan korelasi adalah ketidakmampuan korelasi untuk menangkap hubungan nonlinear antara dua peubah. Selain, itu sifat-sifat umum korelasi yang dikenal biasanya hanya berlaku pada distribusi eliptik. Untuk itu diperlukan suatu metode untuk mengeksplorasi struktur ketergantungan antarpeubah tersebut. Metode ini adalah kopula. Tujuan artikel ini adalah memberikan tutorial singkat tentang kopula dan estimasinya.

Keywords: kopula, pemodelan ketergantungan, vine,C-vine, D-vine

1. Pendahuluan

Dalam statistika salah satu ukuran untuk melihat ketergantungan antara dua peubah adalah dengan menggunakan koefisien korelasi. Namun, dalam banyak aplikasi finansial terutama manajemen risiko finansial penggunaan korelasi kadang tidaklah tepat. Salah satu contoh kelemahan korelasi dalam manajemen risiko antara lain bahwa korelasi tidak mampu menangkap hubungan nonlinear antarfaktor risiko [8]. Embrechts *et al.* [8] menambahkan, penggunaan korelasi selain distribusi eliptik (misalnya distribusi normal) harus dilakukan dengan hati-hati. Lebih lanjut menurut [8] setidaknya ada dua kesalahan dalam penggunaan korelasi. Pertama, distribusi marginal dan korelasi menentukan distribusi bersama. Hal ini hanya berlaku untuk distribusi dalam keluarga eliptik. Kesalahan kedua, apabila diketahui distribusi marginal F_1 dan F_2 untuk peubah acak X_1 dan X_2 semua korelasi linear antara -1 dan 1 dapat diperoleh dengan menentukan spesifikasi distribusi bersama F. Lagi-lagi, ini hanya berlaku pada distribusi keluarga eliptik. Dengan kata lain, tidak semua korelasi yang bisa dicapai berada pada selang $[\rho_{\min}, \rho_{\max}] = [-1, 1]$. Sebagai contoh distribusi lognormal memiliki nilai kisaran korelasi pada $[-0{,}090; 0{,}666]$. Embrechts *et al.* [8] menambahkan ada beberapa masalah lain selain dua yang disebutkan di atas yang muncul pada penggunaan korelasi dalam manajemen risiko yaitu sebagai berikut: (1) risiko dependen yang secara positif sempurna tidak selalu/harus memiliki korelasi 1, demikian pula untuk risiko dependen negatif sempurna tidak selalu/harus memiliki korelasi -1; (2) korelasi nol tidak mengindikasikan risiko yang bebas; (3) korelasi tidaklah invarian dalam transformasi misalnya $\log X$ dan $\log Y$ secara umum tidak memiliki korelasi yang sama dengan X dan Y; dan (4) korelasi hanya terdefinisikan apabila varians dari risiko adalah hingga. Salah satu alternatif untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menggunakan korelasi rank, misalnya korelasi Spearman atau Kendall. Namun, menurut lebih lanjut menurut [8] korelasi rank masih memiliki masalah bahwa korelasi hanya merupakan suatu pengukur skalar ketergantungan sehingga tidak dapat memberitahu apa yang ingin diketahui tentang ketergantungan risiko misalnya. Selain itu korelasi rank masih memiliki masalah seperti pada uraian nomor (2).

Berdasarkan uraian di atas diperlukan alternatif untuk memahami struktur ketergantungan /dependens dari distribusi bersama yang bisa menghubungkan antara struktur ketergantungan itu sendiri dan distribusi marginal. Dengan kata lain, setiap distribusi bersama $F(x_1, \ldots, x_n)$ dapat dituliskan sebagai

$$F(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)), \tag{1}$$

dengan $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ adalah distribusi marginal dan fungsi C disebut kopula (*copula*) dari F.

Artikel ini diatur sebagai berikut. Bagian 2 membahas konsep kopula dan Teorema Sklar. Selanjutnya kopula dibahas pada Bagian 3. Kemudian estimasi dan simulasi kopula *vine* dibahas pada Bagian 4. Bagian 5 memuat Kesimpulan.

2. Pengantar Kopula

Pada bagian ini akan dibahas konsep kopula dan pengembanganya. Telah banyak artikel yang meninjau tentang kopula dan juga tutorial penggunaanya seperti [11], [16], [18], [12], [19], [7], dan [14]. Berikut ini beberapa konsep yang berhubungan dengan kopula seperti volume, fungsi 2-increasing, dan *grounded* yang diadaptasi dari [17].

Definisi 1. [17] Suatu fungsi real 2-place adalah fungsi H yang ranah (*domain*) $\operatorname{dom} H$ merupakan himpunan bagian (subset) dari bilangan real yang diperluas $\overline{\mathbf{R}}^2$ dan kisaran (*range*) $\operatorname{ran} H$ yang merupakan himpunan bagian dari bilangan real $\mathbf{R}$.

Definisi 2. [17] Misalkan S_1 dan S_2 adalah himpunan bagian takkosong dari $\overline{\mathbf{R}}^2$ dan H adalah fungsi real 2-place sedemikian hingga $\operatorname{dom} H = S_1 \times S_2$. Misalkan $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ adalah persegi panjang yang semua verteksnya berada di $\operatorname{dom} H$. Volume H dari B didefinisikan sebagai

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \tag{2}$$

Definisi 3. [17] Suatu fungsi real 2-place dikatakan 2-increasing apabila $V_H(B) \geq 0$ untuk semua persegi panjang B yang verteksnya terletak di $\operatorname{dom} H$.

Definisi 4. [17] Misalkan S_1 memiliki elemen terkecil a_1 dan S_2 memiliki elemen terkecil a_2. Suatu fungsi H dari $S_1 \times S_2$ ke $\mathbf{R}$ dikatakan *grounded* jika $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$.

Definisi 5. [17] Suatu fungsi C dari $\mathbf{I}^2$ ke $\mathbf{I}$ dikatakan kopula dua dimensi (atau kopula) apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Untuk setiap u, v di dalam $\mathbf{I}$ berlaku

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

dan

$$C(u, 1) = u \text{ dan } C(1, v) = v.$$

2. Untuk setiap u_1, u_2, v_1, v_2 di dalam $\mathbf{I}$ sedemikian hingga $u_1 \leq u_2$ dan $v_1 \leq v_2$ berlaku
$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Sebagai contoh kopula dua dimensi adalah kopula hasil-kali $\Pi(u, v) = uv$ dan kopula $M(u, v) = \min(u, v)$. Selanjutnya dalam membicarakan tentang kopula dan hubungannya dengan Teorema Sklar, akan ditinjau terlebih dahulu konsep fungsi distribusi itu sendiri.

Definisi 6. [17] Fungsi distribusi bersama adalah fungsi H dengan domain $\overline{\mathbf{R}}^2$ sedemikian hingga

1. H adalah 2-increasing,
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ dan $H(\infty, \infty) = 1$.

Dari definisi fungsi distribusi di atas dapat diketahui H adalah *grounded* dan H memiliki margin $F(x) = H(x, \infty)$ dan $G(y) = H(\infty, y)$. Selanjutnya hubungan antara kopula dan fungsi distribusi H dinyatakan oleh Teorema Sklar berikut.

Teorema Sklar. Misalkan H adalah fungsi distribusi bersama dengan margin F dan G. Maka terdapat suatu kopula C sedemikian hingga untuk semua x, y di dalam $\overline{\mathbf{R}}$,
$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \tag{3}$$

Jika F dan G kontinu, maka C tunggal; jika tidak demikian C secara tunggal ditentukan pada kisaran ran $R\times$ ran G. Sebaliknya, jika C adalah kopula dan F dan G adalah fungsi distribusi, maka fungsi H yang didefinisikan pada (3) adalah fungsi distribusi dengan margin F dan G.

Bukti Teorema Sklar dapat dilihat pada [17].

Contoh 1. Distribusi bivariat logistik Gumbel dengan fungsi distribusi bersama
$$H(x, y) = (1 + \exp(-x) + \exp(-y))^{-1}$$
memiliki margin distribusi univariat logistik $F(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$ dan $G(y) = (1 + \exp(-y))^{-1}$ dengan kopula
$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

2.1. Kopula Multivariat

Pada bagian sebelumnya telah didefinisikan kopula untuk bivariat. Selanjutnya kopula dapat diperluas untuk multivariat. Misalkan $\overline{\mathbf{R}}^n$ menyatakan ruang-n yang diperluas yakni $\overline{\mathbf{R}} \times \overline{\mathbf{R}} \times \cdots \times \overline{\mathbf{R}}$. Misalkan $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ adalah titik-titik di dalam $\overline{\mathbf{R}}$. Tuliskan $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ apabila $a_k \leq b_k$ untuk semua k demikian pula $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ apabila $a_k < b_k$ untuk semua k. Definisikan kotak $- \ n \ B$ sebagai hasil kali Cartesius dari n selang tertutup $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Verteks-verteks dari kotak-n B adalah titik-titik $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ dengan c_k sama dengan a_k atau b_k. Kubus-n adalah hasil kali $\mathbf{I} \times \mathbf{I} \times \cdots \times \mathbf{I}$. Kemudian, fungsi real n-place adalah fungsi dengan domain $\operatorname{dom} H$ yang merupakan himpunan bagian dari $\overline{\mathbf{R}}^n$ dan kisaran $\operatorname{ran} H$ yang merupakan himpunan bagian dari $\mathbf{R}$.

Selanjutnya didefinisikan volume sebagai berikut.

Definisi 7. [17] Misalkan $S_1, S_2, \ldots, S_n$ adalah himpunan bagian takkosong dari $\overline{\mathbf{R}}$ dan misalkan H adalah fungsi real n-place sedemikian hingga $\operatorname{dom} H = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$. Misalkan $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ adalah kotak-n yang semua verteksnya ada di $\operatorname{dom} H$. Volume H dari B diberikan oleh

$$V_H(B) = \sum \operatorname{sign}(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}), \tag{4}$$

dengan

$$\operatorname{sign}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } c_k = a_k \text{ untuk } k \text{ genap;} \\ -1, & \text{jika } c_k = a_k \text{ untuk } k \text{ ganjil.} \end{cases} \tag{5}$$

Selanjutnya fungsi real n-place H dikatakan n-increasing jika $V_H(B) \geq 0$ untuk semua kotak-n B yang semua verteksnya berada di $\operatorname{dom} H$. Kemudian, misalkan domain dari fungsi real n-place adalah $\operatorname{dom} H = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ dan masing-masing S_k memiliki elemen terkecil a_k. Fungsi H dikatakan *grounded* apabila $H(\mathbf{t}) = 0$ untuk semua $\mathbf{t}$ di dalam $\operatorname{dom} H$ sedemikian hingga $t_k = a_k$ untuk setidaknya satu k. Jika masing-masing S_k takkosong dan memiliki elemen terbesar b_k, fungsi H dikatakan memiliki margin dan margin satu dimensi H adalah fungsi H_k yang diberikan oleh

$$H_k(x) = H(b_1, \ldots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \ldots, b_n)$$

untuk semua x di dalam S_k.

Dengan pengembangan konsep volume, fungsi n-place, n-increasing, dan *grounded* di atas, selanjutnya didefinisikan kopula dimensi n.

Definisi 8. [17] Kopula dimensi n (n-*dimensional copula*) adalah fungsi C dari $\mathbf{I}^n$ ke $\mathbf{I}$ dengan sifat-sifat berikut:

1. Untuk setiap $\mathbf{u}$ di dalam $\mathbf{I}^n$, $C(\mathbf{u}) = 0$ jika paling tidak satu koordinat $\mathbf{u}$ adalah 0 dan jika semua koordinat $\mathbf{u}$ adalah 1 kecuali u_k, maka $C(\mathbf{u}) = u_k$.
2. Untuk setiap $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ di dalam $\mathbf{I}^n$ sedemikian hingga $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ volume $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$.

Selanjutnya perluasan Teorema Sklar untuk dimensi n adalah sebagai berikut.

Teorema Sklar [17]. Misalkan H adalah fungsi distribusi dimensi n dengan margin $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Maka terdapat suatu kopula C berdimensi n sedemikian hingga untuk semua $\mathbf{x}$ di dalam $\overline{\mathbf{R}}^n$

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)). \tag{6}$$

Jika $F_1, F_2, \ldots, F_n$ semuanya kontinu, maka C adalah tunggal; jika tidak demikian C secara tunggal ditentukan pada $\operatorname{ran} F_1 \times \operatorname{ran} F_2 \times \cdots \times \operatorname{ran} F_n$. Sebaliknya, jika C adalah kopula n dan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ adalah fungsi distribusi, maka fungsi H yang didefinisikan pada (6) adalah fungsi distribusi dimensi n dengan margin $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Pembuktian Teorema Sklar untuk kopula dimensi n dapat dilihat pada [17].

Contoh 3. Perluasan kopula hasil-kali $\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \cdots u_n$ dan $M^n(\mathbf{u}) = \min(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Kopula pada kasus multivariat tidak semudah pada kasus bivariat. Menurut [10] pengkonstruksian kopula multivariat yang memungkinkan beragam jenis ketergantungan dan representasi bentuk tertutup masih merupakan tugas menantang.

2.2. Keluarga Kopula

Konstruksi kopula dapat dilihat secara detail dalam [17]. Secara garis besar ada tiga keluarga kopula penting yaitu keluarga eliptik (*elliptical copulas*), kopula Archimedes (*Archimedean copulas*), dan Eyraud-Farlie-Gumbel-Mongerstern (EFGM) kopula (lihat [6]). Di antara keluarga kopula ini, keluarga kopula fleksibel yang popular digunakan adalah keluarga kopula Archimedes. Pada bagian berikut akan dijelaskan kopula Archimedes yang diadaptasi dari [17] dan [10]. Misalkan $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$ adalah fungsi kontinu, menurun tegas, dan fungsi konveks dengan $\phi(1) = 0$ dan $\phi(0) \leq \infty$ dan misalkan $\phi^{[-1]}$ adalah pseudo-inverse dari ϕ yang didefinisikan oleh

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0); \\ 0, & \phi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Selanjutnya kopula Archimedes bivariat didefinisikan sebagai

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)). \tag{8}$$

Fungsi ϕ selanjutnya disebut pembangkit (*generator*) dari kopula. Selanjutnya, diketahui pembangkit tegas (*strict generator*) $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$, kopula Archimedes dapat diperluas untuk kasus dimensi n. Untuk setiap $n \geq 2$, fungsi $C : [0,1]^n \to [0,1]$ yang didefinisikan oleh

$$C(\mathbf{u}) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \cdots + \phi(u_n)) \tag{9}$$

adalah kopula Archimedes dimensi n. Daftar anggota keluarga kopula Archimedes dapat dilihat pada [17].

Contoh 2. Berikut ini adalah contoh keluarga kopula Archimedes: kopula Clayton dengan pembangkit $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, kopula Frank dengan pembangkit $-\ln[(\exp(-\theta t) - 1)/(\exp(-\theta) - 1)]$, dan kopula Gumbel dengan pembangkit $(-\ln t)^{\theta}$. Masing-masing kopula memiliki margin $N(0,1)$ dan t_4. Plot kontur dapat dilihat pada gambar berikut:

3. Kopula Vine

Sebagaimana pembahasan pada bagian sebelumnya, penggunaan kopula pada dimensi tinggi bermasalah pada ketidakfleksibelan struktur (lihat [3]). Lebih lanjut, menurut [3] pada dimensi sebarang, pemilihan keluarga kopula cenderung terbatas. Kopula Gauss multivariat, t, dan Archimedes kurang fleksibel dalam memodelkan ketergantungan dengan akurat. Selain itu aplikasi finansial membutuhkan struktur ketergantungan pada pusat distribusi dan juga pada ekor [5]. Salah satu cara untuk mengatasi persamasalah ini adalah dengan menggunakan kopula *vine* . *Vine* merupakan model struktur graf

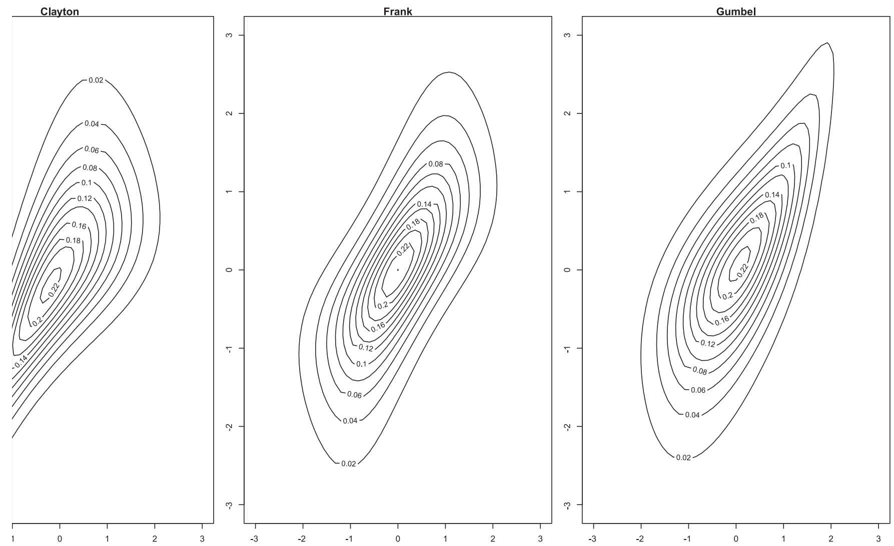

FIG 1. *Plot kontur kopula Clayton, Frank, dan Gumbel. Masing-masing kopula memiliki margin* $N(0,1)$ *dan* t_4.

fleksibel untuk mendeskripsikan kopula multivariat menggunakan riam (*cascade*) kopula bivariat yang disebut kopula pasangan (*pair-copulas*) (lihat misalnya [1], [3], [15]). Konsep *vine* dikembangkan secara detail oleh [2] dan inferensi statistika dikembangkan lebih lanjut oleh [1] untuk *vine* kanonis (C-*vine*) dan *vine* D (D-*vine*).

Sebelum membicarakan tentang *vine* , akan dibicarakan terlebih dahulu konsep dekomposisi kopula pasangan (*pair-copula*) yang diadaptasi dari [1]. Misalkan suatu vektor peubah acak $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dengan densitas peluang bersama $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Selanjutnya densitas ini dapat difaktorkan dengan marginal-marginalnya sebagai berikut

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_n(x_n) f(x_{n-1}|x_n) f(x_{n-2}|x_{n-1}, x_n) \cdots f(x_1|x_2, \ldots, x_n). \qquad (10)$$

Selanjutnya menerapkan Teorema Sklar pada (6) dan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_{1\ldots n}\{F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \qquad (11)$$

dengan $c_{1\ldots n}(.)$ adalah densitas kopula variat n.

Contoh 4. Untuk kasus trivariat diperoleh dekomposisi (lihat juga [3])

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) f(x_2|x_1) f(x_3|x_1, x_2). \qquad (12)$$

Dengan menerapkan Teorema Sklar diperoleh

$$f(x_2|x_1) = c_{12}\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} f_2(x_2) \qquad (13)$$

dan

$$f(x_3|x_1, x_2) = c_{23|1}\{F(x_2|x_1), F(x_3|x_1)\} c_{13}\{F_1(x_1), F_3(x_3)\} f_3(x_3). \qquad (14)$$

Fungsi distribusi trivariat pada (12) dapat direpresentasikan dengan kopula bivariat C_{12}, C_{13}, dan C_{23} dengan densitas berturut-turut c_{12}, c_{13}, dan c_{23}. Secara umum untuk distribusi berdimensi tinggi terdapat sejumlah signifikan kostruksi kopula pasangan yang mungkin. Sebagai contoh terdapat 240 konstruksi untuk densitas lima dimensi [1]. Untuk mengorganisasi atau mempermudah konstruksi kopula pasangan, [2] memperkenalkan *vine* .

Definisi 9. [2] Suatu *vine* V pada n elemen jika $V = (T_1, \dots, T_m)$ dengan T_1 adalah pohon dengan simpul $N_1 = \{1, \dots, N\}$ dan himpunan simpul yang dinotasikan $\bar{E}_1$. Untuk setiap $i = 1, \dots, m$, T_i adalah simpul dengan $N - i \subset N_1 \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{i-1}$ dan himpunan simpul $\bar{E}_i$

Terdapat dua kasus khusus *vine* regular yaitu *vine* kanonis (*canonical vines*, disingkat C-*vine*) dan *vine* D (disingkat D-*vine*). Secara umum bentuk densitas D-*vine* dan C-*vine* adalah berturut-turut sebagai berikut (lihat [1])

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1} \\ &\quad \{F(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}), F(x_{i+j}|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1})\} \end{aligned} \tag{15}$$

dan

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i,i+j|i+1,\dots,j-1} \\ &\quad \{F(x_j|x, \dots, x_{j-1}), F(x_{i+j}|x_1, \dots, x_{j-1})\}. \end{aligned} \tag{16}$$

4. Estimasi Kopula

Secara garis besar terdapat beberapa metode untuk mengestimasi kopula yaitu metode kemungkinan maksimum, inferensi kemungkinan untuk margin, semiparametrik, dan nonparametrik (lihat [4]). Bagian ini hanya membahas metode kemungkinan maksimum. Misalkan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah densitas peluang bersama. Menerapkan Teorema Sklar diperoleh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \tag{17}$$

dengan

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} \tag{18}$$

adalah densitas copula dimensi n dari $C(u_1, u_2, \dots, u_n; \theta)$. Apabila diambil sample sebanyak m bentuk persamaan (17) mengimplikasikan dekomposisi log kemungkinan (*log likelihood*) yakni

$$L = \sum_{j=1}^{m} \log c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \log f_i(x_i). \tag{19}$$

Kemudian misalkan kopula C termasuk dalam keluarga kopula yang diindeks oleh parameter θ yakni $C = C(u_1, u_2, \ldots, u_n; \theta)$ dan margin F_i dan densitas univariat f_i diindeks oleh parameter α_i, maka penduga kemungkinan maksimum likelihood untuk (17) adalah (lihat [4])

$$\arg \max_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \theta} \sum_{j=1}^{m} \log c(F_1(x_1; \alpha_1), F_2(x_2; \alpha_1), \ldots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \log f_i(x_i; \alpha_i). \tag{20}$$

4.1. Estimasi Kopula *Vine*

Estimasi kopula *vine* dapat menggunakan metode kemungkinan maksimum. Fungsi log kemungkinan (lihat [1]) untuk C-*vine* adalah

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^{T} \log[c_{j,j+1|1,\ldots,j-1}\{F(x_{j,t}|x_{1,t}, \ldots, x_{j-1,t})F(x_{j+i,t}|x_{1,t,\ldots,x_{j-1,t}})\}] \tag{21}$$

dan untuk D-*vine*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^{T} \log[c_{i,i+j|i+1,\ldots,i+j-1}\{F(x_{i,t}|x_{i+1,t}, \ldots, x_{i+j-1,t})F(x_{i+j,t}|x_{1,t}, \ldots, x_{i+j-1,t})\}]. \tag{22}$$

Prosedur inferensi untuk kopula C-*vine* dan D-*vine* dapat dilihat pada [1], [5]. Contoh estimasi dan inferensi dapat dilihat pada [3].

5. Kesimpulan

Masih banyak hal yang belum bisa disampaikan dalam artikel ini, terutama estimasi dan inferensi *vine* . Selain itu penerapan kopula untuk kasus diskret juga belum dibahas. Saat ini referensi untuk kopula kasus diskret adalah [13]. Namun, demikian kopula memberikan gambaran yang lebih luas dalam mempelajari struktur ketergantungan.

Daftar Pustaka

[1] Kjerti Aas, Claudia Czado, Arnoldo Frigessi, and Henrik Bakken. 2009. Pair-copula Construction of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*. 44: 182–198.

[2] Tim Bedford and Roger M. Cooke. 2002. Vines–A New Graphical Model for Dependent Random Variables. *The Annals of Statistics*. 30(4): 1031–1068.

[3] Eike Christian Brechmann and Ulf Schepsmeier. 2013. Modeling Dependence with C-and D-Vine Copulas: The R Package CDVine. *Journal of Statistical Software*. 52(3): 1–27.

[4] Barbara Choroś, Rustam Ibragimov and Elena Permiakova. Copula Estimation. In *Copula Theory and Its Applications*. Lecture Notes in Statistics 198. pages 77–91.

[5] Claudia Czado. 2010. Pair-copula Constructions of Multivariate Copulas. In *Copula Theory and Its Applications*. Lecture Notes in Statistics 198, pages 93–109.

[6] Fabrizio Durante and Carlo Sempi. 2009. Copula Theory: an Introduction. In *Copula Theory and Its Applications*. Lecture Notes in Statistics 198,pages 3–31.

[7] A. Dutfoy and R. Lebrun. 2009. Practical Approach to Dependence Modelling Using Copulas. *Proc. IMech. Vol 223 Part O: J. Risk and Reliability*. pp: 347–361.

[8] Paul Embrechts, Alexander McNeil and Daniel Straumann. Correlation: Pitfalls and Alternatives. *RISK Magazine*. 69–71.

[9] Paul Embrechts. 2009. Copulas: A Personal View. *Journal of Risk and Insurance*.76: 639-650.

[10] Matthias Fischer. 2011. Multivariate Copulae. In *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*, pages 19–36. World Scientific Publishing Co.

[11] Edward W. Frees and Emiliano A. Valdez. 1998. Understanding Relationships Using Copulas.*North American Actuarial Journal*. 2(1):1–25.

[12] Christian Genest and Anne-Catherine Favre. 2007. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of Hidrology Engineering*. 12 (4):347–368.

[13] Christian Genest and Johanna Nešlehová. 2007. A Primer on Copulas for Count Data. *Astin Bulletin*. 37(2): 475–515.

[14] Wolfgang Härdle and Ostap Okhrin. De copulis non est disputandum-Copulae: An Overview. SFB Discussion Paper 2009-031. Humboldt-Universität zu Berlin. Available at http://hdl.handle.net/10419/39305

[15] Dorota Kurowicka. 2011. Introduction: Dependence Modeling. In *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook*, pages 1–17. World Scientific Publishing Co.

[16] Roger B. Nelsen. 2003. Properties and Applications of Copulas: A Brief Survey. *Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance (J. Dhaene, N. Kolev, and P. Morettin, eds.)* Institute of Mathematics and Statistics, University of So Paulo (2003), pp. 10–28

[17] Roger B. Nelsen. 2006. An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer, New York.

[18] Kouros Owzar and Pranab Kumar Sen. 2003. Copulas; Concepts and Novel Applications. *Metron*. LXI (3): 323–353.

[19] Pravin K. Trivedi and David M. Zimmer. 2005. Copula Modeling: An Introduction for Practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics*. 1(1): 1–111.