Jurnal Matematika Vol. 3 No. 1, Juli 2013. ISSN : 1693-1394

Kondisi Urutan Natural Pada Semigrup Reguler

Widayati

Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP UAD
Jl. Prof. Dr. Soepomo, SH. Janturan Yogyakarta
e-mail: Ummunabilah67@gmail.com

Abstrak: Dalam tulisan ini dibahas pembentukan semigrup reguler, semigrup ortodoks yang meliputi semigrup invers dan band. Urutan natural dalam semigrup reguler S untuk $a, b \in S$, $a \leq b \Leftrightarrow a = eb = bf$ dengan $e, f \in E_s$. S merupakan semigrup murni jika untuk $\forall e \in E_s$ dan $a \in S$, $e \leq a \Rightarrow a \in E$. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui kondisi urutan natural pada beberapa konstruksi semigrup reguler serta hubungannya dengan E-unitary dan semigrup murni. Kemurnian dan E-unitary merupakan kejadian khusus dari urutan natural. Terdapat urutan natural yang bukan merupakan urutan parsial. Urutan natural berlaku pada beberapa konstruksi semigrup. Dalam pemetaan terdapat kemurnian yang saling mempengaruhi, dan juga semigrup invers yang saling mempengaruhi.

Katakunci: semigrup reguler, semigrup ortodoks,semigrup invers, E-unitary, semigrup murni.

1. Pendahuluan

Semigrup S adalah grupoid $(S, \cdot)$ yang assosiatif terhadap operasi $(\cdot)$ yaitu $(\forall a, b, c \in S)\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Suatu semigrup S dikatakan semigrup regular jika setiap elemen-elemennya adalah reguler. Jika $a \in S$ merupakan elemen regular, maka ada elemen b sedemikian sehingga $aba = a$. Jadi a regular jika $a \in aSa$. Semigrup reguler dalam himpunan idempoten memenuhi sifat komutatif. Semigrup reguler pertama ditemukan oleh Nambooripad pada tahun 1980.

Apabila terdapat semigrup invers dalam semigrup reguler maka semigrup invers tersebut merupakan subsemigrup invers atau transversal invers. Istilah transversal invers dari semigrup reguler pertama kali diperkenalkan oleh Blyth dan McFadden (1982). Suatu transversal invers dari semigrup reguler S adalah subsemigrup invers S° yang memuat invers tunggal dari masing-masing elemen S.

S suatu semigrup reguler dan E_s merupakan himpunan idempoten dalam S, jika $e \in E_s$ dan $a \in S,\ e \geq a$, maka $a \in E_s$. Selanjutnya jika $e \in E_s$ dengan $e \leq a$, maka $a \in E_s$, dengan demikian S merupakan semigrup murni.

Suatu pemetaan $\varphi : A \to B$ dari grupoid parsial dikatakan murni jika $\varphi(a) \in E_B$ berakibat $a \in E_A$. Suatu semigrup reguler S menjadi E-*unitary* jika himpunan E dari idempoten-idempoten merupakan suatu unitary subsemigrup dari S. Urutan natural dalam suatu semigrup S didefinisikan oleh $a \leq b \Leftrightarrow a = eb = bf$ untuk suatu $e, f \in E_S$.

Semigrup invers pertama kali ditemukan oleh Wagner di tahun 1950 . Suatu semigrup S merupakan semigrup invers jika setiap elemen mempunyai tepat satu invers, sedemikian sehingga untuk $\forall a \in S,\ \exists a^{-1} \in S,\ a = aa^{-1}a$ dan $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$. E-unitary semigrup invers pertama ditemukan Wagner tahun 1950, dan menarik perhatian luas melalui paper dari Mac Alister pada tahun 1974.

Jika E_S merupakan suatu subsemigrup dari semigrup reguler S, maka S disebut ortodoks. Semigrup ortodoks sangat terbatas. Terdapat dua kondisi yang berbeda antara ortodoks dan urutan natural. Hal ini memberi motivasi peneliti untuk dapat menuliskan batasan-batasan yang berkenaan dengan urutan natural dan menemukan sifat-sifat dasar dari urutan natural. Selanjutnya dapat menuliskan kondisi urutan natural pada beberapa konstruksi semigrup reguler dan mempelajari hubungannya dengan kemurnian dan E-unitary.

2. Tinjauan Pustaka

Penulisan ini merupakan bedah jurnal dari artikel penelitian yang dilakukan oleh Mario Petrich (1999). Dalam jurnal ini dibahas tentang kondisi urutan natural pada beberapa konstruksi dalam semigrup reguler. Urutan natural dalam semigrup reguler S didefinisikan oleh didefinisikan oleh $a \leq b \Leftrightarrow a = eb = bf$ untuk suatu $e, f \in E_S$. Selain itu juga dijumpai beberapa pembuktian dalil maupun teorema yang belum ditulis secara lengkap serta rinci. Oleh karena itu perlu untuk melengkapi pembuktian tersebut yang bersumber dari literatur yang ada.

Pengertian dan sifat-sifat semigrup reguler yang didefinisikan oleh (Howie,1976) : Semigrup S dikatakan suatu semigrup reguler jika setiap elemen mempunyai invers. Jika setiap elemen dari S mempunyai tepat satu invers, maka S dikatakan semigrup invers.

Seperti yang didefinisikan Mario Pethrich semigrup murni adalah suatu semigrup reguler S yang mana $e \in E_S,\ a \in S,\ e \leq a \Rightarrow a \in E_S$. Suatu E-unitary semigrup menurut Howie (1976) adalah suatu subset Adari suatu semigrup S merupakan unitary kanan jika

$$(\forall a \in A)(\forall s \in S) sa \in A \Rightarrow s \in A$$

Unitary kiri jika

$$(\forall a \in A)(\forall s \in S) as \in A \Rightarrow s \in A$$

Unitary jika berlaku keduanya unitary kiri dan unitary kanan.

Definisi 2.1. (Clifford, 1961). Diketahui S suatu semigrup, elemen $a \in S$ disebut reguler jika terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $axa = a$. Selanjutnya semigrup S disebut semigrup reguler jika setiap elemennya merupakan elemen reguler.

Proposisi 2.1. (Howie, 1976). Diketahui S suatu E-unitary semigrup dan misalkan $E = E_s$.

a. Untuk setiap $s, t \in S$, jika $st \in E$, maka $ts \in E$.
b. Untuk setiap $s, t \in S$ dan $e \in E$, jika $st \in E$ maka $set \in E$.
c. Untuk setiap $s, t \in S$ dan $e \in E$, jika $set \in E$, maka $s\ t \in E$.

Definisi 2.2. (Howie, 1976). Suatu relasi biner ρ pada himpunan X disebut **urutan parsial** jika memenuhi:

1. Sifat refleksif, yaitu $(\forall x \in X)(x, x) \in \rho$;
2. Sifat antisimetris, yaitu $(\forall x, y \in X)[(x, y) \in \rho, (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y]$
3. Sifat transitif, yaitu $(x, y, z \in X)[(x, y) \in \rho \& (y, z) \in rho \Rightarrow (x, z) \in \rho]$

Secara umum $(x, y) \in \rho$ ditulis $x \leq y$, sehingga $x < y$ didefinisikan sebagai $(x, y) \in \rho$ dengan $x \neq y$. Selanjutnya, jika suatu relasi biner ρ pada himpunan X mendefinisikan sebuah urutan parsial pada X maka $(x, y) \in \rho$ dinyatakan oleh $x \leq y$ yang dibaca "x mendahului y".

Definisi 2.3. (Howie, 1976). Suatu urutan parsial $\leq$ pada X yang memenuhi $(\forall x, y \in X)[x \leq y$ atau $y \leq x]$ disebut **urutan total**, sehingga setiap dua elemen dalam himpunan terurut parsial X merupakan elemen-elemen yang dapat dibandingkan. Himpuan S yang dilengkapi dengan urutan parsial $\leq$ ditulis dengan notasi $(S, \leq)$ disebut himpunan terurut parsial (partially ordered set) disingkat poset.

Selanjutnya dari sebarang band komutatif dapat didefinisikan urutan parsial seperti pada proposisi berikut :

Proposisi 2.2. (Howie,1976). Untuk setiap semigrup reguler $(S, \cdot)$ himpunan E_S yang terdiri atas elemen idempoten S merupakan himpunan terurut parsial oleh urutan

$$e \leq f \text{ jika } e = ef = fe \qquad (e, f \in E_S)$$

Bukti.

1. Ambil sembarang $e \in E$ maka berlaku $e^2 = e$ jadi $e \leq e$ (Refleksif)
2. Ambil sembarang $e, f \in E$ dengan $e \leq f$ dan $f \leq e$ maka $ef = fe = e$ dan $fe = ef = f$. Jadi $e = f$ (Anti simetris)
3. Misalkan $e, f, g \in E$ dengan $e \leq f$ dan $f \in g$ maka $ef = fe = e$ dan $fg = gf = f$, jadi

$$\begin{aligned} eg &= (ef)g = e(fg) = ef = e \qquad \text{dan} \\ ge &= g(fe) = (gf)e = fe = e \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa $e \leq g$(Transitif).$\blacksquare$

Definisi 2.4. (Nambooripad,1980). **Urutan (parsial) natural** didefinisikan dalam semigrup reguler S, untuk $a, b \in S$, $a \leq b \Leftrightarrow a = eb = bf$ untuk $e, f \in E_S$

Definisi 2.5. (Mario Petrich, 2002): Suatu semigrup reguler S dan $a \in S$ yang mana $a \in E_s$, $e \leq a \Rightarrow a \in E_s$ adalah semigrup reguler murni.

3. Pembahasan

3.1. Semigrup Reguler

Jika S semigrup reguler dan ρ relasi ekuivalensi pada S maka S/ρ juga semigrup reguler. Jika a elemen reguler, maka $\exists x \in S$ sedemkian hingga $axa = a$, akibatnya $e = ax$

merupakan elemen idempoten di S dan $ea = a$, karena $e = (ax)(ax) = (axa)x = ax = e$ dan $ea = axa = a$.Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $f = xa$ merupakan elemen idempoten dan $af = axa = a$.

Proposisi 3.1. (Janet E. Mills, 1976) Dalam suatu semigrup reguler S, pernyataan berikut adalah ekuivalen:

(i) Jika $e, es \in E_s$, maka $s \in E_s$
(ii) Jika $e, se \in E_s$, maka $s \in E_s$
(iii) Jika $e, ese \in E_s$, maka $s \in E_s$
(iv) Jika $e, set \in E_s$, maka $st \in E_s$
(v) Jika $ese = e \in E_s$, maka $s \in E_s$

Jika salah satu dari lima kondisi tersebut terpenuhi, maka E_s disebut *unitary*.

Proposisi 3.2. (Howie, 1976): Diberikan semigrup ortodoks S. Jika $a \in S$ dan $a^{-1} \in V(a)$ maka

$$V(a) = E(a^{-1}a)a^{-1}E(aa^{-1})$$

Teorema 3.1. *(Howie, 1976):Suatu semigrup reguler S adalah ortodoks jika dan hanya jika $(\forall a, b \in S)[V(a) \cap V(b) \neq \emptyset \Rightarrow V(a) = V(b)]$*

Bukti: *Jika S adalah semigrup ortodoks dan jika $V(a) \cap V(b) \neq \emptyset$, misal $x \in V(a) \cap V(b)$. Selanjutnya $a, b \in V(x)$ dan juga $E(xa) = E(xb), E(ax) = E(bx)$, $R_{xa} = R_{xb} (= R_x)$, $L_{ax} = L_{bx} (= L_x)$ Oleh Proposisi $V(a) = E(xa)xE(ax) = E(xb)xE(bx) = V(b)$.*

Sebaliknya misalkan S reguler dan implikasi teorema berlaku dalam S. Misal e, f idempoten dari S dan x adalah invers ef. $efxef = ef$ dan $xefx = x$. Selanjutnya mudah dilihat bahwa fxe dan $efxe$ adalah idempoten dan $fxe \in V(fxe) \cap V(efxe)$. Oleh hipotesis bahwa $V(fxe) = V(efxe)$. Sekarang kembali memeriksa bahwa $ef \in V(fxe)$,dan juga $ef \in V(efxe)$ sehingga $ef = (ef)(efxe)(ef) = ef(efxef) = (ef)^2$. Terbukti S semigrup ortodoks. ■

3.2. Semigrup Invers

Ditentukan S suatu semigrup reguler, untuk setiap elemen $a \in S$, ada elemen x sedemikian sehingga $axa = a$ dan $xax = x$, dengan elemen x merupakan invers dari a. Apabila invers dari a tunggal, maka S merupakan semigrup invers.

3.3. Kondisi Urutan Natural Pada Semigrup Reguler

Urutan natural, kemurnian dan E-unitary pada beberapa konstruksi semigrup dibahas pada bab ini.

Sifat (Mario Petrich,2002): Diketahui urutan natural dalam semigrup reguler S, untuk $a, b \in S$ dan $e, f \in E_S$ yang didefinisikan oleh $a \leq b \Leftrightarrow a = eb = bf$, merupakan urutan parsial.

Selanjutnya jika $a \in S$ dan $e \in E_S$ sedemikian sehingga $a \leq ee$, maka $a = e = eg$ untuk suatu $f, g \in E_S$ sehingga $a = (fe)(eg) = feg = ag = a$ dan $a \in E_S$.

Definisi 3.1. (Mario Petrich,2002). Suatu semigrup reguler S dimana $e \in E_S, a \in S, e \leq a \Rightarrow a \in E_S$, maka S disebut semigrup reguler murni. Suatu pemetaan $\varphi : S \to T$ adalah murni, jika $\varphi(a) \in E_T$ mengakibatkan $a \in E_S$.

Sifat (Mario Petrich,2002). Diketahui $a, b \in S$, selanjutnya dinyatakan bahwa

$$a \leq b \Leftrightarrow a \in Eb \cap bE$$

Bukti: $(\Rightarrow) a \leq b$ maka ada $e, f \in E_S$ sedemikian hingga $a = eb$ dan $a = bf$. $a \in Eb \wedge a \in bE$. Selanjutnya $a \in Eb \cap bE$. $(\Leftarrow)$ Jika $a \in Eb \cap bE$ maka $a = eb = bf$ dengan $ef \in E_S$ sehingga $a \leq b$ ■

Sifat (Mario Petrich,2002) : Semigrup reguler murni jika dan hanya jika

$$aE \cap E \cap Ea \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$$

Bukti: $(\Rightarrow)$ Diketahui S semigrup reguler murni, $a \in S$ dan $e \in E_S$, $e \leq a \Rightarrow a \in E_S$. Akan dibuktikan bahwa $ae \cap E \cap Ea \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$. Untuk $\forall a \in S$, $\exists x \in E_s$, $x \leq a \Rightarrow a \in E_S$. Berarti $x = af = ga$ dengan $f, g \in E$, sehingga $x \in aE$ dan $x \in Ea$. Oleh karena itu $x \in Ea \cap E \cap aE$. S semigrup reguler murni mengakibatkan $a \in E$.
$(\Leftarrow)$ Ambil $x \in aE$, $x = ae$ dengan $a \in S$ dan $e \in E$ dan $x = fa$, $f \in E$. Berarti $x \in aE \cap Ea$. Selanjutnya $e \in E$. Berarti $x \in aE \cap Ea$. Selanjutnya $e \in E$ dan diketahui $a \in E$, sehingga $ae \in E$. Oleh karena itu $x = ae = fa$, $e, f \in E$ dan $x \leq a$. Terbukti s semigrup reguler murni. ■

Sifat 3.1. *(Mario Petrich,2002). Mengingat S adalah E-unitary jika dan hanya jika*

$$E \cap Ea \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$$

dan dengan alternatif $E \cap aE \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$

Bukti: *$(\Rightarrow)$ Diketahui S adalah E-unitary. Akan dibuktikan bahwa $E \cap Ea \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$ $e, ea \in Ea \Rightarrow a \in Ea$. Ambil $x \in E$ dengan $x = ea$ maka $x \in Ea$. Dengan demikian $x \in E \cap Ea$, $E \cap Ea \neq \emptyset$ dan $a \in E$.*
$(\Leftarrow)$ Diketahui $E \cap Ea \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$, $\forall a \in S$. Ambil sebarang $e \in S$ dan $a \in S$.

$$\begin{aligned} ea \in E &\Rightarrow a \in E \\ ae \in E &\Rightarrow a \in E \end{aligned}$$

$ea \in E$ dan $ea \in Ea$, sehingga $ea \in E \cap Ea$. Jadi $E \cap Ea \neq \emptyset$. Akibatnya $a \in E$. $ae \in E$ dan $ae \in aE$, sehingga $ae \in E \cap aE$. Jadi $E \cap aE \neq \emptyset$. Akibatnya $a \in E$. Terbukti S suatu E-unitary. ■

Bukti bahwa $E \cap Ea \neq \emptyset \Rightarrow a \in E$, $\exists x \in E \cap Ea$, $e \in E$, $x = ae$ sehingga $x \leq a \Rightarrow a \in E$ ■

Proposisi 3.3. (Mario Petrich,2002) Ditentukan S suatu semigrup reguler dan $a, b \in S$, maka $a \leq b \Leftrightarrow a = bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b$ untuk $b^{-1} \in V(b)$

Bukti: Misalkan $a \leq b$. Maka $a = eb = bf$ untuk suatu $ef \in E_S$ dan $a = ab^{-1}b = bb^{-1}a$ untuk suatu $b^{-1} \in V(b)$ juga $a = af = ebf = ebb^{-1}bf = ab^{-1}a = bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b$. Sebaliknya, $a = bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b$ untuk $b^{-1} \in V(b)$. Maka $(bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1})^2$

$$= bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1}$$
$$= bb^{-1}ab^{-1}(bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b)b^{-1}ab^{-1}$$
$$= bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1}$$
$$= (bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b)b^{-1}ab^{-1} = ab^{-1}ab^{-1}$$
$$= bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1}$$

sehingga $bb^{-1}ab^{-1}ab^{-1} \in E_S$ dan $b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}b \in E_S$ yang mengakibatkan $a \leq b$ ■

3.4. Relasi Urutan Natural Dalam Semigrup Invers

Jika a, b adalah elemen-elemen pada semigrup invers S, dapat dinyatakan bahwa $a \leq b$ jika ada e idempoten dalam S sedemikian sehingga $a = eb$.

Lema 3.1. *(Howie,1976) Diketahui S semigrup invers dan didefinisikan relasi $a \leq b$, untuk $a, b \in S$ dan sedemikian sehingga $a = eb$. Relasi "$\leq$" merupakan relasi urutan parsial.*

Bukti: *Untuk menunjukkan bahwa $\leq$ merupakan refleksif diketahui bahwa untuk setiap $a \in S$, $a = ea$, dimana $e = aa^{-1}$. Jika $a = eb$ dan $b = fa$, yang mana $ef \in E$, maka $ea = e(eb) = eb = a$ dan $a = eb = efa = fea = fa = b$. Sehingga relasi $\leq$ merupakan anti-simetri. Jika $a = eb$ dan $b = fc(ef \in E)$ maka $a = (ef)c$; sehingga relasi $\leq$ transitif.* ■

Proposisi 3.4. (Howie,1976) Jika a, b merupakan elemen-elemen pada semigrup invers S maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen :

(i) $a \leq b$
(ii) $(\exists e \in E)a = be$
(iii) $aa^{-1} = ba^{-1}$
(iv) $aa^{-1} = ab^{-1}$
(v) $a^{-1}a = b^{-1}$
(vi) $a^{-1}a = a^{-1}b$
(vii) $a = ab^{-1}a$
(viii) $a = aa^{-1}b$

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $a \leq b, a = eb$ dengan $a \in E$ $a = eb \Rightarrow a^{-1} = (eb)^{-1} = b^{-1}e^{-1} = b^{-1}e$ $a \in S$, maka $a = aa^{-1}a$ dan $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}a = aa^{-1}a = eb(b^{-1}e)eb = ebb^{-1}e^2b = bb^{-1}ee^2b = bbeeb = bb^{-1}eb = b \cdot e'$ dengan $e' = b^{-1}eb \in E$
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) $a \leq b, a = be$ dengan $e \in E$, $a = be \Rightarrow a^{-1} = (be)^{-1} = eb^{-1}aa^{-1} = (be)(eb)^{-1} = be^2b^{-1} = beb^{-1} = b(eb^{-1}) = ba^{-1}$

- (iii) $\Rightarrow$ (iv) $a = aa^{-1}a = ba^{-1}a$ menurut (3), $a^{-1} = a^{-1}ab^{-1}aa^{-1} = (ba^{-1}a)(a^{-1}ab^{-1}) = ba^{-1}(aa^{-1}a)b^{-1} = ba^{-1}ab^{-1} = aa^{-1}ab^{-1} = ab^{-1}$
- (iv) $\Rightarrow$ (v) $a = aa^{-1}a = ab^{-1}aa^{-1}a = a^{-1}(ab^{-1}a) = (a^{-1}a)(b^{-1}a)(a^{-1}a) = b^{-1}(aa^{-1}a) = b^{-1}a$
- (v) $\Rightarrow$ (vi) $a = aa^{-1}a = b^{-1}a$ sehingga $a^{-1} = a^{-1}ba^{-1}$
  $a^{-1}a = (a^{-1}ba^{-1})(ab^{-1}a)$
  $= (a^{-1}b)(a^{-1}a)(b^{-1}a)$
  $= (a^{-1}b)(b^{-1}a))(a^{-1}a) =$
  $a^{-1}bb^{-1}(aa^{-1}a) = (a^{-1}b)(b^{-1}a)$
  $= (a^{-1}b)(a^{-1}a) = (a^{-1}a)(a^{-1}b)$
  $= (a^{-1}aa^{-1})b = a^{-1}b$
- (vi) $\Rightarrow$ (vii) $aa^{-1} = ba^{-1}$ selanjutnya $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}ba^{-1}$,dan pengambilan invers dari kedua sisi kita peroleh $a = ab^{-1}a$.
- (vii) $\Rightarrow$ (viii) $a = aa^{-1}a = a(a^{-1}ba^{-1})a = a(a^{-1}b)(a^{-1}a) = (aa^{-1}a)a^{-1}b = aa-1b$
- (viii) $\Rightarrow$ (i) $a = aa^{-1} \in E$ jadi terdapat $e = aa^{-1}$ sedemikian sehingga $a = aa^{-1}b = eb$
  Terbukti jika $a = aa^{-1}b$ maka $a \leq b$ ■

Lema 3.2. *(Mitsch, 1986) Diketahui* $(S, \cdot)$ *semigrup reguler dan* E_s *, untuk* $a, b \in S$ *pernyataan berikut ini ekuivalen :*

(i) $a = eb = bf$ *untuk suatu* $e, f \in E_s$
(ii) $a = aa'b = ba"a$ *untuk suatu* $a', a" \in V(a) = \{x \in S1a = axa, x = xax\}$
(iii) $a = aa^0b = ba^0a, \forall a^0 \in V(a)$
(iv) $a'a = a'b$ *dan*
$aa' = ba', \forall\ \ V(a)$
(v) $a = ab^*b = bb^*a, a = ab^*a, \forall b^*$
(vi) $a = axb = bxa, a = axa, b = bxb$
(vii) $a = eb$ *untuk setiap idempoten* $e \in R_a$ *dan* $aS \subseteq bS$
(viii) *untuk setiap idempoten* $f \in R_b$*, terdapat idempoten* $e \in R_a$ *dengan* $e \leq f$ *dan* $a = eb$
(ix) $a = ab^{-1}a, \forall b^{-1} \in V(b), aS \subseteq bS$ *dan* $S_a \subseteq S_b$
(x) $a = xb = by, xa = a, \forall x, y \in S$
(xi) $a = eb = bx, \forall e \in E_s, x \in S$

Bukti:

- *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $a = eb = aa'b$ *dimana* $aa' = e \in E_s$ *dan* $a = bf = ba"a$ *dimana* $a"a = f \in E_s$
- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $a = aa'b = ba"a$ *untuk suatu* $a', a" \in V(a)$ *untuk* $a^0 \in V(a)$ *didapatkan* $a = aa^0b = ba^0a$
- *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* $a = aa^0b$ *mengakibatkan* $a^0a = a^0aa^0b = a^0b$ *dan* $a = ba^0a$ *mengakibatkan* $a^0 \in V(a)$
- *(iv)* $\Rightarrow$ *(v)* $aa' = a'b$ *mengakibatkan* $a = aa'b$ *dan* $aa' = ba'$ *mengakibatkan* $a = ba'a$ *karenanya untuk* $b^* \in V(b)$ *kita peroleh* $ab * a = aa'b.b * b = aa'b = a$ *dan*

$bb*a = bb*baa'a = ba'a = a$

- *(v) $\Rightarrow$ (vi) $axb = ab*bxb = ab*b = a, bxa = bxbb*a = bb*a = a, axa = axbb*a = ab*a = a$ oleh karenanya $b = bxb$*
- *(vi) $\Rightarrow$ (vii) Dari $a = axa$ berikut bahwa $ax \in E_s$ sehingga $a = axb = eb$ dengan $e = ax \in R_a$ juga $a = bxa \in bS$ mengakibatkan $aS \subseteq bS$*
- *(vii) $\Rightarrow$ (viii) $a = eb$ untuk setiap idempoten $e \in R_a, e = ax$ sehingga $a = axb, a \in aS$ $a = axb = bxa$ karena $a \in bS$. Karenanya $e = fx$ sehingga $e \leq f$ dan $f \in R_b$*
- *(viii) $\Rightarrow$ (ix) $a = ae = ebe = ebb'be = ebbeeb = ab'a$ dengan $b' \in V(b)$ $a = eb = axb = bxa$ sehingga $aS \subseteq bS$*
- *(ix) $\Rightarrow$ (x) Karena $(S, .)$adalah reguler,$aS \subseteq bS$ dan $S_a \subseteq S_b$ mengakibatkan bahwa $a = ax = by, \forall x, y \in S$ Karenanya kita peroleh bahwa $a = ab'a = xbb'by = xby = xby = xa$*
- *(x) $\Rightarrow$ (xi) Untuk $a' \in V(a)$ kita punya $a = aa'a = aa'xb = eb$ dengan $e = aa'x \in E_s$ karena $e^2 = aa'xaa'x = aa'xaa'x = aa'aa'x = adx = e$*
- *(xi) $\Rightarrow$ (i) Untuk $a' \in V(a)$ kita punya $a = aa'a = bxa'a = bf$ dengan $f = xda'a \in E_s$ karena $a = eb$ kita punya $ea = a$ dan $f^2 = xa'axa'a = xa'ea = xa'ea = xa'a = f$* ■

Proposisi 3.5. (Howie,1976) Jika $a \leq b$ dalam semigrup invers S, maka $ca \leq cb$ dan $ac \leq bc$ untuk setiap $c \in S$. Selanjutnya $a^{-1} \leq b^{-1}$

Bukti: Diketahui $a \leq b$, sehingga $a = eb$, dengan $e \in E$, selanjutnya $ac = ebc$, maka $ac \leq bc$. Selanjutnya $ca = ceb = c(c^{-1}c)eb = (cec^{-1})cb$, sehingga $ca \leq cb$. Dan $a^{-1} = b^{-1}e$ sehingga $a^{-1} \leq b^{-1}$ (oleh proposisi 4.5.2) ■
Urutan parsial natural merupakan kompatibel dalam perkalian. Untuk $a \in S$ maka $V(a) = \{x \in S | a = axa, x = xax\}$. Jika a elemen pada semigrup reguler lengkap pada S, selanjutnya a termuat dalam suatu subgrup maximal G pada S, a^0 merupakan elemen identitas lokal (locally identity) dari G, a^{-1} merupakan invers a dalam G.

Sifat 3.2. *(Mario Petrich, 2002)*

(i) Jika S suatu semigrup invers, maka $a \leq b \Leftrightarrow a = ab^{-1}a (a, b \in S)$
(ii) S semigrup reguler murni jika dan hanya jika memenuhi implikasi $a^{-1}a = a^{-1}ba \Rightarrow b = b^2$
(iii) Jika S semigrup reguler lengkap, maka $a \leq b \Leftrightarrow a = b^0ab^{-1}a^0b^0 \Rightarrow (a, b \in S)$
(iv) S semigrup reguler murni jika dan hanya jika memenuhi implikasi $a^0 = b^0a^0b^{-1}a^0b^0 \Rightarrow b = b^0$

Bukti:

(i) Jika S suatu semigrup invers, maka $a \leq b \Leftrightarrow a = ab^{-1}a(a, b \in S) \Rightarrow$ Jika $a \leq b$, maka $a = eb = bf$ dengan $e, f \in E_s$. Selanjutnya menurut proposisi 4.5.2, $a^{-1}a = a^{-1}b, a = aa^{-1}a = aa^{-1}b$ menurut proposisi 3.2.3 (iii) $a^{-1} = b^{-1}aa^{-1}.a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = a(b^{-1}aa^{-1})b = (ab^{-1})(aa^{-1}b) = ab^{-1}a$ ■ $\Leftarrow a = ab^{-1}a$ menurut proposisi 3.2.3. $a^{-1} = a^{-1}ba^{-1}$, sehingga $a = aa^{-1}a = aa^{-1}ba^{-1}a = aa^{-1}b(b^{-1}b)(a^{-1}a) = aa^{-1}b(a^{-1}a)(b^{-1}b) = eb$, dimana $(aa^{-1})(ba^{-1}ab^{-1}) \in E$ ■

(ii) *S murni jika dan hanya jika memenuhi implikasi* $a^{-1}ab = a^{-1}ba \Rightarrow b = b^2$.
$\Rightarrow$ *Diketahui S semigrup reguler murni,* $a \in S, x \in E_s, x \leq a \Rightarrow E_s$ *.Selanjutnya* $x = ea = af$ *dengan* $e, f \in E_s$ *.Jika* $x = a^{-1}a$*,maka* $a^{-1}a = a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}ba^{-1}aa^{-1}b = a^{-1}ba^{-1}b$ *sehingga* $a \leq b$ *dengan* $e = a^{-1}ba^{-1} \in E_s$.
Selanjutnya bahwa
$a^{-1}a = a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}ba^{-1}aa^{-1}b = a^{-1}ba^{-1}b, b = b^2$
$= a^{-1}baa^{-1}b$
$= a^{-1}baa^{-1}a = a^{-1}ba$
$\Rightarrow a^{-1}a = a^{-1}ba = a^{-1}aa^{-1}ba$ *berarti* $a^{-1}a \leq a^{-1}ba, a^{-1}ba, a^{-1}ba \in E$
$a^{-1}baa^{-1}ba = a^{-1}ba^0ba = a^{-1}b^2a = a^{-1}ba$
Terbukti S semigrup reguler murni.

(iii) *Jika S semigrup reguler lengkap, maka* $a \leq b \Leftrightarrow a = b^0ab^{-1}ab^0(a, b \in S)$
$a \leq b \rightarrow a = ab^{-1}a = b^0ab^{-1}ab^0(a, b \in S)$ *dengan* b^0 *merupakan elemen identitas lokal dalam* S . $\rightarrow$ *Jika* $a \leq b$, *maka* $a = eb = bf$ *dengan* $e = aa^{-1}$
$a = aa^{-1}a = ae = ebe = aa^{-1}baa^{-1} = aa^{-1}bb^{-1}baa^{-1} = (aa^{-1}b)a^{-1}bb^{-1}baa^{-1} = aa^{-1}bb^{-1}a = ab^{-1}a = b^0ab^{-1}ab^0$
. $\Leftarrow a = b^0ab^{-1}ab^0 = (b^0ab^{-1}ab^{-1})b = eb$ *dengan* $e = b^0ab^{-1}ab^{-1}$, *dimana* $b^0ab^{-1}ab^{-1} \in E_s$ *sehingga* $a \leq b$
Selanjutnya jika S semigrup reguler lengkap maka menurut teorema 4.5.4(iii) $a = eb = bf$ *untuke*$, f \in E_s$ *dan (iv)* $a = b^0ab^{-1}ab^0$ *adalah ekuivalen sehingga berlaku* $a \leq b \Leftrightarrow a = b^0ab^{-1}ab^0(a, b \in S)$ ■

(iv) *S adalah murni jika dan hanya jika memenuhi implikasi*
$a^0 = b^0a^0b^{-1}a^0b^0 \Rightarrow b = b^0$
Bukti:
$b = bb^{-1}b = bb^0 = ba^0f = bb^{-1}ba^0f = bb^0$
$a^0f = bb^0b^0a^0b^{-1}a^0b^0f = bb^0a^0b^{-1}a^0$
$b^0f = b^0a^0b^0f = b^0b^0a^0f = b^0b^0 = b^0$
$\Leftarrow a^0 = b^0a^0b^{-1}a^0b^0$, *dengan* $b^0a^0b^{-1}$
$a^0 \in E_s$ *dan* $b = b^0$ *sehingga* $a^0 \leq b^0$ *Terbukti S Murni* ■

Lema 3.3. *(Mario Petrich, 2002) Diberikan S suatu semigrup reguler murni dan* $a, b \in S$. *Jika* $ab \in E_s$ *maka* $ba \in E_s$

Bukti. *S semigrup reguler murni, ambil* $a, b \in S \rightarrow ab \in S$ *Jika* $ab \in S$ *maka* $ba \in E_s$ *Ambil* $e \in Sab \in S$ *S semigrup reguler murni, sehingga* $e \leq ab \Rightarrow ab \in E_s$ *Diambil* $e = ba$ *dan* $e^2 = e, e^2 = ee = eba = bae$, *karenanya* $e \leq ba$ *sehingga* $ba \in E_s$ ■

Lema 3.4. *(Mario Petrich, 2002) Diketahui S dan T suatu semigrup. Diberikan* $\varphi : S \rightarrow T$ *merupakan epimorfisme dari semigrup reguler. Jika* φ *dan T semigrup murni, maka S semigrup reguler murni.*

Bukti: *Misalkan* $e \in E(S)$ *dan* $a \in S$ *sedemikian sehingga* $e \leq a$. *Selanjutnya ada* $f, g \in E(S)$ *sedemikian sehingga* $e = fa = ag$. *Oleh karena itu* $\varphi(e) = \varphi(f)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(g)$ *Dan juga bahwa* $\varphi(e) \leq \varphi(a)$ *dan* $\varphi(e) \in E_t$. *Hipotesis mengakibatkan* $\varphi(a) \in E_t$ *,oleh karenanya* $a \in E_s$. *Sehingga S merupakan semgrup reguler murni* ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, didapatkan beberapa kesimpulan:

1. Kemurnian dan E-unitary merupakan kejadian khusus dari urutan natural
2. Terdapat urutan natural yang bukan merupakan urutan parsial.
3. Urutan natural berlaku dalam semigrup reguler, semigrup invers dan semigrup reguler lengkap
4. Dalam suatu pemetaan dari suatu himpunan ke himpunan lain terdapat kemurnian yang saling mempengaruhi

Daftar Pustaka

[1] Auinger, K, 1995, A System of Be-Identities of Locally Iners Semiroups, Proceding of the American Mathematical Society, Vol. 123, 979-988

[2] Friedman, J.H. (1991). Multivariate Adaptive Regression Splines (with discussion), Ann Statist. 19, 1-141.

[3] Blyth, T.S, Santos, Almeida M. H. , 1995, Congruences associated with inverse transversals, Collect. Math. 46, 1-2, 35-48

[4] Clifford, A.H, Preston, G.B., 1961, The Algebraic Theory of Semigroup, Mathematical Surveys, American Matematical Society Providence, RI. No.7, Vol. 1.

[5] Howie, J.M., 1976, An Introduction to semigroup Theory, Academic Press, New York.

[6] Mills, Janet E,1976, Certain Congruences On Orthodox Semigroup, Pacific Journal of Mathematics, 4, 217-226